

空間境界が微小変形したパイプ内の 線形波動方程式に対する摂動法とその応用*

後藤振一郎 (Shin-itiro GOTO)

Physics Department, Lancaster University, Lancaster, LA1 4YB, UK.

概要

緩やかに曲がった空間境界を持つ有限なパイプ内での線形波動方程式の境界による影響を摂動法により調べた。特に本研究では空間境界条件としてディリクレ型の境界条件の場合を調べた。我々の曲がったパイプを記述する座標は与えられた曲率により中心軸が記述され、パイプ断面は円形と長方形を保った場合を扱った。まっすぐなパイプの場合を非摂動問題、パイプの曲がり具合を摂動パラメーターとして摂動法を用いた。この解析において、空間境界条件を厳密に満たす摂動展開を用い、波動方程式を無限個の空間モードに対応した無限個の常微分方程式に分解した。この際線形方程式にも関わらず、曲がった境界によって永年項が生成される可能性を示し、それがどのような条件のもとで生じるかを明示した。また永年項を特異摂動法により消去する際に振幅方程式を導出し、特別な場合に振幅方程式の解をあらわな形で書き下した。更に以上の波動方程式の解析の応用としてシュレーディンガー方程式についても解析例を示した。波動方程式の場合と同様の緩やかに曲がったパイプ内の系で、無限に高い井戸型ポテンシャルを有する一粒子非相対論的な量子系に対し、空間境界の曲がりによるエネルギー準位の変化について近似的に求めた。

1 導入

空間的に広がった系で観測される物理現象を理論的に理解する第一ステップとして、例えば周期境界条件や無限に広い空間のもとで系を考察することがよく行われる。空間的境界条件を簡単にすることで数学的な取扱いが簡単になるためである。実際の実験系においては非自明な空間的境界がある場合が殆どで、その場合系の境界条件を考慮して理論を構築する必要がある。空間的境界が効かない物理系も多いのも事実ではあるが、流体力学において例を見ることができるよう、空間的境界条件の差異が系の定性的振舞いを決定的に異なるものにする場合があることも忘れてはならない。理論側から、境界条件の違いがダイナミクスを如何に変化するかを知る系統的な理論的枠組みの構築が望まれるが、与えられた境界条件に対して各々対応する場合が殆どであり系統的では無い。これは数学的手法が未発達なのが一因である。また考察する境界内で生じる物理系にも強く依存する。単純な物理系と自明に近い境界条件から考察を始めるのがよいであろう。

我々は「単純な偏微分方程式で記述される場の方程式において空間的境界を緩やかに曲げた場合のダイナミクスの変化を見出す理論的枠組の構築」という目標を設定する。本講究録ではこのような手法の構築の手始めとして、以下のような具体的な問題を考える。空間境界条件として、円形と長方形の断面を保った中心軸 (z -軸) が弱く曲がったパイプ内 (図 1、断面が円形の場合) の線形波動方程式の境界による影響を考察する。境界条件はパイプ表面で振幅がゼロである問題を考える。線形波動方程式は様々な物理系から理論的に導出され、物理学における基礎的な方程式の一つである。それ故これまでに様々な数学的な解析が行われてきたが、それらの解析は単純な境界条件、例えば無限に長いまっすぐな (図 1 において中心軸の曲率 $\kappa(z)$ が常にゼロの場合) パイプ内で壁面で振幅がゼロ、においてのみである。また種々の非自明な現象を引き起こす非

*English title: "Perturbative analysis for linear equations in curved pipes." Essential results of this article have been reported in J. Phys. A:Math.Theor. **42**, 445205 (2009).

線形問題を敢えて考えないことにより、空間境界条件のみが生み出す現象を抽出することが期待できる。

空間的境界の連続的変化を系統的に取り扱うには微分幾何学の知識を援用するが自然で、また微小量が系に加わった場合は摂動法による解析が自然である。我々は以下のように解析を行う。まず弱く曲がったパイプ内を記述する計量を定め、一般化したラプラシアンを摂動展開の形で求め、波動方程式の正則摂動解を得る。その結果、モード結合による共鳴項が生じる場合があることが分かり、その場合の簡約化方程式（または振幅方程式）を特異摂動法により得たので報告する[1][2]。これらの結果から境界の影響によりダイナミクスがどう変化するかを定性的に述べたい。

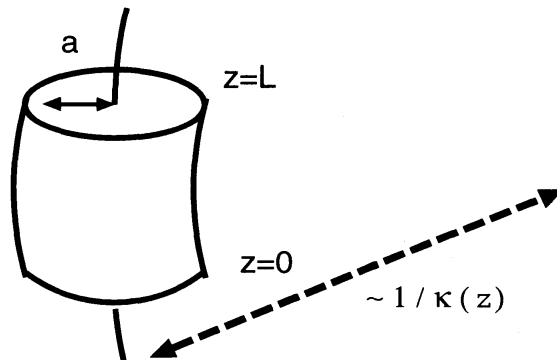


図 1: 円形断面をもつ曲がったパイプ

2 曲がったパイプの記述 [3]

まず我々の曲がった境界をもつパイプを記述する座標系の表示法を述べる。パイプの中心軸を z -座標にとり、それは平面曲線で記述されるものとする。対応して本研究では空間曲線がパイプの中心軸を記述される場合を考察しないものとする。従って我々の z -座標の振率は常にゼロである。一方曲率はその大きさが小さいものとし、まっすぐな中心軸が緩やかに曲がっている状況を考える。パイプの断面は常に真円か長方形である場合を考える（半径が a の円形断面の場合は図 1 のようになる）。

曲がったパイプ内での波動方程式を記述するため、特にラプラシアンを計算するために我々は次の計量を用いる

$$g = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3, \quad (1)$$

ここで $\{e^1, e^2, e^3\}$ は後ほど指定されるコフレームでパイプ内の領域を $\mathcal{U}$ と書く。また z を一定にして得られる 2 次元断面を $\mathcal{D}$ と書く。3 次元体積要素と 2 次元面積要素はそれぞれ

$$\#1 := e^1 \wedge e^2 \wedge e^3, \quad \hat{\#}1 := e^1 \wedge e^2,$$

であり、ホッジ写像 $\# : \Gamma\Lambda^q \mathcal{U} \rightarrow \Gamma\Lambda^{3-q} \mathcal{U}$, $\hat{\#} : \Gamma\Lambda^q \mathcal{D} \rightarrow \Gamma\Lambda^{2-q} \mathcal{D}$ が定義される。ここで $\Gamma\Lambda^q \mathcal{U}$ は $\mathcal{U}$ 上の q -次微分形式を表す。ホッジ写像を一般性を失わずに定義できるが本講究録で必要ではないのでここでは議論しない。ホッジ写像の具体的な表式は $\#1$ と $\hat{\#}1$ の定義等から以下のように p -次微分形式 ($p = 1, 2, \dots$) への作用が計算される

$$\begin{aligned} \#e^1 &= e^2 \wedge e^3, \quad \#e^2 = e^3 \wedge e^1, \quad \#e^3 = e^1 \wedge e^2, \\ \#(e^1 \wedge e^2) &= e^3, \quad \#(e^2 \wedge e^3) = e^1, \quad \#(e^3 \wedge e^1) = e^2, \quad \#(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) = 1. \\ \hat{\#}e^1 &= e^2, \quad \hat{\#}e^2 = -e^1, \quad \hat{\#}(e^1 \wedge e^2) = 1. \end{aligned}$$

また 0-次微分形式は関数と同一視し、関数 f と p -次微分形式 α が与えられた時 $\#(f\alpha) = f\#\alpha$, $\widehat{\#}(f\alpha) = f\widehat{\#}\alpha$ とする。ラブラシアン³の計算に必要なのは上の具体的な公式、外微分演算、コフレームの定義式のみである。

与えられた曲率を

$$\kappa(z) = \epsilon\kappa_0(z),$$

のように書き、 ϵ は小さなパラメーターとする。それゆえ長さの次元をもつ量 L を使って $|\kappa(z)L| \ll 1$ が成立する。

2.1 コフレーム

コフレームはフレネ-セレの公式を使って導出される。まず、パイプの中心軸を $C(z)$ と書くとパイプ内の任意の位置はベクトル表記で

$$\mathbf{r}(z, x_1, x_2) = \mathbf{C}(z) + x_1 \mathbf{n}(z) + x_2 \mathbf{b}(z),$$

で与えられる。ここで $\mathbf{n}$ はフレネ主法ベクトル、 $\mathbf{b}$ はフレネ陪法ベクトル、 x_1 と x_2 は断面が半径 a の円の場合では $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta < 2\pi$) である。更に $\mathbf{t} := d\mathbf{C}(z)/dz$ は曲線 C の接ベクトルを与える。これら 3 つのベクトル $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ はフレネ-セレの公式により互いに結び付いている

$$\frac{d}{dz}\mathbf{C} = \mathbf{t}, \quad \frac{d}{dz}\mathbf{t} = \kappa\mathbf{n}, \quad \frac{d}{dz}\mathbf{n} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \quad \frac{d}{dz}\mathbf{b} = -\tau\mathbf{n},$$

ここで $\tau(z)$ は捩率で我々のパイプの形状では $\tau(z) = 0$ である。コフレームを得るために $\mathbf{r}$ の無限小変位を考えると一般にこのフレネ-セレの公式を用いることにより

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r} &= \delta(\mathbf{C}(z) + x_1 \mathbf{n}(z) + x_2 \mathbf{b}(z)) \\ &= \mathbf{C}'\delta z + \{\mathbf{n}\delta x_1 + x_1\delta\mathbf{n}\} + \{\mathbf{b}\delta x_2 + x_2\delta\mathbf{b}\} \\ &= \mathbf{t}\delta z + \{\mathbf{n}\delta x_1 + x_1(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})\delta z\} + \{\mathbf{b}\delta x_2 + x_2(-\tau\mathbf{n})\delta z\}, \end{aligned}$$

$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ で分けて書くと

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{n}(\delta x_1 - x_2\tau\delta z) + \mathbf{b}(\delta x_2 + x_1\tau\delta z) + \mathbf{t}(1 - \kappa x_1)\delta z,$$

である。 $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ は 3 次元ユークリッド空間で正規直交系をなし、そこでの内積を $\cdot$ で表すと

$$\delta\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r} = (\delta x_1 - x_2\tau\delta z)^2 + (\delta x_2 + x_1\tau\delta z)^2 + \{(1 - \kappa x_1)\delta z\}^2,$$

が成立する。それゆえ $\tau(z) = 0$ の場合以下のようなコフレームが適しているといえる。

- 長方形断面の場合 $\{ \quad e^1 = dx \quad e^2 = dy, \quad e^3 = (1 - \epsilon\kappa_0(z)x)dz \quad \}.$
- 円形断面の場合 $\{ \quad e^1 = dr \quad e^2 = r d\theta, \quad e^3 = (1 - \epsilon\kappa_0(z)r \cos \theta)dz \quad \}.$

2.2 ラプラシアン

関数 (0-次微分形式) に対して 3 次元ラプラシアンは以下のように定義される

$$\# d \# d, \quad (2)$$

ここで $d : \Gamma \Lambda^p \mathcal{U} \rightarrow \Gamma \Lambda^{p+1} \mathcal{U}$ は外微分演算子である。例えば空間座標が x, y, z , 時間を t であるとする d の関数 $f(t, x, y, z)$ への作用は

$$d f(t, x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

であり、 dt は生成されないことに注意されたい。同様に 2 次元ラプラシアンも定義される：

$$\hat{\#} d \hat{\#} d.$$

直接的に計算を行うとラプラシアンの関数への作用のあらわな形が求まる

- 長方形断面の場合

3 次元ラプラシアンは関数 $f(t, x, y, z)$ に対して以下となる。

$$\# d \# d f = \frac{1}{1 - \kappa(z)x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 - \kappa(z)x) \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{1 - \kappa(z)x} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{1 - \kappa(z)x} \frac{\partial f}{\partial z} \right\}.$$

ここで $'$ は z による微分を表す。極限 $\kappa(z) \rightarrow 0$ においては

$$\Delta^{(0)} f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f. \quad (3)$$

2 次元ラプラシアンは関数 $h(t, x, y)$ に対して任意の ϵ において以下となる

$$\hat{\#} d \hat{\#} d h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}.$$

- 円形断面の場合

3 次元ラプラシアンは関数 $f(t, r, \theta, z)$ に対して以下となる。

$$\begin{aligned} \# d \# d = & \left\{ \frac{1}{(1 - \kappa(z)r \cos \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\kappa'(z)r \cos \theta}{(1 - \kappa(z)r \cos \theta)^3} \frac{\partial}{\partial z} \right\} f \\ & + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{\kappa(z) \cos \theta}{1 - \kappa(z)r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial r} \right\} f + \left\{ \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\kappa(z) \sin \theta}{r(1 - \kappa(z)r \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} f, \end{aligned}$$

極限 $\kappa(z) \rightarrow 0$ においては

$$\Delta^{(0)} f = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) f. \quad (4)$$

2 次元ラプラシアンは関数 $h(t, r, \theta)$ に対して任意の ϵ において以下となる

$$\hat{\#} d \hat{\#} d h = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} h \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} h.$$

2.2.1 パイプがまっすぐな場合 ($\epsilon = 0$) でのラプラシアン固有値問題

関数に作用するラプラシアンの固有値問題の知見が曲がったパイプ内での波動方程式やシュレーディンガー方程式の解法に用いられる。以下ではそれらを列挙しておく。 $\mathcal{D}$ を 2 次元断面とし、固有値問題の境界条件として $\partial\mathcal{U}$ や $\partial\mathcal{D}$ といった境界上で固有関数がゼロになるものを考える。

- 長方形断面の場合 (境界 $\partial\mathcal{U}$ は $x = -L_x/2, L_x/2, \quad y = -L_y/2, L_y/2, \quad z = 0, L_z$)
2 次元の長方形の形をした断面

$$\mathcal{D} := \left\{ (x, y) \mid -\frac{L_x}{2} \leq x \leq \frac{L_x}{2}, \quad -\frac{L_y}{2} \leq y \leq \frac{L_y}{2} \right\},$$

を考える。この $\mathcal{D}$ 上の 2 次元ラプラシアンの固有値問題

$$\hat{\#} d \hat{\#} d S_N(x, y) = -\mathcal{B}_N^2 S_N(x, y).$$

を考える。境界条件 $S_N(x, y)|_{\partial\mathcal{D}} = 0$ を満たす固有関数 S_N と固有関数 $\mathcal{B}_N$ のあらわな表式は

$$S_N(x, y) = \sin\left(\frac{\pi n_x}{L_x}x + \frac{\pi n_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y}{L_y}y + \frac{\pi n_y}{2}\right), \quad \mathcal{B}_N^2 = \left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)^2.$$

ここで $N := (n_x, n_y), n_x = 1, 2, \dots, n_y = 1, 2, \dots$ 。また、 $\delta_{a,b}$ をクロネッカーのデルタとすると以下の直行性が示される

$$\int_{\mathcal{D}} S_N(x, y) S_{N'}(x, y) \hat{\#} 1 = \left(\frac{L_x L_y}{2^2}\right) \delta_{N, N'}. \quad \delta_{N, N'} := \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y}. \quad (5)$$

次に 3 次元ラプラシアンの固有値問題を考える。 $S_{N, n_z}(x, y, z)|_{\partial\mathcal{U}} = 0$ を満たすラプラシアンの固有関数と固有値は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} \Delta^{(0)} S_{N, n_z}(x, y, z) &= -\left\{ \mathcal{B}_N^2 + \left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2 \right\} S_{N, n_z}(x, y, z), \\ S_{N, n_z}(x, y, z) &= S_N(x, y) \sin\left(\frac{\pi n_z}{L_z}z\right), \end{aligned}$$

ここで $n_z = 1, 2, \dots$ 。更に S_{N, n_z} は同じ境界条件を満足する μ を定数とする以下の固有値問題の固有関数でもある

$$\left(\Delta^{(0)} + \mu^2\right) S_{N, n_z}(x, y, z) = -\left\{ \mathcal{B}_N^2 + \left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2 + \mu^2 \right\} S_{N, n_z}(x, y, z). \quad (6)$$

- 円形断面の場合 (境界 $\partial\mathcal{U}$ は $r = a, \quad z = 0, L$)
2 次元の円の形をした断面

$$\mathcal{D} := \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \},$$

を考える。この $\mathcal{D}$ 上の 2 次元ラプラシアンの固有値問題

$$\hat{\#} d \hat{\#} d \Phi_N(r, \theta) = -\beta_N^2 \Phi_N(r, \theta),$$

において境界条件 $\Phi_N(r, \theta)|_{\partial \mathcal{D}} = 0$ を満たす固有関数 $\Phi(r, \theta)$ と固有値 β_N は

$$\Phi_N(r, \theta) = J_n \left(\frac{x_{q(n)}}{a} r \right) e^{in\theta}, \quad \beta_N = \frac{x_{q(n)}}{a}, \quad J_n(x_{q(n)}) = 0,$$

ここで $N = \{n, q(n)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $q = 1, 2, \dots$, J_n は n 次のベッセル関数で $x_{q(n)}$ は J_n の q -番目のゼロ点である ($J_n(x_{q(n)}) = 0$)。また以下の直交性が示される

$$\int_{\mathcal{D}} \overline{\Phi_M} \Phi_N \# 1 = \mathcal{N}_N^2 \delta_{N,M}. \quad (7)$$

ここで $N = \{n, q(n)\}$, $M = \{m, p(m)\}$ であり、

$$\mathcal{N}_N^2 = \pi a^2 J_{n+1}^2(x_{q(n)}), \quad \delta_{N,M} := \delta_{n,m} \delta_{q,p}.$$

次に 3 次元ラプラシアン固有値問題を考える。 $\varphi_{N,\eta}|_{\partial \mathcal{U}} = 0$ を満たすラプラシアンの固有関数と固有値は $\eta = 1, 2, \dots$ を導入すると以下で与えられる：

$$\Delta^{(0)} \varphi_{N,\eta}(z, r, \theta) = - \left\{ \beta_N^2 + \left(\frac{\eta\pi}{L} \right)^2 \right\} \varphi_{N,\eta}(z, r, \theta), \quad \varphi_{N,\eta}(z, r, \theta) = \Phi_N(r, \theta) \sin \left(\frac{\eta\pi}{L} z \right).$$

更に $\varphi_{N,\eta}$ は同じ境界条件を満足する μ を定数とする以下の固有値問題の固有関数でもある：

$$(\Delta^{(0)} + \mu^2) \varphi_{N,\eta}(z, r, \theta) = - \left\{ \beta_N^2 + \left(\frac{\eta\pi}{L} \right)^2 + \mu^2 \right\} \varphi_{N,\eta}(z, r, \theta). \quad (8)$$

3 断面が長方形を保った中心軸が緩やかに曲がったパイプ内の線形波動方程式 [2]

次の線形偏微分方程式を考える。

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \# d \# d + \mu^2 \right\} \phi(\epsilon, t, x, y, z) = 0, \quad (9)$$

ここで種々の演算子は §2 にて定義されており、 c, μ は実定数で ϵ は与えられたパイプ中心軸のまがりを記述する曲率 $\kappa(z) = \epsilon \kappa_0(z)$ が与えられているものとするので固定している、なお $\phi(\epsilon, t, x, y, z) \in \mathbb{C}$ とする。座標の範囲は

$$-\infty \leq t \leq \infty, \quad -\frac{L_x}{2} \leq x \leq \frac{L_x}{2}, \quad -\frac{L_y}{2} \leq y \leq \frac{L_y}{2}, \quad 0 \leq z \leq L_z.$$

境界条件は $\partial \mathcal{U}$ をパイプ全体での空間境界として

$$\phi(\epsilon, t, x, y, z)|_{\partial \mathcal{U}} = 0. \quad (10)$$

本講究録では (9) を波動方程式と呼ぶことにする。また ϵ は小さいものとする。

近似解を得るために ϕ を正則摂動展開、すなわち $\phi = \phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ 、を以下のように行う

$$\phi(\epsilon, t, x, y, z) = \sum_{\tilde{N}} S_{\tilde{N}}(x, y, z) A_{\tilde{N}}(\epsilon, t), \quad A_{\tilde{N}}(\epsilon, t) = A_{\tilde{N}}^{(0)}(t) + \epsilon A_{\tilde{N}}^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (11)$$

ここで $\tilde{N} := (N, n_z)$ であり我々はこれをモードと呼ぶ。また $S_{\tilde{N}}$ は §2.2.1 にて定義されている。上の展開は

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon, t, x, y, z) &= \phi^{(0)}(t, x, y, z) + \epsilon \phi^{(1)}(t, x, y, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \phi^{(j)}(t, x, y, z) &:= \sum_{\tilde{N}} S_{\tilde{N}}(x, y, z) A_{\tilde{N}}^{(j)}(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

とも表すことにする。 $\tilde{N}$ をモードと呼ぶので $A_{\tilde{N}}$ をモード振幅と呼ぶことにする。特にここで注意すべきは ϵ の大きさに関わらず ϕ の展開 (11) は境界条件 (10) を厳密に満たすことである。正則摂動解が妥当な近似であるためには $\phi^{(0)} \gg \epsilon \phi^{(1)}$ である必要がある。 $\phi^{(1)} \sim t$ となる場合は短時間でのみ正則摂動法が妥当であるといえよう。この場合は長時間の振舞を見るためには正則摂動法のみでは不十分である。

$A_{\tilde{N}}^{(j)}$ に関する方程式を $\phi^{(j)}$ から求めるため次の恒等式等が用いられる

$$A_{\tilde{N}}^{(j)}(t) = \frac{2^3}{L_x L_y L_z} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \int_{-L_y/2}^{L_y/2} dy \int_0^{L_z} dz S_{\tilde{N}}(x, y, z) \phi^{(j)}(t, x, y, z). \quad (12)$$

3.1 非摂動解

$\epsilon = 0$ の場合方程式は

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta^{(0)} + \mu^2 \right\} \phi^{(0)}(t, x, y, z) = 0, \quad (13)$$

ここで $\Delta^{(0)}$ は (3) で定義されている。この方程式は (6) と (12) を用いることにより $A_{\tilde{N}}^{(0)}$ の方程式に書き直される

$$\ddot{A}_{\tilde{N}}^{(0)} + \Omega_{\tilde{N}}^2 A_{\tilde{N}}^{(0)} = 0, \quad \Omega_{\tilde{N}} := c \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L_z} \right)^2 + \mu^2},$$

ここで $\dot{}$ は t での微分である。解はただちに求まり $A_{\tilde{N}}^{(0,\pm)} \in \mathbb{C}$ を積分定数とすると

$$A_{\tilde{N}}^{(0)}(t) = A_{\tilde{N}}^{(0,-)} e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + A_{\tilde{N}}^{(0,+)} e^{i\Omega_{\tilde{N}} t}. \quad (14)$$

3.2 1 次の正則摂動解

ϵ に関して 1 次での運動方程式は

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta^{(0)} + \mu^2 \right\} \phi^{(1)} = 2x\kappa_0(z) \frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial z^2} + x\kappa'_0(z) \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial z} - \kappa_0(z) \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x},$$

ここで $'$ は z に関する微分である。 $A_{\tilde{N}}$ での方程式に書き直すと

$$\ddot{A}_{\tilde{N}}^{(1)} + \Omega_{\tilde{N}}^2 A_{\tilde{N}}^{(1)} = \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n'_y} F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} A_{\tilde{N}'}^{(0)}(t), \quad (15)$$

ここで δ_{n_y, n'_y} は直交関係式

$$\delta_{n_y, n'_y} = \frac{2}{L_y} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} dy \sin \left(\frac{\pi n_y}{L_y} y + \frac{\pi n_y}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi n'_y}{L_y} y + \frac{\pi n'_y}{2} \right),$$

に起因し、 $F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)}$ は以下で定義されている。

$$F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} := -c^2 \langle x \rangle_{S_{n_x}, S_{n'_x}}^{(x)} \left\{ 2 \left(\frac{\pi n'_z}{L_z} \right)^2 \langle \kappa_0 \rangle_{S_{n_z}, S_{n'_z}}^{(z)} - \frac{\pi n_z}{L_z} \langle \kappa'_0 \rangle_{S_{n_z}, C_{n'_z}}^{(z)} \right\}. \quad \in \mathbb{R}$$

また f を任意の x, z の関数とすると

$$\langle f \rangle_{S_{n_x}, S_{n'_x}}^{(x)} := \frac{2}{L_x} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx f(x, z) \sin\left(\frac{\pi n_x}{L_x} x + \frac{\pi n_x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n'_x}{L_x} x + \frac{\pi n'_x}{2}\right), \quad (16)$$

$$\langle f \rangle_{S_{n_z}, S_{n'_z}}^{(z)} := \frac{2}{L_z} \int_0^{L_z} dz f(x, z) \sin\left(\frac{\pi n_z}{L_z} z\right) \sin\left(\frac{\pi n'_z}{L_z} z\right), \quad (17)$$

$$\langle f \rangle_{S_{n_z}, C_{n'_z}}^{(z)} := \frac{2}{L_z} \int_0^{L_z} dz f(x, z) \sin\left(\frac{\pi n_z}{L_z} z\right) \cos\left(\frac{\pi n'_z}{L_z} z\right). \quad (18)$$

非摂動解 (もしくは 0 次解と呼ぶ) (14) を (15) へ代入するとこの次数での解が求まる (§7 を見よ)

$$\begin{aligned} A_{\tilde{N}}^{(1)}(t) = & \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n'_y} \left\{ R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} t \left(\frac{A_{\tilde{N}'}^{(0,-)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + \frac{A_{\tilde{N}'}^{(0,+)}}{2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} \right) \right. \\ & \left. + N_{\tilde{N}, \tilde{N}'} F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} \frac{A_{\tilde{N}'}^{(0,-)} e^{-i\Omega_{\tilde{N}'} t} + A_{\tilde{N}'}^{(0,+)} e^{i\Omega_{\tilde{N}'} t}}{\Omega_{\tilde{N}}^2 - \Omega_{\tilde{N}'}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

ここで $R_{\tilde{N}, \tilde{N}'}$ と $N_{\tilde{N}, \tilde{N}'}$ は以下のように定義されている

$$R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} := \delta_{\Omega_{\tilde{N}}, \Omega_{\tilde{N}'}} , \quad N_{\tilde{N}, \tilde{N}'} := 1 - \delta_{\Omega_{\tilde{N}}, \Omega_{\tilde{N}'}} .$$

条件 $R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} = 1$ はこのオーダー ($\mathcal{O}(\epsilon)$) で以下の共鳴条件と同値である

$$\Omega_{n_x, n_y, n_z} = \Omega_{n'_x, n_y, n'_z}. \quad (20)$$

一方で条件 $N_{\tilde{N}, \tilde{N}'} = 1$ はこのオーダー ($\mathcal{O}(\epsilon)$) で以下の非共鳴条件と同値である

$$\Omega_{n_x, n_y, n_z} \neq \Omega_{n'_x, n_y, n'_z}.$$

注意すべきは共鳴条件が満足されると (19) に永年項が存在すること、共鳴条件には $\kappa(z)$ が含まれないことである。

3.3 くりこみ ～ 永年項の処理 ～

共鳴条件が満足される時、すなわち (20) が満たされる時、1 次の摂動解 (19) に永年項が表れる。永年項が存在すると、正則摂動解は系の長時間挙動を正しく記述しない。系の長時間挙動を知るために正則摂動法以外の摂動法を用いる必要があり、今回の報告では我々は“くりこみ法”と呼ばれる正則摂動解から系統的操作で永年項を除去する方法を用いることにする [4]。

まず (19) で生じた永年項を集めることにより以下の多項式を定義する

$$A_{\tilde{N}}^{(pol, \pm)}(t) := A_{\tilde{N}}^{(0, \pm)} + \epsilon t \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n'_y} R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)}}{\pm 2i\Omega_{\tilde{N}'}} A_{\tilde{N}'}^{(0, \pm)}. \quad (21)$$

これらの定義により正則摂動解は近似的に以下のように書くことができる

$$A_{\tilde{N}}(\epsilon, t) = A_{\tilde{N}}^{(pol, -)}(t) e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + A_{\tilde{N}}^{(pol, +)}(t) e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} + (\text{NT}) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

ここで NT は Nonresonance Terms の略で非共鳴項を表す。

次に (21) が満たすべき方程式を近似的に導く。定義から

$$\begin{aligned} A_{\tilde{N}}^{(pol,\pm)}(t+\tau) &= A_{\tilde{N}}^{(pol,\pm)}(t) + \epsilon \tau \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n_y'} R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)}}{\pm 2i\Omega_{\tilde{N}'}} A_{\tilde{N}'}^{(0,\pm)} \\ &= A_{\tilde{N}}^{(pol,\pm)}(t) + \epsilon \tau \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n_y'} R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)}}{\pm 2i\Omega_{\tilde{N}'}} A_{\tilde{N}'}^{(pol,\pm)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (22)$$

ここで関係式 $A_{\tilde{N}}^{(pol,\pm)}(t) = A_{\tilde{N}}^{(0,\pm)} + \mathcal{O}(\epsilon)$ を $A_{\tilde{N}}^{(pol,\pm)}(t)$ に関して閉じた方程式を得るために用いた。我々は以下のような関数 $A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)}(t)$ を探す。まずこの関数は (22) を近似し、また何度でも微分可能であるとする。それゆえ関数 $f(t)$ を $f(t+\tau)$ へと写す写像 φ_τ^* を用いて

$$\begin{aligned} A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)}(t+\tau) &= \varphi_\tau^* A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)}(t) \\ &= A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)}(t) + \tau \frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)}(t) + \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned} \quad (23)$$

$A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)}(t)$ の探しかたと (22) と (23) から $\mathcal{O}(\tau)$ での比較により以下の“くりこみ方程式”を得る

$$\frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)} = \epsilon \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n_y'} R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)}}{\pm 2i\Omega_{\tilde{N}'}} A_{\tilde{N}'}^{(ren,\pm)}. \quad (24)$$

この得られた方程式は以下のように注目するモードとそれ以外のモードに分離して書くことが可能である。

$$\frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)} = \epsilon \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)}}{\pm 2i\Omega_{\tilde{N}}} A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)} + \epsilon \sum_{\tilde{N}'(\neq \tilde{N})} \delta_{n_y, n_y'} R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)}}{\pm 2i\Omega_{\tilde{N}'}} A_{\tilde{N}'}^{(ren,\pm)}, \quad (25)$$

ここで右辺の第一項は注目するモード振幅からのベクトル場への寄与であり、第二項は注目するモードと結合する他のモード振幅からの寄与を表す。

注目するモード振幅のみがベクトル場に寄与するという特別な場合が存在すれば (25) は

$$\frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)} = \epsilon \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)}}{\pm 2i\Omega_{\tilde{N}}} A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)},$$

となり、その解はただちに以下のように得られる

$$A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)}(t) = A_{\tilde{N}}^{(ren,\pm)}(0) \exp \left(\epsilon t \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)}}{\pm 2i\Omega_{\tilde{N}}} \right).$$

ϕ でこの近似解を書けば、

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon, t, x, y, z) &= \sum_{\tilde{N}} S_{\tilde{N}}(x, y, z) \left(A_{\tilde{N}}^{(ren,-)}(t) e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + A_{\tilde{N}}^{(ren,+)}(t) e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} \right) \\ \phi(\epsilon, t, x, y, z) &= \sum_{\tilde{N}} S_{\tilde{N}}(x, y, z) A_{\tilde{N}}^{(ren,-)}(0) \exp \left\{ \left(-i\Omega_{\tilde{N}} + \epsilon \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}}} \right) t \right\} \\ &\quad + \sum_{\tilde{N}} S_{\tilde{N}}(x, y, z) A_{\tilde{N}}^{(ren,+)}(0) \exp \left\{ \left(i\Omega_{\tilde{N}} + \epsilon \frac{F_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)}}{2i\Omega_{\tilde{N}}} \right) t \right\}. \end{aligned}$$

この解から境界がまっすぐな場合 ($\epsilon = 0$) と比べて曲がった場合 ($\epsilon \neq 0$) は $F_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)}$ や Ω が実数であることを考慮すると各モードの時間的振動数がシフトすることがわかる。

4 断面が円形を保った中心軸が緩やかに曲がったパイプ内の線形波動方程式 [1]

前章で考えた $\phi(\epsilon, t, z, r, \theta) \in \mathbb{C}$ に関する線形波動方程式、ただしパイプの断面は円に固定された以下の方程式について解析を行う

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \# d \# d + \mu^2 \right\} \phi(\epsilon, t, z, r, \theta) = 0, \quad (26)$$

ここで種々の演算子はやはり §2 で定義されている。また c, μ は実定数、座標の範囲は

$$-\infty \leq t \leq \infty, \quad 0 \leq z \leq L, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

境界条件は $\partial \mathcal{U}$ をパイプ全体の空間境界条件として

$$\phi(\epsilon, t, z, r, \theta)|_{\partial \mathcal{U}} = 0. \quad (27)$$

近似解を得るために ϕ を正則摂動展開の形で求めている

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon, t, z, r, \theta) &= \sum_{\eta=1}^{\infty} \sum_N \Phi_N(r, \theta) \sin\left(\frac{\eta\pi}{L}z\right) A_{N,\eta}(\epsilon, t), \\ A_{N,\eta}(\epsilon, t) &= A_{N,\eta}^{(0)}(t) + \epsilon A_{N,\eta}^{(1)}(t) + \epsilon^2 A_{N,\eta}^{(2)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (28)$$

前章のようにここでも $\tilde{N} := \{N, \eta\}$ をモードと呼ぶことにする。また $\Phi_{\tilde{N}}$ は §2.2.1 で定義されている。上の展開は

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon, t, z, r, \theta) &= \phi^{(0)}(t, z, r, \theta) + \epsilon \phi^{(1)}(t, z, r, \theta) + \epsilon^2 \phi^{(2)}(t, z, r, \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \\ \phi^{(j)}(t, z, r, \theta) &:= \sum_{\tilde{N}} \Phi_{\tilde{N}}(r, \theta) \sin\left(\frac{\eta\pi}{L}z\right) A_{\tilde{N}}^{(j)}(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

とも表すことにする。また前章でそうしたように $A_{\tilde{N}}$ をモード振幅と呼ぶことにする。この展開はどんな ϵ の値に対しても境界条件を厳密に満たすことを注意しておく。

$A_{\tilde{N}}^{(j)}$ が満たす方程式を $\phi^{(j)}$ のそれから得るために以下のような恒等式を用いる。

$$A_{\tilde{N}}^{(j)}(t) = \frac{1}{\mathcal{N}_{\tilde{N}}^2} \int_{\mathcal{D}} \overline{\Phi_{\tilde{N}}} \# 1 \frac{2}{L} \int_0^L dz \sin\left(\frac{\eta\pi}{L}z\right) \phi^{(j)}(t, z, r, \theta). \quad (29)$$

4.1 非摂動解

$\epsilon = 0$ の場合の方程式は

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta^{(0)} + \mu^2 \right\} \phi^{(0)}(t, z, r, \theta) = 0, \quad (30)$$

ここで $\Delta^{(0)}$ は (4) で定義されている。この方程式は (8) と (29) を用いて $A_{\tilde{N}}^{(0)}$ に関する方程式に書くことができる

$$\ddot{A}_{\tilde{N}}^{(0)} + \Omega_{\tilde{N}}^2 A_{\tilde{N}}^{(0)} = 0, \quad \Omega_{\tilde{N}} := c \sqrt{\left(\frac{\eta\pi}{L}\right)^2 + \beta_N^2 + \mu^2},$$

ここで $\dot{}$ は時間での微分を表す。解は $A_{\tilde{N}}^{(0,\pm)} \in \mathbb{C}$ を積分定数として

$$A_{\tilde{N}}^{(0)}(t) = A_{\tilde{N}}^{(0,-)} e^{-i\Omega_{\tilde{N}}t} + A_{\tilde{N}}^{(0,+)} e^{i\Omega_{\tilde{N}}t}. \quad (31)$$

4.2 1 次の正則摂動解

ϵ に関して 1 次での運動方程式は

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta^{(0)} + \mu^2 \right\} \phi^{(1)} \\ = 2\kappa_0(z) \phi^{(0)''} r \cos \theta + \kappa_0'(z) \phi^{(0)'} r \cos \theta - \kappa_0(z) \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} \cos \theta + \kappa_0(z) \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r},$$

もしくは $A_{\tilde{N}}^{(j)}$ に関する方程式に書き直すと

$$\ddot{A}_{\tilde{N}}^{(1)} + \Omega_{\tilde{N}}^2 A_{\tilde{N}}^{(1)} = \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\tilde{N}'} F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} A_{\tilde{N}'}^{(0)}(t). \quad (32)$$

ここで

$$F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} := \left\{ -2 \left(\frac{\eta' \pi}{L} \right)^2 \langle \kappa_0 \rangle_{S_\eta, S_{\eta'}} + \frac{\eta' \pi}{L} \langle \kappa_0' \rangle_{S_\eta, C_{\eta'}} \right\} C_{N, N'}^{(1,1)} + \langle \kappa_0 \rangle_{S_\eta, S_{\eta'}} C_{N, N'}^{(1,2)}, \quad \in \mathbb{R}$$

$$C_{N, M}^{(1,1)} := \int_{\mathcal{D}} \overline{\Phi_N} \Phi_M r \cos \theta \hat{\#} 1 = \pi (\delta_{m, n-1} + \delta_{m, n+1}) \int_0^a dr r^2 J_n \left(\frac{x_{q(n)}}{a} r \right) J_m \left(\frac{x_{p(m)}}{a} r \right), \quad \in \mathbb{R}$$

$$C_{N, M}^{(1,2)} := \int_{\mathcal{D}} \overline{\Phi_N} \left(\frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\partial \Phi_M}{\partial r} \cos \theta \right) \hat{\#} 1 \\ = \pi m (\delta_{m, n-1} - \delta_{m, n+1}) \int_0^a dr J_n \left(\frac{x_{q(n)}}{a} r \right) J_m \left(\frac{x_{p(m)}}{a} r \right) \\ - \pi \frac{x_{p(m)}}{a} (\delta_{m, n-1} + \delta_{m, n+1}) \int_0^a dr r J_n \left(\frac{x_{q(n)}}{a} r \right) J'_m \left(\frac{x_{p(m)}}{a} r \right). \quad \in \mathbb{R}$$

ここで

$$J'_m(Xr) := \left. \frac{dJ_m}{dy} \right|_{y=Xr}.$$

これに加え、 z の関数 f に対して以下を定義した。

$$\langle f \rangle_{S_\eta, S_{\eta'}} := \int_0^L dz \sin \left(\frac{\eta \pi}{L} z \right) \sin \left(\frac{\eta' \pi}{L} z \right) f(z), \quad \langle f \rangle_{S_\eta, C_{\eta'}} := \int_0^L dz \sin \left(\frac{\eta \pi}{L} z \right) \cos \left(\frac{\eta' \pi}{L} z \right) f(z).$$

$C_{N, N'}^{(1,1)}$ と $C_{N, N'}^{(1,2)}$ における $\delta_{n', n \pm 1}$ により (32) の右辺は以下のようなになる

$$\frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\tilde{N}'} F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} A_{\tilde{N}'}^{(0)}(t) = \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'} \sum_{n'=n \pm 1} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N}, n' q'(n'), \eta'}^{(1)} A_{n', q'(n'), \eta'}^{(0)}(t).$$

(31) を (32) へ代入したのち我々は以下の解を得る (§7 を見よ)

$$A_{\tilde{N}}^{(1)}(t) = \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'} \sum_{n'=n \pm 1} \sum_{q'(n')} \left\{ R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} F_{\tilde{N}, n' q'(n'), \eta'}^{(1)} t \left(\frac{A_{\tilde{N}'}^{(0,-)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + \frac{A_{\tilde{N}'}^{(0,+)}}{2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} \right) \right. \\ \left. + N_{\tilde{N}, \tilde{N}'} F_{\tilde{N}, n' q'(n'), \eta'}^{(1)} \frac{A_{\tilde{N}'}^{(0,-)} e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + A_{\tilde{N}'}^{(0,+)} e^{i\Omega_{\tilde{N}} t}}{\Omega_{\tilde{N}}^2 - \Omega_{\tilde{N}'}^2} \right\}, \quad (33)$$

ここで $R_{\tilde{N},\tilde{N}'}$ と $N_{\tilde{N},\tilde{N}'}$ は以下で定義されている

$$R_{\tilde{N},\tilde{N}'} := \delta_{\Omega_{\tilde{N}},\Omega_{\tilde{N}'}} , \quad N_{\tilde{N},\tilde{N}'} := 1 - \delta_{\Omega_{\tilde{N}},\Omega_{\tilde{N}'}} .$$

このオーダー $\mathcal{O}(\epsilon)$ で条件 $R_{\tilde{N},\tilde{N}'} = 1$ は以下の共鳴条件と等価である

$$\Omega_{n,q(n),\eta} = \Omega_{n\pm 1,q'(n\pm 1),\eta'} . \quad (34)$$

また $N_{\tilde{N},\tilde{N}'} = 1$ はこのオーダー $\mathcal{O}(\epsilon)$ で以下と等価である

$$\Omega_{n,q(n),\eta} \neq \Omega_{n\pm 1,q'(n\pm 1),\eta'} .$$

注意すべきは §3 でみたように共鳴条件が満足されると (33) に永年項 ($\propto t$ となる項) が生じることと共鳴条件に $\kappa(z)$ が関与しないことである。

4.3 2 次の正則摂動解

ϵ に関して 2 次での運動方程式は

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta^{(0)} + \mu^2 \right\} \phi^{(2)} \\ &= 2\kappa_0(z) \phi^{(1)''} r \cos \theta + \kappa'_0(z) \phi^{(1)'} r \cos \theta - \kappa_0(z) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial r} \cos \theta + \kappa_0(z) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \\ &+ 3(\kappa_0(z) r \cos \theta)^2 \phi^{(0)'''} + 3\kappa_0(z) \kappa'_0(z) (r \cos \theta)^2 \phi^{(0)''} - \kappa_0^2(z) r \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial r} \cos^2 \theta + \kappa_0^2(z) \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial \theta} \cos \theta \sin \theta, \end{aligned}$$

もしくは $A_{\tilde{N}}^{(j)}$ に関する方程式に書き直すと

$$\ddot{A}_{\tilde{N}}^{(2)} + \Omega_{\tilde{N}}^2 A_{\tilde{N}}^{(2)} = \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{\tilde{N}}} \right)^2 \sum_{\eta'} \left\{ \sum_{n'=n\pm 1} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)} A_{\tilde{N}'}^{(1)}(t) + \sum_{n'=n,n\pm 2} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(2)} A_{\tilde{N}'}^{(0)}(t) \right\}. \quad (35)$$

ここで

$$F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(2)} := \left\{ -3 \left(\frac{\eta' \pi}{L} \right)^2 \langle \kappa_0^2 \rangle_{S_{\eta}, S_{\eta'}} + 3 \frac{\eta' \pi}{L} \langle \kappa_0 \kappa'_0 \rangle_{S_{\eta}, C_{\eta'}} \right\} C_{N,N'}^{(2,1)} - \langle \kappa_0^2 \rangle_{S_{\eta}, S_{\eta'}} C_{N,N'}^{(2,2)} + \frac{i}{2} n' \langle \kappa_0^2 \rangle_{S_{\eta}, S_{\eta'}} C_{N,N'}^{(2,3)},$$

$$\begin{aligned} C_{N,N'}^{(2,1)} &:= \int_{\mathcal{D}} \overline{\Phi_N} \Phi_{N'} r^2 \cos \theta \hat{\#} 1 \\ &= \pi \left\{ \delta_{n',n} + \frac{1}{2} (\delta_{n',n+2} + \delta_{n',n-2}) \right\} \int_0^a dr r^3 J_n \left(\frac{x_{q(n)}}{a} r \right) J_{n'} \left(\frac{x_{q'(n')}}{a} r \right), \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{N,N'}^{(2,2)} &:= \int_{\mathcal{D}} \overline{\Phi_N} \frac{\partial \Phi_{N'}}{\partial r} r \cos^2 \theta \hat{\#} 1 \\ &= \pi \left\{ \delta_{n',n} + \frac{1}{2} (\delta_{n',n+2} + \delta_{n',n-2}) \right\} \frac{x_{q'(n')}}{a} \int_0^a dr r^2 J_n \left(\frac{x_{q(n)}}{a} r \right) J'_{n'} \left(\frac{x_{q'(n')}}{a} r \right), \quad \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{N,N'}^{(2,3)} &:= \int_{\mathcal{D}} \overline{\Phi_N} \Phi_{N'} \sin 2\theta \hat{\#} 1 \\ &= -\pi i (\delta_{n',n-2} - \delta_{n',n+2}) \int_0^a dr r J_n \left(\frac{x_{q(n)}}{a} r \right) J_{n'} \left(\frac{x_{q'(n')}}{a} r \right). \quad \in i \mathbb{R} \end{aligned}$$

(31) で与えられる $A_{\tilde{N}}^{(0)}(t)$ と (33) で与えられる $A_{\tilde{N}}^{(1)}(t)$ を (35) へ代入することで ϵ の 2 次での方程式があらわに得られる。その結果 (35) の右辺は以下ようになる

$$\begin{aligned} & \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'} \sum_{n'=n \pm 1} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} \left[\frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{N'}} \right)^2 \sum_{\eta''} \sum_{n''=n' \pm 1} \sum_{q''(n'')} \right. \\ & \quad \times \left\{ R_{\tilde{N}', \tilde{N}''} F_{\tilde{N}', \tilde{N}''}^{(1)} t \left(\frac{A_{\tilde{N}''}^{(0,-)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}'}} e^{-i\Omega_{\tilde{N}'} t} + \frac{A_{\tilde{N}''}^{(0,+)}}{2i\Omega_{\tilde{N}'}} e^{i\Omega_{\tilde{N}'} t} \right) \right. \\ & \quad \left. \left. + N_{\tilde{N}', \tilde{N}''} \frac{F_{\tilde{N}', \tilde{N}''}^{(1)}}{\Omega_{\tilde{N}'}^2 - \Omega_{\tilde{N}''}^2} \left(A_{\tilde{N}''}^{(0,-)} e^{-i\Omega_{\tilde{N}''} t} + A_{\tilde{N}''}^{(0,+)} e^{i\Omega_{\tilde{N}''} t} \right) \right\} \right] \\ & + \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta''} \sum_{n''=n, n \pm 2} \sum_{q''(n'')} F_{\tilde{N}, \tilde{N}''}^{(2)} \left(A_{\tilde{N}''}^{(0,-)} e^{-i\Omega_{\tilde{N}, \tilde{N}''} t} + A_{\tilde{N}''}^{(0,+)} e^{i\Omega_{\tilde{N}, \tilde{N}''} t} \right), \end{aligned}$$

これから解は以下となることがわかる

$$\begin{aligned} A_{\tilde{N}}^{(2)}(t) = & \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'} \sum_{n'=n \pm 1} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{N'}} \right)^2 \sum_{\eta''} \sum_{n''=n' \pm 1} \sum_{q''(n'')} \\ & \times \left[R_{\tilde{N}', \tilde{N}''} \frac{F_{\tilde{N}', \tilde{N}''}^{(1)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}'}} A_{\tilde{N}''}^{(0,-)} \left\{ R_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \left(\frac{it^2}{4\Omega_{\tilde{N}}} + \frac{t}{4\Omega_{\tilde{N}}^2} \right) e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + N_{\tilde{N}, \tilde{N}''} t \frac{e^{-i\Omega_{\tilde{N}''} t}}{\Omega_{\tilde{N}}^2 - \Omega_{\tilde{N}''}^2} \right\} \right. \\ & + N_{\tilde{N}', \tilde{N}''} \frac{F_{\tilde{N}', \tilde{N}''}^{(1)}}{\Omega_{\tilde{N}'}^2 - \Omega_{\tilde{N}''}^2} A_{\tilde{N}''}^{(0,-)} \left\{ R_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \frac{t e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t}}{-2i\Omega_{\tilde{N}}} + N_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \frac{e^{-i\Omega_{\tilde{N}''} t}}{\Omega_{\tilde{N}}^2 - \Omega_{\tilde{N}''}^2} \right\} \\ & + R_{\tilde{N}', \tilde{N}''} \frac{F_{\tilde{N}', \tilde{N}''}^{(1)}}{2i\Omega_{\tilde{N}'}} A_{\tilde{N}''}^{(0,+)} \left\{ R_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \left(\frac{-it^2}{4\Omega_{\tilde{N}}} + \frac{t}{4\Omega_{\tilde{N}}^2} \right) e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} + N_{\tilde{N}, \tilde{N}''} t \frac{e^{i\Omega_{\tilde{N}''} t}}{\Omega_{\tilde{N}}^2 - \Omega_{\tilde{N}''}^2} \right\} \\ & + N_{\tilde{N}', \tilde{N}''} \frac{F_{\tilde{N}', \tilde{N}''}^{(1)}}{\Omega_{\tilde{N}'}^2 - \Omega_{\tilde{N}''}^2} A_{\tilde{N}''}^{(0,+)} \left\{ R_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \frac{t e^{i\Omega_{\tilde{N}} t}}{2i\Omega_{\tilde{N}}} + N_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \frac{e^{i\Omega_{\tilde{N}''} t}}{\Omega_{\tilde{N}}^2 - \Omega_{\tilde{N}''}^2} \right\} \Big] \\ & + \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta''} \sum_{n''=n, n \pm 2} \sum_{q''(n'')} F_{\tilde{N}, \tilde{N}''}^{(2)} \left[A_{\tilde{N}''}^{(0,-)} \left\{ R_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \frac{t e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t}}{-2i\Omega_{\tilde{N}}} + N_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \frac{e^{-i\Omega_{\tilde{N}''} t}}{\Omega_{\tilde{N}}^2 - \Omega_{\tilde{N}''}^2} \right\} \right. \\ & \left. \left. + A_{\tilde{N}''}^{(0,+)} \left\{ R_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \frac{t e^{i\Omega_{\tilde{N}} t}}{2i\Omega_{\tilde{N}}} + N_{\tilde{N}, \tilde{N}''} \frac{e^{i\Omega_{\tilde{N}''} t}}{\Omega_{\tilde{N}}^2 - \Omega_{\tilde{N}''}^2} \right\} \right] \right]. \quad (36) \end{aligned}$$

ここで 1 次のオーダー ($\mathcal{O}(\epsilon)$) で共鳴条件が満たされると 2 次での解に t^2 に比例する項が含まれることに注意せよ。(36) により異なるモード 2 つの間での共鳴条件は以下のように求まる

$$\Omega_{n, q(n), \eta} = \Omega_{n \pm 2, q''(n \pm 2), \eta''}. \quad (37)$$

(37) が満たされず、かつ (34) も満たされない場合、それにも関わらず 2 次での正則摂動解 $A_{\tilde{N}}^{(2)}(t)$ は自己モードによる共鳴、すなわち注目するモードを $\tilde{N}$ とすると右辺に低次の $A_{\tilde{N}}^{(0)}$ や $A_{\tilde{N}}^{(1)}$ による項による共鳴による永年項が存在する。この低次の自己モードによる永年項の存在が $\mathcal{O}(\epsilon)$ の正則摂動解の解析と定性的に異なる特記すべき相違点である。そのような共鳴は (36) におけるモード和の範囲により生起している

$$\sum_{n''=n, n \pm 1}, \quad \text{and} \quad \sum_{n'=n \pm 1} \sum_{n''=n' \pm 1} = \sum_{n'=n \pm 1} \sum_{n''=n, n \pm 2}.$$

1 次と 2 次の共鳴条件を考慮すると (36) を以下のようにあらわな形で場合分けをしてそのもとで解を書くことができる。

(i)

$$\begin{aligned}\Omega_{n,q(n),\eta} &\neq \Omega_{n\pm 1,q'(n\pm 1),\eta'}, \quad \text{for all } q'(n\pm 1), \eta' \quad \text{and} \\ \Omega_{n,q(n),\eta} &\neq \Omega_{n\pm 1,q''(n\pm 2),\eta''}, \quad \text{for all } q''(n\pm 2), \eta'',\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\Omega_{n,q(n),\eta} &\neq \Omega_{n\pm 1,q'(n\pm 1),\eta'}, \quad \text{for all } q'(n\pm 1), \eta', \quad \text{and} \\ \Omega_{n,q(n),\eta} &= \Omega_{n\pm 2,q''(n\pm 2),\eta''}, \quad \text{for some particular } q''(n\pm 2), \eta'',\end{aligned} \quad (38)$$

(iii)

$$\Omega_{n,q(n),\eta} = \Omega_{n\pm 1,q'_r(n\pm 1),\eta'_r}, \quad \text{for some particular } q'_r(n\pm 1), \eta'_r, \quad \text{and} \quad (39)$$

$$\Omega_{n,q(n),\eta} = \Omega_{n\pm 2,q''_r(n\pm 2),\eta''_r}, \quad \text{for some particular } q''_r(n\pm 2), \eta''_r, \quad (40)$$

ここで以下の場合

$$\Omega_{n,q(n),\eta} = \Omega_{n\pm 1,q'_r(n\pm 1),\eta'_r}, \quad \text{for some particular } q'_r(n\pm 1), \eta'_r, \quad \text{and} \quad (41)$$

$$\Omega_{n,q(n),\eta} \neq \Omega_{n,q''(n\pm 2),\eta''}, \quad \text{for all } q''(n\pm 2), \eta'', \quad (42)$$

が現れない理由を述べる。もし (41) が満足されると (41) を二度用いることにより

$$\Omega_{n,q(n),\eta} = \Omega_{n,q''(n\pm 2),\eta''}.$$

を満たす $q''(n\pm 2), \eta''$ を探すことができる。これは (42) に矛盾する。

4.3.1 場合 (i)

(34) と (37) の両方が満たされないこの場合、解は以下となる

$$\begin{aligned}A_{\tilde{N}}^{(2)}(t) &= \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{\tilde{N}}} \right)^2 \left[t \left(\frac{A_{\tilde{N}}^{(0,-)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{-i\Omega_{\tilde{N}}t} + \frac{A_{\tilde{N}}^{(0,+)}}{2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{i\Omega_{\tilde{N}}t} \right) \right. \\ &\quad \times \left\{ \sum_{\eta'} \sum_{n'=n\pm 1} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)} \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{\tilde{N}'}} \right)^2 \frac{F_{\tilde{N}',\tilde{N}}^{(1)}}{\Omega_{\tilde{N}'}^2 - \Omega_{\tilde{N}}^2} + F_{\tilde{N},\tilde{N}}^{(2)} \right\} \Big] + (\text{NT}),\end{aligned} \quad (43)$$

ここで $F_{\tilde{N},\tilde{N}}^{(2)}$ は実数である、なぜなら $C_{n,q(n),n,q'(n)}^{(2,3)} \in i\mathbb{R}$ がゼロとなるからである。また NT は非共鳴項の略である。NT の時間依存性は注目するモード $\tilde{N}$ に対して $\Omega'_{\tilde{N}'} \neq \Omega_{\tilde{N}}$ を満たすある $\Omega'_{\tilde{N}'}$ を用いて $\exp(i\Omega'_{\tilde{N}'}t)$ である。

それゆえ異なるモード間での共鳴が無い場合、低次の自己モードによる共鳴が起こるのみでその振舞は $A_{\tilde{N}}^{(2)}(t) \propto t$ となる。対応して我々の正則摂動法による解析は短時間のみ有効であるといえる。系の長時間挙動をみるために我々はくりこみ法を用いた解析を §4.4 にて行う。

4.3.2 場合 (ii)

場合 (ii) の場合解は

$$\begin{aligned}
 A_{\tilde{N}}^{(2)}(t) = & \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'} \sum_{n'=n \pm 1} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{N'}} \right)^2 \\
 & \times \sum_{\eta''}^{(\text{res})} \sum_{n''=n' \pm 1}^{(\text{res})} \sum_{q''(n'')}^{(\text{res})} \frac{F_{\tilde{N}', \tilde{N}''}^{(1)}}{\Omega_{\tilde{N}'}^2 - \Omega_{\tilde{N}}^2} t \left(\frac{A_{\tilde{N}}^{(0,-)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + \frac{A_{\tilde{N}}^{(0,+)}}{2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} \right) \\
 & + \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta''}^{(\text{res})} \sum_{n''=n' \pm 1}^{(\text{res})} \sum_{q''(n'')}^{(\text{res})} F_{\tilde{N}, \tilde{N}''}^{(2)} t \left(\frac{A_{\tilde{N}''}^{(0,-)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + \frac{A_{\tilde{N}''}^{(0,+)}}{2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} \right) + (\text{NT}), \quad (44)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{\eta''}^{(\text{res})} \sum_{n''=n' \pm 1}^{(\text{res})} \sum_{q''(n'')}^{(\text{res})},$$

は η'', n'' と q'' に関する条件付きの和であるが固定した $\tilde{N}$ に対して (38) と $\Omega_{n, q(n), \eta} = \Omega_{n, q''(n), \eta''}$, を満足する時のみ和をとるものとする。

4.3.3 場合 (iii)

場合 (iii) では解は以下ようになる

$$\begin{aligned}
 A_{\tilde{N}}^{(2)}(t) = & \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'}^{(\text{res})} \sum_{n'=n \pm 1}^{(\text{res})} \sum_{q'(n')}^{(\text{res})} F_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{N'}} \right)^2 \\
 & \times \sum_{\eta''}^{(\text{res})} \sum_{n''=n' \pm 1}^{(\text{res})} \sum_{q''(n'')}^{(\text{res})} F_{\tilde{N}', \tilde{N}''}^{(1)} \left\{ \frac{A_{\tilde{N}''}^{(0,-)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}'}} \left(\frac{it^2}{4\Omega_{\tilde{N}}} + \frac{t}{4\Omega_{\tilde{N}}^2} \right) e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + \frac{A_{\tilde{N}''}^{(0,+)}}{2i\Omega_{\tilde{N}'}} \left(\frac{-it^2}{4\Omega_{\tilde{N}}} + \frac{t}{4\Omega_{\tilde{N}}^2} \right) e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} \right\} \\
 & + \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta''}^{(\text{res})} \sum_{n''=n' \pm 1}^{(\text{res})} \sum_{q''(n'')}^{(\text{res})} F_{\tilde{N}, \tilde{N}''}^{(2)} t \left(\frac{A_{\tilde{N}''}^{(0,-)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + \frac{A_{\tilde{N}''}^{(0,+)}}{2i\Omega_{\tilde{N}}} e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} \right) + (\text{NT}), \quad (45)
 \end{aligned}$$

ここで和は注目するモード $\tilde{N}$ に対して (39), (40) そして自己モード共鳴が生じる場合に対して実行される。

4.4 くりこみ ～永年項の処理～

この章では永年項の除去をくりこみ法により除去し、§4.3 によって論じられた各場合において長時間の系の振舞を記述する方程式の構成を行う。くりこみ法については既に §3.3 で述べたが本章で扱っているパイプ断面が円形の場合では非自明なくりこみ方程式を得るために高次の正則摂動解を用いる。

4.4.1 場合 (i)

場合 (i) の場合、我々は永年項を含む正則摂動解 (43) に着目する。

まず (43) で現れる永年項を集め次の多項式を定義する

$$A_{\tilde{N}}^{(pol,-)}(t) := A_{\tilde{N}}^{(0,-)} - i\epsilon^2 t \Omega_{\tilde{N}}^{(ren,2)} A_{\tilde{N}}^{(0,-)}, \quad (46)$$

$$A_{\tilde{N}}^{(pol,+)}(t) := A_{\tilde{N}}^{(0,+)} + i\epsilon^2 t \Omega_{\tilde{N}}^{(ren,2)} A_{\tilde{N}}^{(0,+)}, \quad (47)$$

ここで

$$\Omega_{\tilde{N}}^{(ren,2)} := -\frac{1}{L\Omega_{\tilde{N}}} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{\tilde{N}}} \right)^2 \left[\sum_{\eta'} \sum_{n'=n\pm 1} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)} \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{\tilde{N}'}} \right)^2 \frac{F_{\tilde{N}',\tilde{N}}^{(1)}}{\Omega_{\tilde{N}'}^2 - \Omega_{\tilde{N}}^2} + F_{\tilde{N},\tilde{N}}^{(2)} \right]. \in \mathbb{R}$$

この定義から正則摂動解は以下のように書き直すことができる

$$\begin{aligned} A_{\tilde{N}}(\epsilon, t) &= A_{\tilde{N}}^{(0)}(t) + \epsilon A_{\tilde{N}}^{(1)}(t) + \epsilon^2 A_{\tilde{N}}^{(2)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= A_{\tilde{N}}^{(pol,-)}(t) e^{-i\Omega_{\tilde{N}} t} + A_{\tilde{N}}^{(pol,+)}(t) e^{i\Omega_{\tilde{N}} t} + \mathcal{O}(\epsilon^3) + (\text{NT}). \end{aligned} \quad (48)$$

くりこみ方程式は §3.3 で示した手順に従い以下のように得られる

$$\frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)} = \mp i\epsilon^2 \Omega_{\tilde{N}}^{(ren,2)} A_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)} \quad (49)$$

ここで $A_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)}(t)$ は $A_{\tilde{N}}^{(pol,\mp)}(t)$ を近似し、また (49) の解は ϵ の高次を含む。その解のあらわな形は

$$A_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)}(t) = A_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)}(0) e^{\mp i\epsilon^2 \Omega_{\tilde{N}}^{(ren,2)} t}. \quad (50)$$

最後に $A_{\tilde{N}}(\epsilon, t)$ の永年項を含まない近似解を以下のように得ることができる。(48) と (50) を用いて

$$A_{\tilde{N}}(\epsilon, t) \approx A_{\tilde{N}}^{(ren,-)}(0) e^{-i\Omega_{\tilde{N}}^{(ren)} t} + A_{\tilde{N}}^{(ren,+)}(0) e^{i\Omega_{\tilde{N}}^{(ren)} t}.$$

この解から曲がった境界による周波数のシフトは以下のように近似的に求められたことになる

$$\Omega_{\tilde{N}}^{(ren)} := \Omega_{\tilde{N}} + \epsilon^2 \Omega_{\tilde{N}}^{(ren,2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

4.4.2 場合 (ii)

場合 (ii) についてくりこみ方程式を導出しておく。導出過程は §4.4.1 で示した通りである。

まず永年項を集め以下を定義する

$$\begin{aligned} A_{\tilde{N}}^{(pol,\mp)}(t) &:= A_{\tilde{N}}^{(0,\mp)} + \epsilon^2 \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{\tilde{N}}} \right)^2 \sum_{\eta'} \sum_{n'=n\pm 1} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)} \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{\tilde{N}'}} \right)^2 \\ &\quad \times \sum_{\eta''}^{(\text{res})} \sum_{n''=n'\pm 1}^{(\text{res})} \sum_{q''(n'')}^{(\text{res})} \frac{t}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}}} \frac{F_{\tilde{N}',\tilde{N}''}^{(1)}}{\Omega_{\tilde{N}'}^2 - \Omega_{\tilde{N}}^2} A_{\tilde{N}}^{(0,\mp)} \\ &\quad + \epsilon^2 \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{\tilde{N}}} \right)^2 \sum_{\eta''}^{(\text{res})} \sum_{n''=n'\pm 1}^{(\text{res})} \sum_{q''(n'')}^{(\text{res})} \frac{t}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}}} F_{\tilde{N},\tilde{N}''}^{(2)} A_{\tilde{N}''}^{(0,\mp)}. \end{aligned}$$

この定義からくりこみ方程式が以下のように得られる

$$\begin{aligned}
\frac{dA_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)}}{dt} &= \epsilon^2 \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'} \sum_{n'=n\pm 1} \sum_{q'(n')} F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)} \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{N'}} \right)^2 \\
&\times \sum_{\eta''}^{(res)} \sum_{n''=n'\pm 1}^{(res)} \sum_{q''(n'')} \frac{1}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}}} \frac{F_{\tilde{N}',\tilde{N}''}^{(1)}}{\Omega_{\tilde{N}'}^2 - \Omega_{\tilde{N}}^2} A_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)} \\
&+ \epsilon^2 \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta''}^{(res)} \sum_{n''=n'\pm 1}^{(res)} \sum_{q''(n'')} \frac{1}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}}} F_{\tilde{N},\tilde{N}''}^{(2)} A_{\tilde{N}''}^{(ren,\mp)}. \quad (51)
\end{aligned}$$

場合 (i) の場合とは異なり (51) の右辺は注目する以外のモード振幅の和となっている。それゆえくりこみ方程式の解析解を用いての曲がった境界による周波数のシフトがこの場合はただちには得られない。(51) は

$$\frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)} = \pm i \epsilon^2 \sum_{\tilde{N}'} M_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(ii)} A_{\tilde{N}'}^{(ren,\mp)}, \quad (52)$$

のように書くことができるが、ここで $\{M_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(ii)}\}$ は成分が実の行列である。その成分は全て $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ である。

4.4.3 場合 (iii)

場合 (iii) についても同様である。以下を初めに定義する

$$\begin{aligned}
A_{\tilde{N}}^{(pol,\mp)}(t) &:= A_{\tilde{N}}^{(0,\mp)} + \epsilon \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'}^{(res)} \sum_{n'=n\pm 1}^{(res)} \sum_{q'(n')}^{(res)} \frac{F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)}}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}}} t A_{\tilde{N}'}^{(0,\mp)} \\
&+ \epsilon^2 \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'}^{(res)} \sum_{n'=n\pm 1}^{(res)} \sum_{q'(n')}^{(res)} F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)} \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{N'}} \right)^2 \\
&\times \sum_{\eta''}^{(res)} \sum_{n''=n'\pm 1}^{(res)} \sum_{q''(n'')}^{(res)} \frac{F_{\tilde{N}',\tilde{N}''}^{(1)}}{-2i\Omega_{\tilde{N}'}} \left(\frac{\pm it^2}{4\Omega_{\tilde{N}}} + \frac{t}{4\Omega_{\tilde{N}}^2} \right) A_{\tilde{N}'}^{(0,\mp)} \\
&+ \epsilon^2 \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta''}^{(res)} \sum_{n''=n'\pm 1}^{(res)} \sum_{q''(n'')}^{(res)} \frac{t}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}}} F_{\tilde{N},\tilde{N}''}^{(2)} A_{\tilde{N}''}^{(0,\mp)}, \quad (53)
\end{aligned}$$

この定義により以下を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{dA_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)}}{dt} &= \epsilon \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'}^{(res)} \sum_{n'=n\pm 1}^{(res)} \sum_{q'(n')}^{(res)} \frac{F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)}}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}}} A_{\tilde{N}'}^{(ren,\mp)} \\
&+ \epsilon^2 \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta'}^{(res)} \sum_{n'=n\pm 1}^{(res)} \sum_{q'(n')}^{(res)} F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)} \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{N'}} \right)^2 \sum_{\eta''}^{(res)} \sum_{n''=n'\pm 1}^{(res)} \sum_{q''(n'')}^{(res)} \frac{F_{\tilde{N}',\tilde{N}''}^{(1)}}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}'}} \frac{1}{4\Omega_{\tilde{N}}^2} A_{\tilde{N}'}^{(ren,\mp)} \\
&+ \epsilon^2 \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_N} \right)^2 \sum_{\eta''}^{(res)} \sum_{n''=n'\pm 1}^{(res)} \sum_{q''(n'')}^{(res)} \frac{1}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}}} F_{\tilde{N},\tilde{N}''}^{(2)} A_{\tilde{N}''}^{(ren,\mp)}. \quad (54)
\end{aligned}$$

ここでくりこみ方程式の導出過程において我々は以下の関係式を用いた

$$A_{\tilde{N}}^{(0,\mp)} = A_{\tilde{N}}^{(pol,\mp)}(t) - \epsilon t \frac{2}{L} \left(\frac{c}{\mathcal{N}_{\tilde{N}}} \right)^2 \sum_{\eta'}^{(res)} \sum_{n'=n\pm 1}^{(res)} \sum_{q'(n')}^{(res)} \frac{F_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(1)}}{\mp 2i\Omega_{\tilde{N}}} A_{\tilde{N}'}^{(pol)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

この関係式は $A_{\tilde{N}}^{(pol,\mp)}(t)$ の定義式である (53) から得られるものである。(54) を行列の形でも書くことが出来、

$$\frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(ren,\mp)} = \pm i\epsilon \sum_{\tilde{N}'} M_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(iii)} A_{\tilde{N}'}^{(ren,\mp)},$$

ここで $\{M_{\tilde{N},\tilde{N}'}^{(iii)}\}$ は 場合 (ii) のものと同様に実の行列であるが、その成分は $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ と $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ の項が混在する。

5 断面が長方形を保った中心軸が緩やかに曲がったパイプ内の井戸型ポテンシャルを有するシュレーディンガー方程式 [2]

前章までで取り扱ってきた緩やかに曲がったパイプ内での線形波動方程式の解析と同様の問題として以下のようなシュレーディンガー方程式で記述される量子系の問題を考える。波動関数を $\psi(\epsilon, t, x, y, z) \in \mathbb{C}$ と表すと

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \#d\#d \right) \psi = 0, \quad (55)$$

ここで $\hbar, m \in \mathbb{R}_+$ は定数で種々の演算子は §2 にて定義されている。座標の範囲は以下で与えられる

$$-\infty \leq t \leq \infty, \quad -\frac{L_x}{2} \leq x \leq \frac{L_x}{2}, \quad -\frac{L_y}{2} \leq y \leq \frac{L_y}{2}, \quad 0 \leq z \leq L_z.$$

境界条件は

$$\psi(\epsilon, t, x, y, z)|_{\partial\mathcal{U}} = 0, \quad (56)$$

ここでパイプ内を $\mathcal{U}$ と表し $\partial\mathcal{U}$ は空間境界を表す。この講究録では (55) をシュレーディンガー方程式と呼ぶことにする。物理的には一つの質量 m の非相対論的粒子がパイプ内 $\mathcal{U}$ に無限に高い井戸型ポテンシャル

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & (x, y, z) \in \mathcal{U} \\ \infty & (x, y, z) \in \partial\mathcal{U} \end{cases}$$

により閉じ込められている量子系が表現されている。量子力学によれば波動関数は次の規格化条件を満たさねばならない

$$\int_{\mathcal{U}} |\psi|^2 \#1 = 1. \quad (57)$$

この系の近似解を求めるため、まっすぐなパイプの場合を非摂動解にもつような以下の展開を行う

$$\begin{aligned} \psi(\epsilon, t, x, y, z) &= \sum_{\tilde{N}} S_{\tilde{N}}(x, y, z) A_{\tilde{N}}(\epsilon, t), \\ A_{\tilde{N}}(\epsilon, t) &= A_{\tilde{N}}^{(0)}(t) + \epsilon A_{\tilde{N}}^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (58)$$

この展開は以下のようにも表すものとする

$$\begin{aligned} \psi(\epsilon, t, x, y, z) &= \psi^{(0)}(t, x, y, z) + \epsilon \psi^{(1)}(t, x, y, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \psi^{(j)}(t, x, y, z) &:= \sum_{\tilde{N}} S_{\tilde{N}}(x, y, z) A_{\tilde{N}}^{(j)}(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

ここで $\tilde{N} := (N, n_z)$ は我々がモードと呼ぶものである。 $S_{\tilde{N}}$ は §2.2.1 で定義されている。前章までと同様にこの展開を正則摂動展開と呼び、 $A_{\tilde{N}}$ をモード振幅と呼ぶことにする。この展開は任意の ϵ で空間境界条件、(56)、を厳密に満足することも前章までの解析と同じである。

(55) を ϵ で展開して $\psi^{(j)}$ の満足する方程式が得られる。その方程式から各モード振幅、 $A_{\tilde{N}}^{(j)}$ 、を満たす方程式を求めるには以下の恒等式が用いられる

$$A_{\tilde{N}}^{(j)}(t) = \frac{2^3}{L_x L_y L_z} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx \int_{-L_y/2}^{L_y/2} dy \int_0^{L_z} dz S_{\tilde{N}}(x, y, z) \psi^{(j)}(t, x, y, z). \quad (59)$$

5.1 非摂動解

ϵ に関して 0 次のシュレーディンガー方程式は

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta^{(0)} \right) \psi^{(0)}(t, x, y, z) = 0, \quad (60)$$

ここで $\Delta^{(0)}$ は (3) にて定義されている。(6) と (59) を用いて $A_{\tilde{N}}^{(0)}$ に関する方程式に書き直すことができ

$$\frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(0)} + \frac{i\hbar}{2m} \lambda_{\tilde{N}}^2 A_{\tilde{N}}^{(0)} = 0, \quad \lambda_{\tilde{N}} := \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L_z} \right)^2}.$$

この解は

$$A_{\tilde{N}}^{(0)}(t) = A_{\tilde{N}}^{(0)}(0) \exp \left(-\frac{i\hbar}{2m} \lambda_{\tilde{N}}^2 t \right), \quad (61)$$

ここで $A_{\tilde{N}}^{(0)} \in \mathbb{C}$ は積分定数である。

エネルギースペクトルはこの非摂動系では以下のシステムから得られる

$$E_{\tilde{N}}^{(0)} \psi_{\tilde{N}}^{(0)} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\tilde{N}}^{(0)}, \quad \psi_{\tilde{N}}^{(0)}(t, x, y, z) := S_{\tilde{N}}(x, y, z) A_{\tilde{N}}^{(0)}(t).$$

これにより各モードでのエネルギー固有値は

$$E_{\tilde{N}}^{(0)} = \frac{\hbar^2}{2m} \lambda_{\tilde{N}}^2.$$

5.2 1 次の正則摂動解

ϵ に関して 1 次の方程式は

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta^{(0)} \right) \psi^{(1)} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(2x\kappa_0(z) \frac{\partial^2 \psi^{(0)}}{\partial z^2} + x\kappa'_0(z) \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} - \kappa_0(z) \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} \right),$$

モード振幅で書き直すと

$$\frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(1)} + \frac{i\hbar}{2m} \lambda_{\tilde{N}}^2 A_{\tilde{N}}^{(1)} = \frac{i\hbar}{2m} \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n'_y} G_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} A_{\tilde{N}'}^{(0)}(t). \quad (62)$$

ここで

$$G_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} = -\langle x \rangle_{S_{n_x}, S_{n'_x}} \left\{ 2 \left(\frac{\pi n'_z}{L_z} \right)^2 \langle \kappa_0 \rangle_{S_{n_z}, S_{n'_z}}^{(z)} - \frac{\pi n_z}{L_z} \langle \kappa'_0 \rangle_{S_{n_z}, C_{n'_z}}^{(z)} \right\}, \quad \in \mathbb{R}$$

であり、 $\langle \dots \rangle^{(\dots)}$ は (16)、(17) と (18) で定義されている。

(61) を (62) へ代入したのち以下の解が求まる

$$A_{\tilde{N}}^{(1)}(t) = \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n'_y} \left\{ R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} G_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} \frac{i\hbar}{2m} t A_{\tilde{N}'}^{(0)}(0) \exp\left(-\frac{i\hbar \lambda_{\tilde{N}}^2}{2m} t\right) \right. \\ \left. + N_{\tilde{N}, \tilde{N}'} G_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} \frac{A_{\tilde{N}'}^{(0)}(0)}{\lambda_{\tilde{N}}^2 - \lambda_{\tilde{N}'}^2} \exp\left(-\frac{i\hbar \lambda_{\tilde{N}'}^2}{2m} t\right) \right\}, \quad (63)$$

ここで $R_{\tilde{N}, \tilde{N}'}$ と $N_{\tilde{N}, \tilde{N}'}$ は

$$R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} := \delta_{\lambda_{\tilde{N}}, \lambda_{\tilde{N}'}}, \quad N_{\tilde{N}, \tilde{N}'} := 1 - \delta_{\lambda_{\tilde{N}}, \lambda_{\tilde{N}'}},$$

で定義されている。波動方程式の場合と同様、共鳴条件 $R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} = 1$ が満足されていると永年項 ($\propto t$ となる項) が現れることに注意されたい。

5.3 くりこみ ～ 永年項の処理 ～

この章ではくりこみ方程式を正則摂動解に現れる永年項を処理することにより導出し特別ば場合においてその解のあらわな形を求めエネルギー固有値を近似的に求める。

まず (63) に現れる永年項を集めるために以下の多項式を定義する

$$A_{\tilde{N}}^{(pol)}(t) := A_{\tilde{N}}^{(0)}(0) + \epsilon t \frac{i\hbar}{2m} \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n'_y} R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} G_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} A_{\tilde{N}'}^{(0)}(0). \quad (64)$$

この定義から正則摂動解は近似的に以下のように書くことができる

$$A_{\tilde{N}}(t) = A_{\tilde{N}}^{(pol)}(t) \exp\left(-\frac{i\hbar}{2m} \lambda_{\tilde{N}}^2 t\right) + (\text{NT}) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

§3.3 で示した手続きに従い (64) から くりこみ方程式を得る

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(ren)} &= \epsilon \frac{i\hbar}{2m} \sum_{\tilde{N}'} \delta_{n_y, n'_y} R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} G_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} A_{\tilde{N}'}^{(ren)} \\ &= \epsilon \frac{i\hbar}{2m} R_{\tilde{N}, \tilde{N}} G_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)} A_{\tilde{N}}^{(ren)} + \epsilon \frac{i\hbar}{2m} \sum_{\tilde{N}' (\neq \tilde{N})} \delta_{n_y, n'_y} R_{\tilde{N}, \tilde{N}'} G_{\tilde{N}, \tilde{N}'}^{(1)} A_{\tilde{N}'}^{(ren)}. \end{aligned} \quad (65)$$

ここで二番目の等式で注目するモードとそれ以外のモード振幅の寄与を分けておいた。

注目するモードが他のモードと共鳴しない特殊な場合があるとする。その場合 (65) の右辺の他モードからの寄与はゼロになるので

$$\frac{d}{dt} A_{\tilde{N}}^{(ren)} = \epsilon \frac{i\hbar}{2m} G_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)} A_{\tilde{N}}^{(ren)},$$

となりその解はただちに

$$A_{\tilde{N}}^{(ren)}(t) = A_{\tilde{N}}^{(ren)}(0) \exp\left(\epsilon t \frac{i\hbar}{2m} G_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)}\right).$$

変数 ψ で書き直すと

$$\begin{aligned}\psi(\epsilon, t, x, y, z) &= \sum_{\tilde{N}} S_{\tilde{N}}(x, y, z) A_{\tilde{N}}^{(ren)}(t) \exp\left(-\frac{i\hbar}{2m} \lambda_{\tilde{N}}^2 t\right) + (\text{NT}) \\ &= \sum_{\tilde{N}} S_{\tilde{N}}(x, y, z) A_{\tilde{N}}^{(ren)}(0) \exp\left\{\frac{i\hbar}{2m} \left(-\lambda_{\tilde{N}}^2 + \epsilon G_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)}\right) t\right\} + (\text{NT}).\end{aligned}$$

エネルギーを求めるため関係式

$$E\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi,$$

により近似的なエネルギースペクトルを以下のように得る

$$E_{\tilde{N}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\lambda_{\tilde{N}}^2 - \epsilon G_{\tilde{N}, \tilde{N}}^{(1)} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

ここでくりこみ方程式の解に現れる積分定数 $A_{\tilde{N}}^{(ren)}(0)$ は規格化条件 (57) により決定される。

6 結語

本講究録を通して 2 次元断面を一定に保って中心軸が緩やかに曲がったパイプ内の線形方程式の振舞を摂動法をもちいて解析した。中心軸は平面曲線で与えられている場合に限った議論を今回行ったが中心軸が空間曲線で与えられる場合（すなわち振率がゼロでは無い場合）でも殆ど議論は同じである。2 次元断面の形が円形と長方形の場合を取り扱ったがそれは 2 次元断面上のラプラシアン固有関数が既知であるからである。今回の研究以外の境界条件、例えば境界で微分がゼロのノイマン型の境界条件、を課す場合では断面が長方形の場合 $\sin$ から $\cos$ 、円形の場合は J_n から J'_n のように 2 次元ラプラシアンの固有関数を取り換えることから計算を始めればよい。本研究によりパイプの中心軸が曲がっていることにより線形方程式でさえ正則摂動解の適用により永年項が生じることを明示した。その永年項の処理を今回はくりこみ法と呼ばれる方法で消去し簡約方程式系（または振幅方程式）を得たが、くりこみ法以外でも永年項の処理は可能であろう。本講究録ではくりこみ方程式が簡単に解ける場合に限りその解をあらわに構成したが、その結果、パイプの中心軸の曲がりにより各モードごとの時間的な周波数がシフトすることをみた。量子系については 2 次元断面が長方形の場合のみを本講究録で計算したが円形の場合も計算が繁雑になるものの同じ手順で解析ができるであろう。今回取り扱った線形方程式を超えて弱非線型の問題を取り扱う場合、くりこみ方程式の右辺にパイプの曲がりによる永年項のほかに非線型共鳴による共鳴項が現れる。

今後の方向性として (A) ここでの議論をもとにした物理系の解析の他、(B) 変分法等を基礎にした急激に曲がったパイプ内の線形方程式の解析法の開発や、(C) 繁雑な摂動解析を簡便にしたり、(D) メトリックの詳細に依らない方法の開発、等があげられるであろう。この研究を基礎に曲がった空間境界をもつ物理系を解析するための手法の開発が進むことを期待したい。

7 Appendix

この補遺では正則摂動解の導出のために用いた公式を示しておく。次の問題

$$\ddot{A} + \Omega^2 A = (\alpha_1^{(-)} t + \alpha_0^{(-)}) e^{-i\Omega t} + (\alpha_1^{(+)} t + \alpha_0^{(+)}) e^{i\Omega t}, \quad (66)$$

と

$$\ddot{A} + \Omega^2 A = (\beta_1^{(-)} t + \beta_0^{(-)}) e^{-i\Omega' t} + (\beta_1^{(+)} t + \beta_0^{(+)}) e^{i\Omega' t}, \quad (67)$$

を考えるここで $\dot{}$ は時間 t での微分を表し、 $\alpha_j^{(\pm)}, \beta_j^{(\pm)} \in \mathbb{C}$ と $\Omega, \Omega' (\neq \pm\Omega) \in \mathbb{R}$ は与えられた定数であるとする。

(66) に対する解は以下で与えられる

$$A(t) = \left\{ \frac{\alpha_1^{(-)}}{-4i\Omega} t^2 + \left(\frac{\alpha_0^{(-)}}{-2i\Omega} + \frac{\alpha_1^{(0)}}{4\Omega^2} \right) t \right\} e^{-i\Omega t} + \left\{ \frac{\alpha_1^{(+)}}{4i\Omega} t^2 + \left(\frac{\alpha_0^{(+)}}{2i\Omega} + \frac{\alpha_1^{(0)}}{4\Omega^2} \right) t \right\} e^{i\Omega t}.$$

同様に (67) に対する解は

$$\begin{aligned} A(t) = & \left\{ \frac{\beta_1^{(-)}}{\Omega^2 - \Omega'^2} t + \frac{\beta_0^{(-)}}{\Omega^2 - \Omega'^2} + 2i\Omega' \frac{\beta_1^{(-)}}{(\Omega^2 - \Omega'^2)^2} \right\} e^{-i\Omega' t} \\ & + \left\{ \frac{\beta_1^{(+)}}{\Omega^2 - \Omega'^2} t + \frac{\beta_0^{(-)}}{\Omega^2 - \Omega'^2} - 2i\Omega' \frac{\beta_1^{(+)}}{(\Omega^2 - \Omega'^2)^2} \right\} e^{i\Omega' t}. \end{aligned}$$

References

- [1] S. Goto, J. Phys. A:Math.Theor. **42**, 445205 (2009). およびその中の引用文献。
- [2] S. Goto, Unpublished.
- [3] 例えば、萩上「多様体」共立出版、中原「理論物理学のための幾何学とトポロジー I」ピアソン等を参照。
- [4] S. Goto, et al, Prog. Theor. Phys. **102**, 471 (1999). なお、オリジナルなくりこみ法の文献は L.-Y. Chen et al, Phys. Rev. E **54**, 376, (1996)。また数学的にくりこみ法を整備した論文として例えば H. Chiba, SIAM J. on Appl. Dyn.Syst. **8**, 1066 (2009) を挙げておく。