

A variational representation for G -Brownian functionals

東北大学・大学院理学研究科 大須賀 恵実

Emi Osuka

Mathematical Institute,

Tohoku University

(e-mail: sa9m06@math.tohoku.ac.jp)

S. Peng により導入された G -Brown 運動について考察する. G -Brown 運動は, 分散に不確定性をもつ Brown 運動の概念を定式化したものである. 通常の Brown 運動が確率空間上で定義されるのに対し, G -Brown 運動は劣線形期待値空間 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$, すなわち, 劣線形性: 任意の $X, Y \in \mathcal{H}$ と $\lambda \geq 0$ に対し,

$$\mathbb{E}[X + Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y], \quad \mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$$

をもつ空間上に定義される. ここに, Ω は与えられた集合, $\mathcal{H}$ は Ω 上で定義された実数値汎関数から成る vector lattice で, 劣線形期待値 $\mathbb{E}$ の定義域である.

Ω を $[0, 1]$ 上の $\mathbb{R}^d$ -値連続関数 ω で $\omega_0 = 0$ なるもの全体とする. S. Peng [4, 5] は Wiener と類似の方法によって, Ω の標準過程 B を G -Brown 運動とする劣線形期待値空間として G -期待値空間を構成した. その構成の方法は以下のようなものである: 有界 Lipschitz 関数による B の柱状汎関数全体を $C_{b,Lip}(\Omega)$ とおく. まず, $[0, 1] \times \mathbb{R}^d$ 上の非線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sup_{\gamma \in \Theta} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} [\gamma \gamma^* D^2 u] \right\} = 0 \quad (1)$$

の粘性解を用いて整合的な有限次元劣線形分布の族を $C_{b,Lip}(\Omega)$ の上に構成し, 非線形 Kolmogorov の定理により $(\Omega, C_{b,Lip}(\Omega))$ 上の一意な劣線形期待値 $\mathbb{E}$ を得る. そして $\mathcal{L}_G^1(\Omega)$ をノルム $\mathbb{E}[\|\cdot\|]$ の下での $C_{b,Lip}(\Omega)$ の完備化とし, $\mathbb{E}$ を $\mathcal{L}_G^1(\Omega)$ 上の劣線形期待値へと拡張する. これにより得られる三組 $(\Omega, \mathcal{L}_G^1(\Omega), \mathbb{E})$ が G -期待値空間である. ここに, Θ は実 $d \times d$ 行列の与えられた空でない有界閉集合で, G -Brown 運動のもつ分散の不確定性を表すものである. また, γ^* は γ の転置行列, $D^2 u$ は u の Hessian を表す.

注意 1. 非線形熱方程式 (1) は

$$\sigma_0 := \inf_{\gamma \in \Theta} \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |x|=1}} x \cdot \gamma \gamma^* x > 0$$

のとき一意な古典解をもつ.

一般に, 劣線形期待値は線形な期待値の族の上限 (upper expectation) として表示できることが知られており, G -期待値 $\mathbb{E}$ に対してはその具体的な表示が与えられている: P を適当な可測空間上に定義された確率測度とし, $W = \{W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)^*; t \geq 0\}$ を P の下での標準 Brown 運動, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ を W から生成されるフィルトレーションとする. また, $[0, 1]$ 上の Θ -値 $\{\mathcal{F}_t\}$ -発展的可測過程全体を $\mathcal{A}_{0,1}^\Theta$ とおき, $\theta \in \mathcal{A}_{0,1}^\Theta$ に対し, Ω 上の確率測度 P_θ を次で定める.

$$P_\theta(A) := P\left(\int_0^\cdot \theta_s dW_s \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

ただし $\mathcal{B}(\Omega)$ は Ω の Borel 集合族を表す. このとき, 任意の $X \in \mathcal{L}_G^1(\Omega)$ に対し

$$\mathbb{E}[X] = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_{0,1}^\Theta} E_{P_\theta}[X] \quad (2)$$

が成り立つ (Denis-Hu-Peng [1]). upper expectation 表示 (2) に関連し, 容量

$$c(A) := \sup_{\theta \in \mathcal{A}_{0,1}^\Theta} P_\theta(A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega)$$

が定義される. 容量 c は通常確率解析における確率測度と同様の役割をはたす. 例として, Gao-Jiang [2] は容量の下で G -Brown 運動に対する大偏差原理を導出した.

[4, 5] において S. Peng はさらに, G -Brown 運動の 2 次変分の構成や, G -Brown 運動やその 2 次変分に関する確率積分の構成も行った. これらを用いて, G -Brown 運動の汎関数に対して以下のような変分表現が得られた: $\langle B \rangle = (\langle B^i, B^j \rangle)_{i,j=1}^d$ を G -Brown 運動の 2 次変分とし, $M_G^2(0, 1)$ を d -次元過程 $h = (h^1, \dots, h^d)^*$ の族で, 確率積分

$$\begin{aligned} \int_0^t d\langle B \rangle_s h_s &:= \left(\sum_{i=1}^d \int_0^t h_s^i d\langle B^1, B^i \rangle_s, \dots, \sum_{i=1}^d \int_0^t h_s^i d\langle B^d, B^i \rangle_s \right)^*, \\ \int_0^t h_s \cdot (d\langle B \rangle_s h_s) &:= \sum_{i,j=1}^d \int_0^t h_s^i h_s^j d\langle B^i, B^j \rangle_s, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

が well-defined となるもの全体とする. また, $c(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{B}(\Omega)$ を極と呼び, 主張がある極集合の外側で成り立つことを quasi-sure (q.s.) に成り立つという. 以下, $\sigma_0 > 0$ と仮定する.

定理 2 (O. [3]). 任意の q.s. に有界な $f \in \mathcal{L}_G^1(\Omega)$ に対し,

$$\log \mathbb{E} \left[e^{f(B)} \right] = \sup_{h \in M_G^2(0,1)} \mathbb{E} \left[f \left(B + \int_0^\cdot d\langle B \rangle_s h_s \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 h_s \cdot (d\langle B \rangle_s h_s) \right]$$

が成り立つ.

この変分表現のモチベーションの 1 つに, G -Brown 運動に対する大偏差原理がある. G -期待値空間の枠組みにおいては, 大偏差原理は次のように定式化される: $\mathcal{X}$ をポーランド空間, $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ の Borel 集合族とし, $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を $\mathcal{X}$ -値確率変数の族とする. $I: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ を速度関数, すなわち, 各 $M \geq 0$ に対し level set $\{x \in \mathcal{X} : I(x) \leq M\} \subset \mathcal{X}$ はコンパクトとする. 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ に対し

$$-\inf_{x \in A^\circ} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log c(X^\varepsilon \in A) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log c(X^\varepsilon \in A) \leq -\inf_{x \in \bar{A}} I(x) \quad (3)$$

が成り立つとき, $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は速度関数を I として $\mathcal{X}$ 上で大偏差原理をみたすという. ただし, A° と $\bar{A}$ はそれぞれ A の内部と閉包を表す. 通常確率解析における場合と同様に, G -期待値空間の枠組みにおいても, 大偏差原理と Laplace 原理は同値であることがいえる. すなわち, $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が大偏差原理 (3) をみたすための必要十分条件は, 任意の有界連続関数 $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{\Phi(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right] = \sup_{x \in \mathcal{X}} \{\Phi(x) - I(x)\}$$

が成り立つことである. 確率変数の族 $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が G -Brown 運動の汎関数で表されているとき, Laplace 原理の導出に対して定理 2 を応用することができる. 例えば以下の Laplace 原理を導出することができる: $C([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ (resp. $C([0, 1]; \mathbb{R}^{d \times d})$) を $[0, 1]$ 上の $\mathbb{R}^d$ -値 (resp. $\mathbb{R}^{d \times d}$ -値) 連続関数で時刻 0 における値が 0 なるもの全体とする. ただし $\mathbb{R}^{d \times d}$ は実 $d \times d$ 行列全体を表す. また,

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &:= \left\{ x \in C([0, 1]; \mathbb{R}^d) \mid x \text{ は絶対連続, かつ } \int_0^1 |\dot{x}(t)|^2 dt < \infty \right\}, \\ \mathbb{A} &:= \left\{ y \in C([0, 1]; \mathbb{R}^{d \times d}) \mid \begin{array}{l} y \text{ は絶対連続,} \\ \text{かつ a.e. } t \in [0, 1] \text{ に対し } \dot{y}(t) \in \{\gamma\gamma^* \mid \gamma \in \Theta\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

とおく. ただし $\dot{x}$, $\dot{y}$ は, それぞれ導関数 dx/dt , dy/dt を表す. 速度関数 $I: C([0, 1]; \mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ と $J: C([0, 1]; \mathbb{R}^d) \times C([0, 1]; \mathbb{R}^{d \times d}) \rightarrow [0, \infty]$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} I(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \inf_{\gamma \in \Theta} |\gamma^{-1} \dot{x}(t)|^2 dt, & x \in \mathbb{H}, \\ +\infty, & x \notin \mathbb{H}, \end{cases} \\ J(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}(t) \cdot (\dot{y}^{-1}(t) \dot{x}(t)) dt, & (x, y) \in \mathbb{H} \times \mathbb{A}, \\ +\infty, & (x, y) \notin \mathbb{H} \times \mathbb{A}. \end{cases} \end{aligned}$$

命題 3. $\{\sqrt{\varepsilon}B\}_{\varepsilon>0}$ は, 速度関数を I として $C([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ 上で Laplace 原理をみたす. また, $\{(\sqrt{\varepsilon}B, \langle B \rangle)\}_{\varepsilon>0}$ は速度関数を J として $C([0, 1]; \mathbb{R}^d) \times C([0, 1]; \mathbb{R}^{d \times d})$ 上で Laplace 原理をみたす.

命題 3 を通じて $\{\sqrt{\varepsilon}B\}_{\varepsilon>0}$, $\{(\sqrt{\varepsilon}B, \langle B \rangle)\}_{\varepsilon>0}$ に対する大偏差原理が得られる. これらの族に対する大偏差原理は, オリジナルには Gao-Jiang [2] によって離散近似の手法を用いて与えられた. 定理 2 は彼らの結果の別証明を与える.

参考文献

- [1] L. Denis, M. Hu and S. Peng: Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G -Brownian motion paths. *Potential Anal.* 34, 139–161 (2011)
- [2] F. Gao and H. Jiang: Large deviations for stochastic differential equations driven by G -Brownian motion. *Stochastic Process. Appl.* 120, 2212–2240 (2010)
- [3] E. Osuka: A variational representation for G -Brownian functionals. arXiv:1204.4077v3 [math.PR] 2 Dec 2012.
- [4] S. Peng: G -expectation, G -Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type. *Stoch. Anal. Appl., Abel Symp.* 2, 541–567, Springer, Berlin (2007)
- [5] S. Peng: Multi-dimensional G -Brownian motion and related stochastic calculus under G -expectation. *Stochastic Process. Appl.* 118, 2223–2253 (2008)