

特異 $K3$ 曲面に対する同種概念について

東大 理 猪瀬博司

§ 序

1971 年 Pjateckiĭ - Sapiro - Šafarevič [1] は、偏極複素代数的 $K3$ 曲面の Torelli 型定理の単射性の部分を証明した。この論文を予告した Nice の国際会議で、Šafarevič は period の言葉を使って、 $K3$ 曲面に、アーベル多様体と同様に、同種 (isogeny) の概念を導入する事を提案している。しかし残念ながら本論文 [1] には、この事が全くふれられなかった。同種概念を実質的なものにするためには、何らかの形の存在定理が必要であった。以下、我々は、Picard 数の一番大きい $K3$ 曲面 (特異 $K3$ 曲面という。i.e. $\rho(X)=20$) について、同種概念を自然な仕方で導入するが、その本質的な点は、特異 $K3$ 曲面の間の有理写像が、アーベル曲面を通じて、ある程度構成できる所にある。

(定義) 特異 K3 曲面 X, Y が同種とは、有限次数の有理写像 $f: X \rightarrow Y$ が、すくなくとも 1 つ存在することを見る。 (以下、有理写像は、みな有限次数とする)

これについて、次の自明ではない定理が成り立つ。

(定理 1) 同種の性質は、 X と Y について対称である。すなわち “ $\exists f: X \rightarrow Y$ ” $\iff$ “ $\exists g: Y \rightarrow X$ ” が成り立つ。

また、この定理の系として 同種の類も 次の形に特徴付ける事ができる。

(定理 2) 特異 K3 曲面 X, Y について、次の 3 つは同値。

- i) X と Y は同種
- ii) 楕円曲線として、 $H^2(X, \mathcal{O})/j^* H^2(X, \mathbb{Z})$ と $H^2(Y, \mathcal{O})/j^* H^2(Y, \mathbb{Z})$ は同種
- iii) 虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-\det T_X})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{-\det T_Y})$ が一致する。

但し、 T_X は、 $H_2(X, \mathbb{Z})$ に於ける、代数的サイクルのつくる部分群の、交叉数に関する、直交補空間で、 $\det$ は、その交叉行列の行列式とする。

§ 1 特異 K3 曲面と Kummer 曲面の基本的な関係.

定理 / を証明するために、次の基本的な命題を用いる。

(命題 ☆) 任意の特異 K3 曲面 X に対して、Kummer 曲面 Y_1, Y_2 と、これらの間の有理写像 $X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{f_2} Y_2$ が存在する。

f_2 の存在証明は、今の所、“ Γ の計算”によるものと“純幾何的”によるものとの 2通りがある。前者は、T. Shioda and H. Imose [2] に 後者は H. Imose [3] にある。(ここで得られる f_2 は実質的に同じものだが、証明の方向が逆になっている。) ここでは我々は、 f_1 の方のつくり方のみ述べよう。

(補題 1) 任意の ^(特異) K3 曲面は、次のような楕円曲面として表現される。

- i) base curve は、非特異有理曲線 P^1 。
- ii) global section をもつ。
- iii) すくなくとも 2 つ、 II^* 型 (K. Kodaira [6] 参照) の特異ファイバーをもつ。

(証明の概略) $K3$ 曲面の 2nd ホモロジー群は、交叉数に関して、 $E_2 \oplus E_2 \oplus E_2 \oplus \sqrt{8} \oplus \sqrt{8}$ のラティスに同型になる。(但し E_2 は $\text{index}(1,1)$ のユニモジュラーラティス、 $\sqrt{8}$ は $\text{index}(0,8)$ のユニモジュラーラティスである。) [1] で使われたように、任意の階数 2 のラティスは、(up to isometry で) - 意的に、上のラティスの中に埋め込まれる。特に、 X が特異 $K3$ 曲面の時、 T_X の階数は 2 だから、これが適用でき、 T_X は、上の表示の最初の $E_2 \oplus E_2$ の中に埋め込まれていると考えて良い。よって T_X の直交補空間 i.e. 代数的サイクルのつくるラティスは、 $E_2 \oplus \sqrt{8} \oplus \sqrt{8}$ を含んでいる。 $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と行列で書けば、この第 1 元は、適当な reflections (isometry で T_X を不変にする...詳しくは [1] を見よ) の後 elliptic fibering の general fiber として表現される。あとは、2 つの $\sqrt{8}$ が、この pencil の 2 つの Π^* -特異ファイバーを与える事、及び E_2 の形から、global section のある事が簡単に示される。

(補題 2) $K3$ 曲面 X が、補題 1 に述べた形の楕円曲面として表現される時、その函数不変量は、base curve の座標を適当にとる時、次の形に表わされる。

$$J(\tau) = \frac{-c^2 \tau^2}{(\tau - \alpha)(\tau - \alpha^{-1})(\tau - \beta)(\tau - \beta^{-1})},$$

但し、 α, β は 0 と異なる複素数で、 $c = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} - \frac{\beta + \bar{\beta}}{2}$ である。

$\alpha = \beta$ には $J(\tau) \equiv 0$ が対応していると考える。 α と β の値によって実際の特異ファイバーの形が、次の (i) ずれかになる。

i) $I_1 \times 4$ ii) $II \times 2$ iii) $I_2, I_1 \times 2$ iv) $I_2 \times 2$ v) IV .

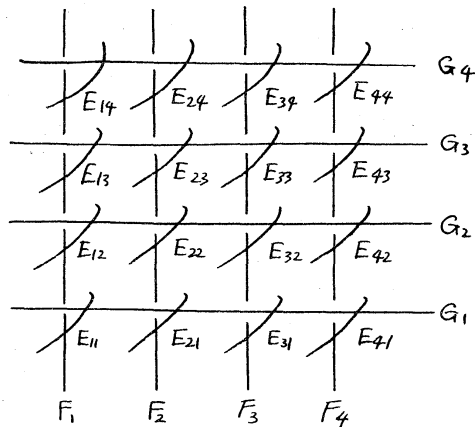
(これらに 2 つの II^* が加わる)。

(証明) 2 つの II^* は函数不変量 J の 2 位以上の零点に対応するか、 $J \equiv 0$ が次数 4 以上、ところが前者は Euler 数の計算から ii) と v) しかあり得ない事がすぐにわかる。また後者も同様にして、 II^* 以外の特異ファイバーが I_{b_j} ($\sum b_j = 4$) となる事がわかる。III, III^* 型のものが出て来ない事から、 $J(\tau) - 1$ の零点がすべて偶数位の零点でないといけない。この事から簡単な計算で補題の主張する形がでる。

(補題 3) $A = E_1 \times E_2$ を直積型のアーベル曲面、 $K_m A$ を、 A の inversion ($A: x \mapsto -x$ による商空間の非特異極小モデルとする。この時、 $K_m A$ 上に involution ι があって、この ι による商空間の非特異極小モデルは、補題 1 に述べた形の楕円曲面として表わされる K3 曲面になる。

(証明) 定義から $K_m A$ には、次の図のような、非特異

有理曲線たちをもつ事がわかる。各 E_{jk} は A の 2 分点の



像. F_j, G_k は $\{2\text{分点}\} \times E_2$,

$E_1 \times \{2\text{分点}\}$ の像である。ここで、

因子 $3F_4 + 2E_{41} + 2E_{42} + 2E_{43} + G_1 + G_2 + G_3$

及び $3G_4 + 2E_{14} + 2E_{24} + 2E_{34} + F_1 + F_2 + F_3$

を考える。[1] §3 Theorem 1 によ

れば、この 2 つの因子を特異ファイ

バーにもつ $K_m A$ 上の elliptic pencil が存在する。この pencil

は global section をもつ (e.g. E_{11}) から、base curve の函数

体上の elliptic curve と考える事ができ、この意味での involution

automorphism を ι_1 とおく。一方、 A 上の involution $(u, v) \mapsto$

$(-u, v)$ が $K_m(A)$ 上に induce する involution を ι_2 とお

く。 $\iota = \iota_1 \circ \iota_2$ と定義すれば、 ι が、上の elliptic pencil

の、2 つの IV^* fiber を固定し、商空間に移った時、これが

2 つの II^* を与える事、 $K3$ 曲面になる事等、容易に check で

きる。

(補題 4) 補題 1 に述べた形の楕円曲面は、補題 3 のやり方ですべて得られる。

(証明) 補題 2 に述べた、函数不変量、ホモロジカル不

変量 (これは特異ファイバーの形で決まる) をもつ楕円曲面を、補題3のやり方でつくってやれば良い。そのために、補題3の状況をもう少し精密にみる必要がある。楕円曲線 E_1, E_2 を次の式で定義されているものとする。

$$E_j : u_j^2 = u_j(u_j - 1)(u_j - \lambda_j) \quad (j=1, 2).$$

この時、 $K_m A$ は 次の式で定義される4次曲面の 極小非特異モデルである事が、計算によってわかる。

$$\bar{Y} : z^2 xy - (x-w)(x-\lambda_1 w)(y-w)(y-\lambda_2 w) = 0$$

$K_m A$ 上で 有理函数

$$\Phi = \frac{zx}{(y-w)(y-\lambda_2 w)} = \frac{(x-w)(x-\lambda_1 w)}{zy}$$

を考えれば、この函数が、補題3の elliptic pencil を与えるものである事が (elementary だが すごい長い) 計算によって確かめられる。その singular fibers は $\Phi = t$ とおいて、 w で非斉次化して、 $\mathbb{P}^3$ 内の 2-2 支叉

$$\begin{cases} zx = t(y-1)(y-\lambda_2) \\ zy = \frac{1}{t}(x-1)(x-\lambda_1) \end{cases} \quad -\infty < t < \infty$$

を調べる事により明らかになる。実際 この Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} z & -t(2y-(1+\lambda_2)) & x \\ -\frac{1}{t}(2x-(1+\lambda_1)) & z & y \end{pmatrix}$$

の退化する点は

$$t^2 = \frac{(\lambda_1+1)(\lambda_1-2)(2\lambda_1-1) + 2(\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1)\sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1}}{(\lambda_2+1)(\lambda_2-2)(2\lambda_2-1) + 2(\lambda_2^2 - \lambda_2 + 1)\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_2 + 1}}$$

と与えられる。 $\sqrt{\frac{\lambda_2(\lambda_2-1)}{\lambda_1(\lambda_1-1)}}$ を乗じ、楕円曲線の解析的不変量

$$j_k = \frac{4(\lambda_k^2 - \lambda_k + 1)^3}{27\lambda_k^2(\lambda_k - 1)^2}, \quad k=1,2.$$

をつか、と整理すると

$$t = \sqrt{(\sqrt{j_1-1} + \sqrt{j_1})(\sqrt{j_2-1} + \sqrt{j_2})}.$$

となる。(平方根のとり方は全く自由ではない。例えば、 $\sqrt{j_1-1}$ と $\sqrt{j_2-1}$ の2つは平方根を固定して以下考える。(その座標のとり替で、どう固定しても結果は同じ) たかす上の式の平方根は、 $\sqrt{j_1}, \sqrt{j_2}$ 及び一番外側の $\sqrt{\quad}$ の 2^3 個選択の自由があり、一般には、 $0, \infty$ を除けば、特異ファイバーは8個でてくる。)

さて、補題2で得られた、楕円曲面を決める定数 α, β に対して、

$$j_1 = -\frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}, \quad j_2 = -\frac{(1-\alpha\beta)^2}{4\alpha\beta}$$

として、この不変量から決まる、楕円曲面の特異ファイバーの位置を、 $(Km A/c)$ に於ては、elliptic fibering が $\Phi^2 = t^2$ で与えられる事に注意して計算すれば、丁度、求める定数 α, β に対応するものが得られる事がわかる。(特異ファイバーの形もすぐ check できる)

補題 1 と補題 4 とを合わせれば、最初に述べた 命題★ の $f: X \rightarrow Y$ の存在が言えた事になる。

§ 2 証明 (有理写像と T_X の関係)

前節の結果をつかって、定理 1, 2 を証明する。次の一般に成り立つ命題を用いる。

(命題) $f: X \rightarrow Y$ を $K3$ 曲面間の ^{次数 n の}有理写像とする時、自然な準同型 $f_*: T_X \rightarrow T_Y$, $f^*: T_Y \rightarrow T_X$ が定義され (T_X の定義は p.2 参照) 次の満たす。

- 1) $(f^*t, f^*u) = n(t, u), \quad \forall t, u \in T_Y,$
- 2) $f_*f^*t = nt, \quad \forall t \in T_Y,$
- 3) $(f_*t, f_*u) = n(t, u), \quad \forall t, u \in T_X,$
- 4) $f^*f_*t = nt \quad \forall t \in T_X.$

(証明) 定義より T_X は、あるゆる分岐曲線と交わるぬようにとれる。したがって T_X, T_Y に関する限り 有理写像 f は、被覆写像のようにふるまう。 f^*, f_* の定義はこれから、自然に定義され、性質 1), 2) が容易にみられる。4) を証明しよう。 $\omega_X = f^*\omega_Y$ を 非零正則 2 型式とし、 $f^*f_*t - nt$

上でそれを積分する。

$$\int_{f^*f_*t-nt} \omega_X = \int_{f^*f_*t-nt} f^*\omega_Y = \int_{f_*f^*f_*t-f_*nt} \omega_Y = \int_{nf_*t-mf_*t} \omega_Y = 0$$

これから $f^*f_*t - nt$ が代数的サイクルであるとわかる。

ところが明らかに $f^*f_*t - nt \in T_X$ だから、 T_X の定義より

$$f^*f_*t = nt$$

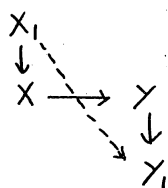
$$\begin{aligned} \text{となる。} \quad (f_*t, f_*u) &= \frac{1}{n} (f^*f_*t, f^*f_*t) = \frac{1}{n} (nt, nu) \\ &= n(t, u) \end{aligned}$$

より 3) も言えた。

この命題よりさらに。

(系) $K3$ 曲面 X, Y 間に、有限次数の有理写像 $f: X \rightarrow Y$ があれば、 X と Y の Picard 数は一致する。

(定理の証明) X, Y を特異 $K3$ 曲面、 $f: X \rightarrow Y$ を有理写像とする。 $f_1: X_1 \rightarrow X$, $f_2: Y \rightarrow Y_1$ なる Kummer 曲面 X_1, Y_1 を命題★によってとれば、これは Picard 数 20 の曲面になる。



有理写像 $f_2 \circ f \circ f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ に対して定理1が与えれば
 $\exists h : Y_1 \rightarrow X_1$ で、これから $f_1 \circ h \circ f_2 : Y \rightarrow X$ がつくれるから。
 最初から X, Y を Picard 数 20 の Kummer 曲面として証明すれば良い。
 X, Y に対応する特異アーベル曲面を A, B とすれば
 $f : Km(A) \rightarrow Km(B)$ の存在から T_A, T_B の計算によって、
 A と B が同種である事がわかる。そこで逆向きの準同型
 $B \rightarrow A$ から Kummer 曲面間の有理写像 $Km(B) \rightarrow Km(A)$
 が導かれる。これが求める有理写像の1つを与える。定理2は
 アーベル曲面に関する同様の結果から、容易にしたがう。[cf. [4)]

(参照文献)

- [1] I. I. Pjateckiĭ-Sapiro and I. R. Šafarevič, "A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3." Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 35 (1971), p530~572
- [2] T. Shioda and H. Imose, "On singular K3 surfaces" (to appear)
- [3] H. Imose "A notion of isogeny for singular K3 surfaces" (to appear)
- [4] T. Shioda and N. Mitani, "Singular abelian surfaces and binary quadratic forms" in "Classification of algebraic varieties and Compact Complex manifold" edited by H. Popp, Lecture notes in Math. No. 412 Springer, 1974.
- [5] I. R. Šafarevič "Le Théorème de Torelli pour les surfaces algébrique de type K3" Actes. Congrès intern., 1970 Tome1, p413~417.
- [6] K. Kodaira, "On Compact analytic surfaces II, III" Ann. of Math., 77. 78