

Hensel 級数の収束性と多価性について

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki) *

筑波大学 数学系

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

稲葉 大樹 (Daiju Inaba) †

日本数学検定協会

MATHEMATICS CERTIFICATION INSTITUTE OF JAPAN

Abstract

Hensel 級数とは、代数関数を特異点において展開した級数の一種で、定義多項式を Hensel 構成することで計算される。Hensel 級数は、従来の級数と異なり人間が行って得られる級数に似ていて扱い易く、応用面で有用と期待される。SNC2007 で著者らは、多変数 Hensel 級数の次の性質を数値的に明らかにした。1) 展開点の任意の微小近傍に収束領域と発散領域が混在する。2) 複素空間内で Hensel 級数を追跡すると、収束領域では元の代数関数によく収束するが、発散領域を通過すると別の枝に飛び移ることがある。本稿では、これらの性質を理論的に解明し、より強い性質を導く。

1 はじめに

Hensel 級数とは、代数関数を特異点において展開した級数の一種である。 $F(x, \mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, u_1, \dots, u_\ell) \in \mathbb{C}[x, u_1, \dots, u_\ell]$ が与えられたとき、 $F(x, \mathbf{u})$ の x に関する根として定まる関数 $\phi(\mathbf{u})$ を代数関数という： $F(\phi(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = 0$ 。 $n \stackrel{\text{def}}{=} \deg_x(F)$ が 5 以上のとき、代数関数は一般にべき根では表すことができないので、計算機では $\phi(\mathbf{u})$ を $u_1, \dots, u_\ell$ に関する級数に展開して扱うことが普通である。本稿では、 $\ell \geq 2$ のとき、すなわち多変数代数関数の Hensel 級数のいくつかの重要な性質を理論的に解明する。

$\mathbf{s} \stackrel{\text{def}}{=} (s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ を級数展開の展開点とする。一般性を失うことなく、 $F(x, \mathbf{u})$ は既約（したがって無平方）であると仮定する。 $F(x, \mathbf{s})$ は無平方とは限らないが、無平方なときは $F(x, \mathbf{u})$ の全ての根は $u_1 - s_1, \dots, u_\ell - s_\ell$ の整べき級数 (Taylor 級数) に展開できる。 $F(x, \mathbf{s})$ が無平方でないとき、 $\mathbf{s}$ を $F(x, \mathbf{u})$ の Hensel 構成に対する**特異点**という。 $(\alpha, \mathbf{s})$ が代数幾何の意味で特異点のとき、 $\mathbf{s}$ は Hensel 構成に対する特異点であるが、逆は成立しない。 $\mathbf{s}$ が特異点のとき、 $F(x, \mathbf{s}) = \tilde{F}(x, \mathbf{s}) \cdot \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{m_i}$ 、ただし $\tilde{F}(x, \mathbf{s})$ は無平方で $m_i \geq 2$ 、と分解できる。 $\tilde{F}(x, \mathbf{s})$ の各根に対応する代数関数は Taylor 級数に展開できるから、本稿では因子 $(x - \alpha_i)^{m_i}$ に対応する代数関数たちを考察する。 $F(x, \mathbf{u})$ の上記因子のうち、 $(x - \alpha_i)^{m_i}$ に対応する因子を改めて $F(x, \mathbf{u})$ とおき、 $m_i = n$ とおく。また、一般性を失うことなく、 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ かつ $\alpha_i = 0$ とする： $F(x, \mathbf{0}) = x^n$ 。 $F(x, \mathbf{u})$ がモニックでない場合は本稿では扱わない ([SI09] を参照)。

$F(x, \mathbf{u})$ の x に関する根として定まる代数関数を特異点で展開する方法は、既に二つも提案されている。第一の方法は 1 変数 Puiseux 級数展開法を帰納法で多変数に拡張したものである。得られる級数は全ての変数について分数べきとなるが、いくつかの変数に関するべきが $-\infty$ になるのが難である。McDonald は 1995 年、各変数を異なる無理数で重み付けすることにより、この難点を解決した [McD95]。しかしながら、

*sasaki@math.tsukuba.ac.jp

†inaba@math.tsukuba.ac.jp

これらの級数はいずれも多変数 Taylor 級数のように単項式の和で表され、級数全体の性質が非常に分かりにくい。たとえば収束領域を表す公式を求めることは至難であろう。

1993 年、Sasaki-Kako は Hensel 構成の特異点に拡張することにより新しい展開法を考案し、**拡張 Hensel 構成**（以後 EHC と略記する）と命名した [SK93, SK99]。彼らはモニックな多項式を扱ったが、2000 年、Sasaki-Inaba は非モニックな場合に拡張し [SI00]、多変数多項式の因数分解における非零代入問題を決定的ともいえる形で解決した [Ina05]。EHC で計算できる級数は **Hensel 級数** と命名され、次の性質を持つことが分かっている [SK99, IS07, SI08a]。

1. Hensel 級数の初項は、Newton 多項式（2 章を参照）と命名された多項式の根である。
2. Hensel 級数は、 $u_1, \dots, u_\ell$ の（重み付き）全次数に関する分数べき級数で、係数部には $u_1, \dots, u_\ell$ の斉次有理式が現れ、Newton 多項式の根である簡単な斉次代数関数が現れることもある。
3. Hensel 級数の多価性は初項の多価性と同じである。
4. Hensel 級数の分母の多項式は、その因子と他の因子全体との終結式のべき乗である。このことより、展開点近傍では、分母 = 0 の点の近傍で幾つかの根（代数曲面）が同じ値を取ることが分かる。
5. 展開点の任意の微小近傍に発散領域と収束領域が混在する。
6. Hensel 級数は収束領域では元の代数関数によく収束する。
7. 発散領域を経由して Hensel 級数を追跡すると、Hensel 級数は元の代数関数の一つの枝から別の枝に飛び移ることがある。

上記性質 1 ～ 4 は理論的に導出されたが、性質 5 ～ 7 は [IS07] で数値的に認識されたにすぎない。本稿の目的は、性質 5 と 7 を理論的に解明し、より強い性質を導出することである。

2 拡張 Hensel 構成の復習

Hensel 級数の解析的性質を明らかにするには得られる級数を簡潔に表現する定式化が必要で、そのため我々は二つの新しい定式化（塊 **Hensel 構成法** と **Hensel 因子の根表示** と命名）を考案した [SI08b]。

2.1 ニュートン多項式

1 章で述べたように、本稿では次式で表される多項式 $F(x, \mathbf{u})$ を扱う。

$$\begin{cases} F(x, \mathbf{u}) = x^n + f_{n-1}(\mathbf{u})x^{n-1} + \dots + f_0(\mathbf{u}), \\ F(x, \mathbf{0}) = x^n \quad (\mathbf{0} \text{ is a singular point}). \end{cases} \quad (2.1)$$

EHC におけるキーとなる概念はニュートン多項式で、次のように定義される。

定義 1（ニュートン多項式） $\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} (w_1, \dots, w_\ell) \in \mathbf{N}^\ell$ は変数 $u_1, \dots, u_\ell$ の重みを表すとする； $\mathbf{w} = (1, \dots, 1)$ でもよい。 $F(x, \mathbf{u})$ の 0 でない各項 $cx^{e_x}u_1^{e_1}\dots u_\ell^{e_\ell}$ に対し、2 次元直交座標系上の (e_x, e_t) に小点を打つ。ここで $e_t = w_1e_1 + \dots + w_\ell e_\ell$ である。直線 $\mathcal{L}$ を、 $(n, 0)$ にプロットされた小点と他の小点を通り、 $\mathcal{L}$ の下にはどの小点もプロットされない、との条件で定める。 $\mathcal{L}$ 上にプロットされる全ての項の和をニュートン多項式と呼び、 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ と略記する。◇

$\mathcal{L}$ の傾きを $-\lambda$ とする： λ は今の場合、正の有理数である。 e_t は重み付き全次数 (wtdeg と略す) であり、 $u_i = v_i^{w_i}$ ($i = 1, \dots, \ell$) とすれば $v_1, \dots, v_\ell$ の全次数である： $\text{wtdeg}_u(f(\mathbf{u})) = \text{tdeg}_v(f(v_1^{w_1}, \dots, v_\ell^{w_\ell}))$ 。 $F_{\text{New}}(y^\lambda, v_1^{w_1}, \dots, v_\ell^{w_\ell})$ は $y, v_1, \dots, v_\ell$ に関して斉次なので、 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ は $(\lambda, \mathbf{w})$ -斉次であるという。

$F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ の根を $\alpha_1(\mathbf{u}), \dots, \alpha_n(\mathbf{u})$ とする ; 以下では多くの場合、簡単に $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ と表す。

$$F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) = (x - \alpha_1(\mathbf{u})) \cdots (x - \alpha_n(\mathbf{u})), \quad \text{wtdeg}_{\mathbf{u}}(\alpha_i(\mathbf{u})) = \lambda. \quad (2.2)$$

$\alpha_i(\mathbf{u})$ は代数関数のこともある。 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ が $(\lambda, \mathbf{w})$ -斉次ゆえ、各根 $\alpha_i(\mathbf{u})$ は $\mathbf{w}$ -斉次である。第4章では $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ の $\mathbf{C}[x, \mathbf{u}]$ での因数分解も必要となる。

$$\begin{cases} F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) = G_1(x, \mathbf{u}) \cdots G_r(x, \mathbf{u}), \\ \text{each } G_i(x, \mathbf{u}) \text{ is irreducible in } \mathbf{C}[x, \mathbf{u}]. \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2 塊 Hensel 構成

補助変数 t を導入し、 $\tilde{F}(x, \mathbf{u}, t)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} F(x, \mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) + F_h(x, \mathbf{u}), \\ \tilde{F}(x, \mathbf{u}, t) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) + t F_h(x, \mathbf{u}). \end{cases} \quad (2.4)$$

塊 Hensel 構成とは、 t を法とする Hensel 構成である（高次項を一塊として扱う）。たとえば、(2.3) の $G_1, \dots, G_r$ を初期因子に選ぶなら、Hensel 構成は次の関係式が成立するように行われる。

$$\tilde{F}(x, \mathbf{u}, t) \equiv G_1^{(k)}(x, \mathbf{u}) \cdots G_r^{(k)}(x, \mathbf{u}) \pmod{t^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

塊 Hensel 構成により、我々は $\tilde{F}(x, \mathbf{u}, t)$ を次のように分解する。

$$\begin{cases} \tilde{F}(x, \mathbf{u}, t) \equiv (x - \varphi_1^{(k)}(\mathbf{u}, t)) \cdot \tilde{G}^{(k)}(x, \mathbf{u}, t) \pmod{t^{k+1}}, \\ \varphi_1^{(0)}(\mathbf{u}, 1) = \alpha_1, \quad \tilde{G}^{(0)}(x, \mathbf{u}, 1) = F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) / (1 - \alpha_1). \end{cases} \quad (2.5)$$

このとき、 $\varphi_1^{(\infty)}(\mathbf{u}, 1)$ が α_1 に対応する **Hensel 級数**である。

(2.5) を満たす塊 Hensel 構成は次のように実行される。便宜上、 $G_1^{(k)}(x, \mathbf{u}, t) = x - \varphi_1^{(k)}(\mathbf{u}, t)$ とおく。 $k-1$ 次の Hensel 因子 $G_1^{(k-1)}$ と $\tilde{G}^{(k-1)}$ が計算され、次式を満たすとする：

$$\tilde{F}(x, \mathbf{u}, t) \equiv G_1^{(k-1)}(x, \mathbf{u}, t) \cdot \tilde{G}^{(k-1)}(x, \mathbf{u}, t) \pmod{t^k}. \quad (2.6)$$

まず、 k 次の残余 $\delta F^{(k)}(x, \mathbf{u})$ を次式で計算する：

$$\begin{aligned} t^k \delta F^{(k)}(x, \mathbf{u}) &\equiv \tilde{F}(x, \mathbf{u}, t) - G_1^{(k-1)}(x, \mathbf{u}, t) \cdot \tilde{G}^{(k-1)}(x, \mathbf{u}, t) \pmod{t^{k+1}}, \\ \delta F^{(k)}(x, \mathbf{u}) &\stackrel{\text{def}}{=} \delta f_{n-1}^{(k)}(\mathbf{u}) x^{n-1} + \delta f_{n-2}^{(k)}(\mathbf{u}) x^{n-2} + \cdots + \delta f_0^{(k)}(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

次に、 k 次の Hensel 因子 $G_1^{(k)}$ と $\tilde{G}^{(k)}$ をよく知られた次の算式で計算すればよい。

$$\begin{cases} G_1^{(k)}(x, \mathbf{u}, t) = G_1^{(k-1)}(x, \mathbf{u}, t) + t^k \sum_{l=0}^{n-1} B_l(x, \mathbf{u}) \delta f_l^{(k)}(\mathbf{u}), \\ \tilde{G}^{(k)}(x, \mathbf{u}, t) = \tilde{G}^{(k-1)}(x, \mathbf{u}, t) + t^k \sum_{l=0}^{n-1} A_l(x, \mathbf{u}) \delta f_l^{(k)}(\mathbf{u}). \end{cases} \quad (2.8)$$

ここで、 $A_l(x, \mathbf{u})$ と $B_l(x, \mathbf{u})$, $0 \leq l \leq n-1$, は次式を満たすように決められる。

$$\begin{aligned} (x - \alpha_1) A_l(x, \mathbf{u}) + [F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) / (x - \alpha_1)] B_l(x, \mathbf{u}) &= x^l, \\ A_l(x, \mathbf{u}), B_l(x, \mathbf{u}) &\in \mathbf{C}(\mathbf{u})[x, \alpha_1], \\ \deg_x(A_l) &< n-1, \quad \deg_x(B_l) < 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.3 Hensel 級数の根表示

Hensel 級数を根 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ で表すと、級数の性質がよく分かる。まず、 $A_l(x, \mathbf{u})$ と $B_l(x, \mathbf{u})$ を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ で表す。(2.9) の x に α_1 と α_j ($j \geq 2$) 代入すると、 $B_l(\alpha_1, \mathbf{u}) = \alpha_1^l / \prod_{j=2}^n (\alpha_1 - \alpha_j)$ と $A_l(\alpha_j, \mathbf{u}) = \alpha_j^l / (\alpha_j - \alpha_1)$ を得る。これらより、 $A_l(x, \mathbf{u})$ と $B_l(x, \mathbf{u})$ は次式のように一意に定まる。

$$A_l(x, \mathbf{u}) = \sum_{j=2}^n \alpha_j^l \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) / ((x - \alpha_1)(x - \alpha_j))}{F'_{\text{New}}(\alpha_j, \mathbf{u})}, \quad B_l(x, \mathbf{u}) = \frac{\alpha_1^l}{F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})}. \quad (2.10)$$

$\delta F^{(1)}(x, \mathbf{u}) = F_h(x, \mathbf{u})$ ゆえ、(2.8) の $A_l(x, \mathbf{u})$ と $B_l(x, \mathbf{u})$ に上式を代入し、 $\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_i^l \delta f_l^{(1)} = \delta F^{(1)}(\alpha_i, \mathbf{u})$ に注意すると、次式を得る。

$$\begin{cases} G_1^{(1)}(x, \mathbf{u}, t) = x - \alpha_1 + t \frac{F_h(\alpha_1, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})}, \\ \tilde{G}^{(1)}(x, \mathbf{u}, t) = \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{x - \alpha_1} + t \sum_{j=2}^n \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_j)} \frac{F_h(\alpha_j, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_j, \mathbf{u})}. \end{cases} \quad (2.11)$$

$F(x, \mathbf{u})$ は t に関して 0 次と 1 次の項しか含まず、 $\delta F^{(k)}$ ($k \geq 2$) には寄与しない。したがって、帰納法により次の定理が容易に得られる (証明は省略する)。

定理 1 $F(x, \mathbf{u})$ は x に関してモニックで、 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ は無平方とする。このとき、(2.5) の Hensel 因子 $G_1^{(\infty)}(x, \mathbf{u}, t)$ と $\tilde{G}^{(\infty)}(x, \mathbf{u}, t)$ は次のように表すことができる。

$$G_1^{(\infty)}(x, \mathbf{u}, t) = x - \alpha_1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \frac{\delta F^{(k)}(\alpha_1, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})}, \quad (2.12)$$

$$\tilde{G}^{(\infty)}(x, \mathbf{u}, t) = \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{x - \alpha_1} + \sum_{j=2}^n \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_j)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^k \frac{\delta F^{(k)}(\alpha_j, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_j, \mathbf{u})} \right). \quad (2.13)$$

ここで $\delta F^{(1)} = F_h(x, \mathbf{u})$ であり、 k 次の残余 $\delta F^{(k)}$ ($k \geq 2$) は次式で与えられる。

$$\delta F^{(k)}(x, \mathbf{u}) = - \sum_{j=2}^n \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_j)} \left(\sum_{k'=1}^{k-1} \frac{\delta F^{(k')}(\alpha_1, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})} \frac{\delta F^{(k-k')}(\alpha_j, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_j, \mathbf{u})} \right). \quad (2.14)$$

3 展開点近傍での Hensel 級数の収束性

本章では第 1 章で述べた性質 5 を理論的に考察する。以下では、 $\|\mathbf{u}\|$ は $u_1, \dots, u_\ell$ に適当な数値を代入したとして、 $\mathbf{u}$ の 2 ノルム (ユークリッドノルム) を表す: $\|\mathbf{u}\| \stackrel{\text{def}}{=} (|u_1|^2 + \dots + |u_\ell|^2)^{1/2}$ 。上記のように $\mathbf{u}$ が重み付けられている場合は、重み無しの変数でノルムを定義する方がよい: $u_i = v_i^{w_i}$ ($i = 1, \dots, \ell$) とすれば、 $\mathbf{v}$ の 2 ノルムを用いるのである。以下ではすべて、変数 $\mathbf{v}$ のノルムでオーダー評価を行う。

補題 1 $\|\mathbf{v}\|$ が小さいとき、次のオーダー評価が成立する。

$$\|\alpha_1\|, \|\alpha_1 - \alpha_j\| = O(\|\mathbf{v}\|^\lambda) \quad (j \geq 2), \quad (3.1)$$

$$\|F'_{\text{New}}(\alpha_i, \mathbf{u})\| = O(\|\mathbf{v}\|^{(n-1)\lambda}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.2)$$

$$\|F_h(\alpha_i, \mathbf{u})\| = o(\|\mathbf{v}\|^{n\lambda}) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.3)$$

証明 $\alpha_i(\mathbf{u})$ は $v_1, \dots, v_\ell$ に関して斉次で $\text{tdeg}_v(\alpha_i) = \lambda$ なので、(3.1) が成立する。 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ は $(\lambda, \mathbf{w})$ -斉次なので、(3.2) が得られる。 $F_h(x, \mathbf{u})$ の各係数は $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ の対応する係数より $\mathbf{v}$ に関して次数が 1 以上高いので、(3.3) が成立する。◇

定理 2 展開点の微小近傍では、Hensel 級数 $\varphi_1^{(\infty)}(\mathbf{u}, 1)$ の任意の発散領域は展開点から出発し、 $\alpha_1 - \alpha_j$ ($2 \leq j \leq n$) の零点に沿って、放射状に広がっていく。

証明 (2.14) とともに (2.12) の $G_1^{(k)}(x, \mathbf{u}, t)$ をみれば、展開点の近傍では Hensel 級数は $\alpha_1(\mathbf{u}) - \alpha_j(\mathbf{u})$ と $F_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u}) = \prod_{j=2}^n (\alpha_1(\mathbf{u}) - \alpha_j(\mathbf{u}))$ の零点の近くでのみ発散することがわかる。◇

補題 2 Hensel 級数 $\varphi_1^{(\infty)}(\mathbf{u}, t)$ の t^k -項の係数を $\delta\varphi_1^{(k)}(\mathbf{u})$ とする。Hensel 級数の分母項の零点近傍を除き、 $\delta\varphi_1^{(k)}(\mathbf{u})$ について次のオーダー評価が成立する。

$$\|\delta\varphi_1^{(k)}(\mathbf{u})\| = o(\|\mathbf{v}\|^{\lambda+k-1}) \quad \text{for small } \|\mathbf{v}\|. \quad (3.4)$$

証明 補題 1 とともに (2.12) を見ると、 $\delta F^{(1)} = F_h(x, \mathbf{u})$ ゆえ次式をえる。

$$\delta\varphi_1^{(1)}(\mathbf{u}) = -\frac{F_h(\alpha_1, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})} \implies \|\delta\varphi_1^{(1)}(\mathbf{u})\| = \frac{o(\|\mathbf{v}\|^{n\lambda})}{O(\|\mathbf{v}\|^{(n-1)\lambda})} = o(\|\mathbf{v}\|^\lambda).$$

次に補題が $k-1$ まで正しいと仮定する。このとき、

$$\frac{\|\delta F^{(j)}(\alpha_i, \mathbf{u})\|}{\|F'_{\text{New}}(\alpha_i, \mathbf{u})\|} = o(\|\mathbf{v}\|^{\lambda+j-1}) \quad \text{for small } \|\mathbf{v}\|, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

であるから、 $k \geq 2$ に対して $\delta F^{(k)}(\alpha_1, \mathbf{u})$ は次のようにオーダー評価できる。

$$\begin{aligned} \|\delta F^{(k)}(\alpha_1, \mathbf{u})\| &= O\left(\sum_{j=2}^n \frac{\|F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})\|}{\|\alpha_1 - \alpha_j\|} \cdot \left(\sum_{k'=1}^k \frac{\|\delta F^{(k')}(\alpha_1, \mathbf{u})\|}{\|F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})\|} \frac{\|\delta F^{(k-k')}(\alpha_j, \mathbf{u})\|}{\|F'_{\text{New}}(\alpha_j, \mathbf{u})\|}\right)\right) \\ &= \frac{O(\|\mathbf{v}\|^{(n-1)\lambda})}{O(\|\mathbf{v}\|^\lambda)} \cdot \sum_{k'=1}^k o(\|\mathbf{v}\|^{\lambda+k'-1}) o(\|\mathbf{v}\|^{\lambda+(k-k')-1}) = o(\|\mathbf{v}\|^{n\lambda+k-1}). \end{aligned}$$

これより、 $\|\delta\varphi_1^{(k)}(\mathbf{u})\| = \|\delta F^{(k)}(\alpha_1, \mathbf{u})\| / \|F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})\| = o(\|\mathbf{v}\|^{\lambda+k-1})$ が得られる。◇

定理 3 展開点近傍では、発散領域の中心部で代数関数の二つの枝が交差する (α_1 が $\alpha_j \neq \alpha_1$ と交差する場合) か、接する (α_1 が $\alpha_j \neq \alpha_1$ と接するだけで交差しない場合)。

証明 定理 2 より、展開点近傍では発散領域は全て $\alpha_1 - \alpha_j$ ($2 \leq j \leq n$) の零点に沿って放射状に広がる。また補題 2 より、代数関数は展開点近傍では Hensel 級数の初項で良く近似できる。したがって、発散領域の中心部では、 α_1 が α_j と交差する場合は α_1 に対応する枝は α_j に対応する枝と交差し、接する場合は枝も接する。◇

定理 4 変数 $\mathbf{v}$ でみて半径 r の超球の表面を S_r とする： $\|\mathbf{v}\|^2 = r^2$ 。このとき、次式が成立する。

$$\frac{[S_r \text{ 上での発散領域}]}{[S_r \text{ 上での収束領域}]} \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

証明 級数の初項 $\alpha_1(\mathbf{u})$ はどの点でも発散せず、発散するのは高次項の係数部 $\delta\varphi_1^{(k)}(\mathbf{u})$ ($k \geq 1$) だけである。補題 2 によれば、 $\|\mathbf{v}\|$ が小さいとき、 $\alpha_1 - \alpha_j$ と $F_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})$ の零点近傍を除き、 $\|\delta\varphi_1^{(k)}(\mathbf{u})\| / \|\alpha_1(\mathbf{u})\| = o(\|\mathbf{v}\|^{k-1})$ である。よって、(3.5) 式の比は $r \rightarrow 0$ とともに小さくなり続け、最後には 0 になる。◇

系 1 Hensel 級数 $\varphi_1^{(\infty)}(u, 1)$ は、展開点の微小近傍では、ほとんどの領域で収束する。 ◇

例 1 展開点近傍で発散領域が展開点に細く突き刺さる様子を見る。

$$F_2(x, u, v) = (x+u)(x-v)(x-u+v) - u^2v^2x. \quad (3.6)$$

$F_{2\text{New}} = (x+u)(x-v)(x-u+v)$ なので、 $\alpha_1 = -u$, $\alpha_2 = v$, $\alpha_3 = u-v$ とおく。Hensel 級数 $\varphi_1^{(\infty)}(u, v)$ は $v = -u$ と $v = 2u$ に沿って発散領域を持つ。実際、 $F_2(x, u, v)$ の三つの Hensel 級数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(\infty)}(u, v) &= -u - u^3v^2/((2u-v)(u+v)) + u^5v^4(u^2-uv+v^2)/((2u-v)(u+v))^3 + \dots, \\ \varphi_2^{(\infty)}(u, v) &= v - u^2v^3/((u-2v)(u+v)) + u^4v^5(u^2-uv+v^2)/((u-2v)(u+v))^3 - \dots, \\ \varphi_3^{(\infty)}(u, v) &= u-v + u^2v^2(u-v)/((u-2v)(2u-v)) \\ &\quad - u^4v^4(u-v)(u^2-uv+v^2)/((u-2v)(2u-v))^3 + \dots. \end{aligned}$$

図 1a には、横軸を u として、三つの関数の振る舞いを示しているが、いずれも $\varphi \simeq -u$ のように振る舞うので分かりにくい。第一の線は $\varphi \simeq -u$ で、これは $\varphi_1^{(7)}(u, 0.0)$ を表している。第二の線は $u = 0.05$ と $u = -0.1$ に非常に細い針のような突起を持つ線で、これは $\varphi_1^{(7)}(u, 0.1)$ を表している。第三の線は $u = 0.1$ と $u = -0.2$ にやや太い針のような突起を持つ線で、これは $\varphi_1^{(7)}(u, 0.2)$ を表している。いずれも $-0.5 \leq u \leq 0.5$ の範囲で関数を表示したものである。 $v = 0.0 \rightarrow 0.1 \rightarrow 0.2$ と変化するにつれて、発散領域が急速に太くなる様子が見てとれる。

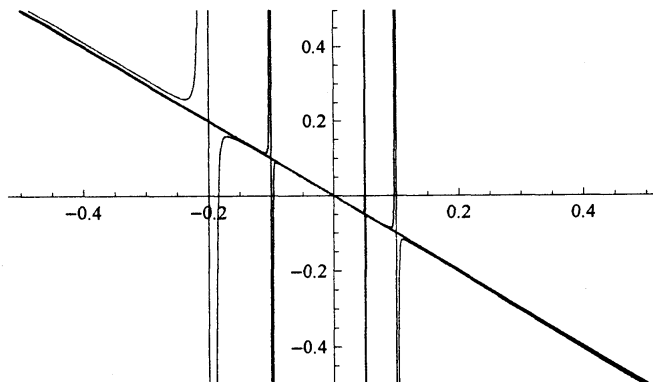


Fig. 1a

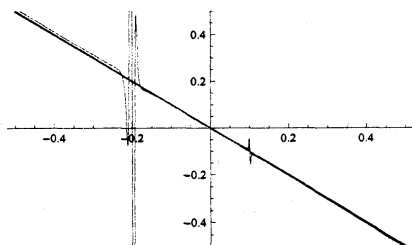


Fig. 1b

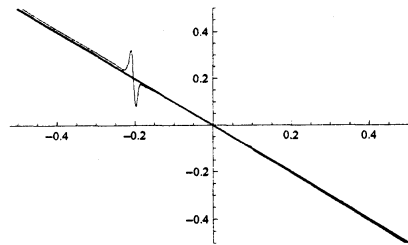


Fig. 1c

図 1b には同様に $\varphi_1^{(7)}(u, 0.0+0.01i)$, $\varphi_1^{(7)}(u, 0.1+0.01i)$, $\varphi_1^{(7)}(u, 0.2+0.01i)$ の実部を示した。針のような突起は $\varphi_1^{(7)}(u, 0.2+0.01i)$ にのみ現れている。図 1c には同様に $\varphi_1^{(7)}(u, 0.0+0.02i)$, $\varphi_1^{(7)}(u, 0.1+0.02i)$,

$\varphi_1^{(7)}(u, 0.2+0.02i)$ の実部を示した。突起は $\varphi_1^{(7)}(u, 0.2+0.02i)$ の $u = -0.2$ にのみごく小さく現れている。図 1b と 図 1c を見比べると、展開点から 0.01 離れるだけで発散領域が急速に太くなることが分かる。◇

4 Hensel 級数の多価性について

本章では、第 1 章に述べた性質 7 を理論的に導く。

4.1 有理的および代数的 Hensel 級数

(2.12) の $G_1^{(k)}(x, u, t)$ より、Hensel 級数 $\varphi_1^{(\infty)}(u, 1)$ の代数的性質は $\alpha_1(u)$ と同じであることがわかる。そこで、Hensel 級数を次のように分類する。

定義 2 $\alpha_1(u) \in \mathbb{C}[u]$ のとき Hensel 級数 $\varphi_1^{(\infty)}(u, 1)$ は**有理的**といい、そうでないとき**代数的**という。◇

$\varphi_1^{(\infty)}(u, 1)$ が代数的なら α_1 は代数関数なので、 α_1 は (2.3) の $G_1(x, u)$ の根であるとする。 $\deg_x(G_1) = m \geq 2$ とし、 $G_1(x, u)$ の根を $\alpha_{1,1}(=\alpha_1), \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,m}$ とし、 $\alpha_{1,i}$ ($1 \leq i \leq m$) に対応する級数を $\varphi_{1,i}^{(\infty)}$ とする。次の補題は [SK99] で証明されたが、(2.12) の $G_1^{(k)}(x, u, t)$ から直ちに証明できる。

補題 3 (Sasaki-Kako 1993) 代数的 Hensel 級数 $\varphi_{1,1}^{(\infty)}, \varphi_{1,2}^{(\infty)}, \dots, \varphi_{1,m}^{(\infty)}$ は互いに共役で、したがって $\varphi_1^{(k)}(u, 1)$ は m 価である。◇

4.2 Hensel 級数の多価性

我々は Hensel 級数の収束領域を表す公式を導出していないが、本稿では収束領域は明確に定まるものと仮定する。今の場合 $\ell \geq 2$ なので、通常、連続した特異点の集合は線となるか ($\ell = 2$)、面となるか ($\ell = 3$)、あるいは $(\ell-1)$ 次元の超平面となる。簡単のため、本稿ではまとめてこれらを**特異線**と呼ぶことにする。なお、孤立特異点は考えない。

P_0 と P_1 は $\mathbb{C}^\ell$ 内の 2 点で、どちらも Hensel 級数 $\varphi_1^{(\infty)}(u, 1)$ の収束領域内かつ展開点の近傍にあるとする。 C_0 と C_1 は $\mathbb{C}^\ell$ 内の経路で、 C_0 は P_0 を出発し一つの特異線を一周して P_0 に帰り、 C_1 は P_0 を出発し特異線を回ることなく P_1 に至るとする。

定理 5 代数的な打ち切り Hensel 級数 $\varphi_1^{(k)}(u, 1)$ ($k \geq 1$) を C_0 に沿って一周すると、 P_0 に帰ったとき、級数は一つの枝から共役な別の枝に移っている。

証明 補題 3 から明白。◇

定理 6 打ち切り Hensel 級数 $\varphi_1^{(k)}(u, 1)$ を C_1 に沿って追跡するとき、級数が有理的であれ代数的であれ、また経路が発散領域を通過しようがしまいが、 P_1 に到達したときは元の級数のままである。

証明 定理 2 と 4 より、展開点の微小近傍では発散領域は放射状に展開点から広がり、しかも展開点近傍の領域の大部分が収束領域である。したがって、経路 C_1 を発散領域を通らないように移動できる。すると、 P_0 から P_1 に移動するとき、 $\varphi_1^{(k)}(u, 1)$ の値は連続的に変わることになるから、定理が成立する。◇

系 2 Hensel 級数 $\varphi_1^{(\infty)}(u, 1)$ は元の代数関数の一つの枝 $\phi_1(u)$ に対応するとする。経路 C_1 が発散領域を通過するとき、 $\varphi_1^{(k)}(u, 1)$ を C_1 に沿って追跡するなら、発散領域を通過したあと級数は別の枝 $\phi_j(u)$ ($j \neq 1$) に飛び移ることがある (大部分の場合、飛び移る)。

証明 定理 3 より、展開点近傍では $\alpha_1(u) - \alpha_j(u)$ ($2 \leq j \leq n$) の零点近傍で代数関数の二つの枝が交わるか接することがわかる。 α_1 と α_j が交差する場合、 C_1 にそって級数を追跡すれば、 C_1 が発散領域を通過するため、級数は元の枝にとどまることができず、別の枝に移るしかない。二つの枝が接する場合は稀であり、大部分の場合は別の枝に飛び移ることになる。 ◇

$m < n$ の場合、Hensel 級数は m 価であるが元の代数関数は n 価なので、Hensel 級数と元の代数関数の多価性に矛盾が生じるように思えるが、系 2 の性質により矛盾は生じないのであろう。

例 2 発散領域を通過するとき、Hensel 級数が枝を飛び移る様子を例 1 の多項式でみる。

まず、三つの Hensel 級数は有理的である（したがって 1 価である）ことに注意しよう。経路 $C_1: (u, v) = 0.5 \times (\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に沿って、Hensel 級数 $\varphi_1^{(8)}(u, v)$ と元の代数関数の三つの枝 $\phi_i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$) を追跡してみよう。 C_1 は閉経路であるが、特異線を回ることせず、 $\theta = \pi/3, 3\pi/4, 4\pi/3, 7\pi/4$ 付近で発散領域を横切る。

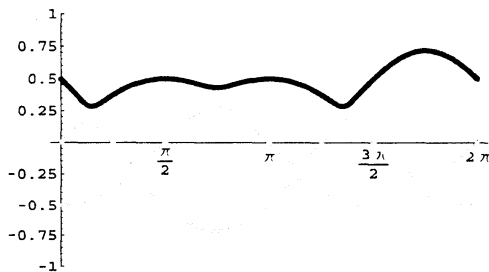


Fig. 2a

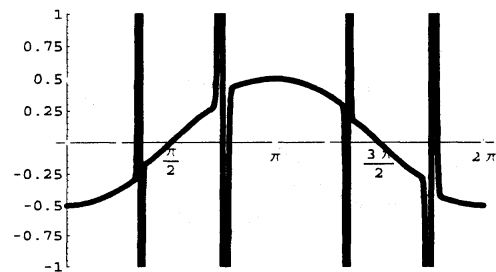


Fig. 2b

図 2a は、 C_1 上での $\phi_i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$) の実部を表す（虚部はほとんど 0 である）。三つの曲線は離れていることに注意：上、中、下がそれぞれ $\phi_3(u, v)$, $\phi_2(u, v)$, $\phi_1(u, v)$ を表す。図 2b は、 C_1 に沿って追跡した $\varphi_1^{(8)}(u, v)$ を表す。比較のため、 $\phi_i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$) を灰色線で示した。図から、Hensel 級数が発散領域を通過するたび、級数は代数関数の一つの枝から別の枝へと飛び移る様子がよくわかる。 ◇

5 おわりに

Hensel 級数の具体例については文献 [SI08a], [SI08b], [SI09] 等を参照されたい。具体例をみると、多変数の場合、従来の展開では項がバラバラに現れるのに対して、Hensel 級数では項がまとまって現れ、しかも人間が行う展開に非常に近い級数が得られることがわかる。そのため、応用面で使えそうだと実感できる。理論的にみれば、Hensel 級数が (2.12) の形でコンパクトに表現できたことは驚異的であると言えよう。

この表現があったからこそ、従来は解明が非常に難しかった多変数級数の性質が簡単に導出できるようになったのである。特に、収束領域を表す公式については多変数 Taylor 級数に対してすら教科書に見あたらない。しかし、我々は収束領域公式の導出にあと一步のところまで迫っている ([SI08c] を参照)。

これまでの研究により Hensel 級数の性質はかなり分かってきた。多変数 Hensel 級数の応用として、従来は厳密計算への応用を主に考えてきた [SI00, Iwa03, Iwa04, Ina05]。今後は、Hensel 級数の数値計算あるいは数値数式融合計算への応用の道を探っていきたい。特に、**特異点周りの数値解析**の開拓にチャレンジしていきたい。

参 考 文 献

- [Ina05] D. Inaba. Factorization of multivariate polynomials by extended Hensel construction. *ACM SIGSAM Bulletin*, 39:142–154, 1995.
- [IS04] D. Inaba and T. Sasaki. Certification of analytic continuation of algebraic function. *Proc. CASC 2004 (Computer Algebra in Scientific Computing)*, V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov (Eds.), Technische Universität München Press, pp. 249–260, 2004.
- [IS07] D. Inaba and T. Sasaki. A numerical study of extended Hensel series. *Proc. SNC'07 (Symbolic Numeric Computation)*, J. Verschede and S.T. Watt (Eds.), ACM, pp. 103–109, 2007.
- [Iwa03] M. Iwami. Analytic factorization of the multivariate polynomial. *Proc. CASC 2003 (Computer Algebra in Scientific Computing)*, V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov (Eds.), Technische Universität München Press, pp. 213–225, 2003.
- [Iwa04] M. Iwami. Extension of expansion base algorithm to multivariate analytic factorization. *Proc. CASC 2004 (Computer Algebra in Scientific Computing)*, V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov (Eds.), Technische Universität München Press, pp. 269–282, 2004.
- [McD95] J. McDonald. Fiber polytopes and fractional power series. *J. Pure Appl. Algebra*, 104:213–233, 1995.
- [SI00] T. Sasaki and D. Inaba. Hensel construction of $F(x, u_1, \dots, u_\ell)$, $\ell \geq 2$, at a singular point and its applications. *ACM SIGSAM Bulletin*, 34:9–17, 2000.
- [SI08a] T. Sasaki and D. Inaba. On series expansion of multivariate algebraic functions by extended Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba (18 pages), 2008. (submitted)
- [SI08b] T. Sasaki and D. Inaba. Multivariate Hensel construction in roots. Preprint of Univ. Tsukuba (16 pages), 2008. (submitted)
- [SI08c] T. Sasaki and D. Inaba. Convergence domain of series expansions of multivariate algebraic functions (ISSAC 2008 Poster). *ACM Commun. Comp. Alg.*, 42:127–128. 2008.
- [SI09] T. Sasaki and D. Inaba. Convergence and many-valuedness of Hensel series near the expansion point. Preprint of Univ. Tsukuba (14 pages), April 2009.
- [SK93] T. Sasaki and F. Kako. Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba, March, 1993.
- [SK99] T. Sasaki and F. Kako. Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 16:257–285, 1999.
- [SS96] K. Shiihara and T. Sasaki. Analytic continuation and Riemann surface determination of algebraic functions by computer. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 13:107–116, 1996.