

スペクトルモード揺動分布とカオス性

成蹊大・工: 富谷光良 埼玉大・理: 吉永尚孝

古典力学系におけるカオス性・可積分性が、対応する量子力学系においてより良く忠実に反映する指標として、スペクトル階段関数から平均的挙動の周りの揺動がなす分布を調べることが提案されている^[1]。そのためには、スペクトル階段関数を $N(E) = \bar{N}(E) + N_f(E)$ のよう

に、その平均的挙動 $\bar{N}(E)$ とその周りの揺動 $N_f(E)$ とに分解することを考える。この平均的挙動の周りの揺動の度合いをみる指数として spectral rigidity

$$\Delta_3(L, E) = \left\langle \min_{(A, B)} \frac{\langle d(E) \rangle}{L} \int_{\frac{A}{2(d)}}^{\frac{B}{2(d)}} [N(E + \varepsilon) - (A + B\varepsilon)]^2 d\varepsilon \right\rangle$$

が、良く用いられる。これは、ビリヤード系の場合には L を十分大きくすると飽和値を持ち、

$$\Delta_\infty(E) = \left\langle \frac{\langle d(E) \rangle}{L} \int_{\frac{A}{2(d)}}^{\frac{B}{2(d)}} N_f(E + \varepsilon)^2 d\varepsilon \right\rangle$$
 と表すことができる。カオス的ビリヤード系では、こ

の飽和値で正規化したモード揺動 $W(E) = \frac{N_f(E)}{\sqrt{\Delta_\infty(E)}}$ は、ガウス分布することが期待される。こ

の性質は、数値的に双曲面ビリヤードにおいて発見され^[1]、またランダム行列理論においては、行列数が十分大きいときの漸近形として証明されている^[2]。一方、可積分系ではこの分布はエネルギーの十分大きい所では $\exp(-\alpha x^4)$ (α : 定数) となるとされている。低エネルギー側で

は、特徴的な歪度・尖度等をもった分布となり、はっきりガウス分布とは異なる^[3]。

スタジアムビリヤード内でシュレディンガー方程式をディリクレ境界条件のもとで数値的に解き、基底状態から 3173 個の固有関数を求めた^[4]。これらの固有関数が生成するスペクトル階段関数からそのまま得られるモード揺動の分布は、むしろ可積分系のものに近い(図 1)。

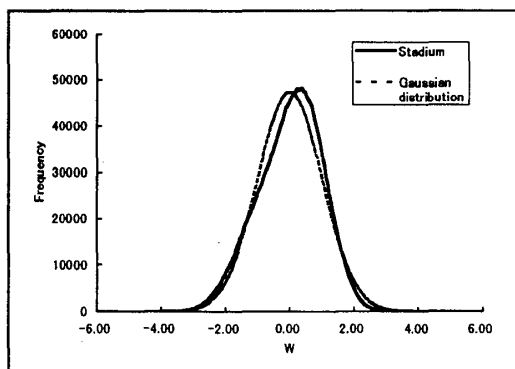
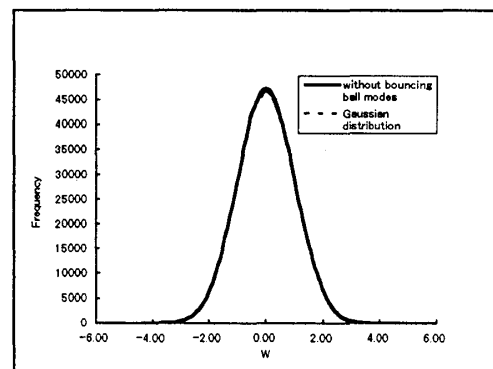


図1 スタジアムビリヤードにおけるモード揺動分布

図2 スタジアムビリヤードにおけるモード揺動分布
(bouncing ball mode の寄与を除いたもの)

そこで、モード揺動は周期軌道中の立場から、 $N_f(E) = N_f^{iso}(E) + N_f^{bb}(E)$ のように不安定孤立周期軌道の寄与 $N_f^{iso}(E)$ と、bouncing ball modes による $N_f^{bb}(E)$ とに分けることができる。半古典近似によって $N_f^{bb}(E)$ を評価して、その寄与を $N_f(E)$ から除くと、モード揺動の分布はガウス分布になることを確認した^[5](図2)。

さらにこの予想をハミルトニアンが $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + 3x^4 + y^4 - \lambda x^2 y^2$ となる非調和振動

子系において検証した。やはり spectral rigidity が飽和値をもつことは数値的に確認した。この系においては、一つのパラメータ値 λ を変えることで可積分系 ($\lambda = 0.0$) から、カオス系 ($\lambda = 2.7$: ポアンカレ断面を計算することで数値的に確認) まで連続的に転移させることができる。可積分系 ($\lambda = 0.0$) では4次ポテンシャルによる一次元可積分系の二重化となり、そのモード揺動分布は可積分系に特徴的な歪度をもったモード揺動分布となる(図3)。そして、カオス系 ($\lambda = 2.7$) では、歪度はほとんど無く、ガウス分布に近い分布となることが示される(図4)。また、可積分系とカオス系との中間的な系では、ポアンカレ断面は安定性の島とカオス領域が入り交じった状態であり、モード揺動分布は λ の値により様々な歪んだ形の分布となる。さらに、最近隣レベル間隔分布とも密接な関連のあることもわかった。

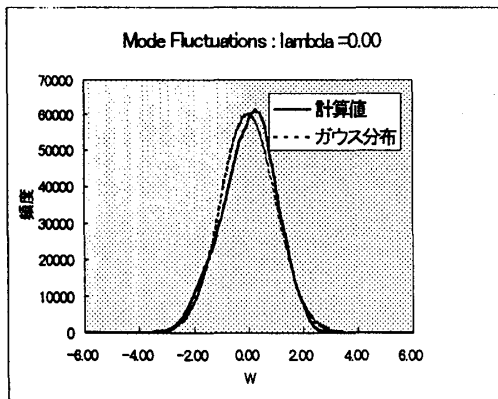


図3 モード動揺分布 ($\lambda = 0.0$)

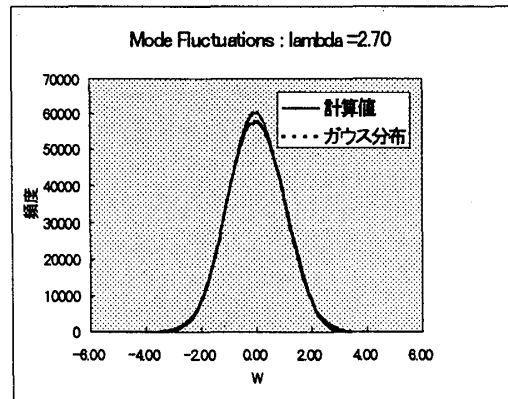


図4 モード動揺分布 ($\lambda = 2.7$)

参考文献

- [1] R. Aurich, J. Bolte, and F. Steiner, "Universal Signatures of Quantum Chaos", Phys. Rev. Lett. 73(1994)1356-1359; R. Aurich, J. Bolte, and F. Steiner, "Subtleties of Arithmetical Quantum Chaos", Phys. Rev. Lett. 73(1994)1356-1359
- [2] Ovidiu Costin and Joel L. Lebowitz, "Gaussian Fluctuation in Random Matrices", Phys. Rev. Lett. 75(1995)69-72
- [3] Pavel M. Bleher, Zhiming Cheng, Freedman J. Dyson, and Joel L. Lebowitz, "Distribution of the Error Term for the Number of Lattice Points Inside a shifted Circle.", Commun. Math. Phys. 154(1993) 433-469
- [4] M. Tomiya and N. Yoshinaga, "Scars in Nonintegrable and Rational Billiards", J. Stat. Phys., 83(1996)215-242
- [5] M. Tomiya and N. Yoshinaga, "Universal Signatures in the Mode Fluctuation Distribution of Chaotic Systems", J. Phys. Soc. Jpn. 66(1997)3318-3321