

Vasicek モデルのひとつの拡張

広島大学・大学院理学研究科 井上 昭彦 (Akihiko Inoue)
Graduate School of Science, Hiroshima University

備前緑陽高校 森内 慎吾 (Shingo Moriuchi)
Bizen-Ryokuyou High School

広島大学・大学院理学研究科 仲村 勇祐 (Yusuke Nakamura)
Graduate School of Science, Hiroshima University

1 イントロダクション

Vasicek モデル ([6]) は古典的な短期金利モデルであり, 短期金利過程 $\{r(t)\}$ を記述する次の確率微分方程式 (SDE) により定義される:

$$dr(t) = \{a - br(t)\}dt + \sigma dW^*(t) \quad (t \geq 0). \quad (1.1)$$

ここで, a, b, σ は正の定数で, $\{W^*(t)\}$ は同値マルチンゲール測度の下でのブラウン運動である. 我々は, 記憶の効果を持つ Vasicek タイプの短期金利モデル $\mathcal{M}$ を導入する. このモデルはいくつかのよい性質を持つ.

上記の Vasicek タイプ・モデル $\mathcal{M}$ は, (1.1) のブラウン運動 $\{W^*(t)\}$ を, $[1, 2, 3]$ によって研究された確率過程 $\{Z(t)\}$ に置き換えることにより定義される (下の定義 2.1 を見よ). 過程 $\{Z(t)\}$ はガウス・定常増分過程であり, 記憶の効果を表すパラメータ p, q を持つ. 過程 $\{Z(t)\}$ は, 同じガウス・定常増分過程であるフラクショナル・ブラウン運動等とは異なり, 伊藤過程でもある. このことは, モデル $\mathcal{M}$ に対しては, 通常確率解析 (伊藤解析) を適用できることを意味する.

我々は, モデル $\mathcal{M}$ と $0 \leq t \leq T$ に対して, T -債券とよばれる満期が T のゼロ・クーポン債の, 時刻 t における価格 $P(t, T)$ の明示的な表現を導く (下の定理 3.1). この結果とフォワード測度を用いるよく知られた方法 (cf. [5], [4, 第 3.2.4 節]) により, ヨーロピアン・タイプの債券オプションに対する明示的な表現も導く (下の命題 3.4).

$P(t, T)$ に対する明示的な表現式は,

$$Y(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T-t} \quad (t < T), \quad (1.2)$$

あるいは $P(t, T) = \exp[-(T-t)Y(t, T)]$, によって定義されるイールド $Y(t, T)$ に対する明示的な表現式も与える (下の定理 3.2). 他の短期金利モデルの場合と同様に, イールド曲線 $T \mapsto Y(0, T)$ を現実の市場データにフィットさせることにより, モデル $\mathcal{M}$ のパラメータの推定を行うことができる. 新しく加わったパラメータ p と q により, モデル $\mathcal{M}$ では, 古典的な Vasicek モデルよりも良いフィットを得ることができる (第 5 節).

モデル $\mathcal{M}$ は記憶の効果を持つ. 言い換えるならば, モデル $\mathcal{M}$ は非マルコフ・モデルである. 一般に, 非マルコフの金利モデルは, 数値計算を実行することが難しいという欠点を持つ. 幸いにして, モデル $\mathcal{M}$ はこの欠点を免れている. これは, ある付随する 2

次元マルコフ過程の存在による。この付随するマルコフ過程のおかげで、我々は通常の数値計算法を適用できることになる。実際、我々は、この付随するマルコフ過程を用いてモデル $\mathcal{M}$ に対するアフィン期間構造や期間構造方程式 (cf. [4, 第3章]) の類似物を導き (下の定理 4.1 と命題 4.2), それらに基づくヨーロッパ・タイプの条件付き請求権の価格の数値計算法を示す (第4節)。

2 モデル

$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ は、完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上の標準ブラウン運動 $\{W^*(t)\}_{t \geq 0}$ から生成されるフィルトレーションの Q -augmentation とする。

定義 2.1. 条件

$$0 < q < \infty, \quad -q < p < \infty$$

を満たす実数 p, q に対し、確率過程 $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ を次で定義する：

$$Z(t) = W^*(t) - \int_0^t \left\{ \int_0^s p e^{-(p+q)(s-\tau)} l(\tau) dW^*(\tau) \right\} ds \quad (t \geq 0).$$

ここで、正值関数 l は次で定義する：

$$l(\tau) := 1 - \frac{2qp}{(p+2q)^2 e^{2q\tau} - p^2} \quad (\tau \geq 0).$$

すぐに分かるように、 $\{Z(t)\}$ は連続ガウス過程かつ $\{\mathcal{F}_t\}$ -発展的伊藤過程である。さらに、自明ではないが、 $\{Z(t)\}$ は実は定常増分過程でもある。実際、 $\{\hat{W}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ を別の確率空間 $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{Q})$ 上の標準ブラウン運動とするととき、

$$X(t) = \hat{W}(t) - \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^s p e^{-(p+q)(s-\tau)} d\hat{W}(\tau) \right\} ds \quad (t \geq 0)$$

で定義される定常増分過程 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ に対し、 $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ の Q 下での法則は、 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ の $\hat{Q}$ の下での法則に等しい ([2] の Theorem 5.2 と Example 5.3 および [3] の Section 2 を参照せよ)。もし $p = 0$ ならば、 $\{Z(t)\}$ はブラウン運動 $\{W^*(t)\}$ に帰着する。

$a, b, \sigma \in (0, \infty)$ に対して、次の Vasicek タイプの SDE を考える：

$$dr(t) = \{a - br(t)\}dt + \sigma dZ(t), \quad t \geq 0, \quad r(0) \in [0, \infty). \quad (2.1)$$

(2.1) の一意の強解は、次のように表される：

$$r(\tau) = e^{-b(\tau-t)}r(t) + \frac{a}{b}(1 - e^{-b(\tau-t)}) + \sigma \int_t^\tau e^{-b(\tau-s)} dZ(s) \quad (0 \leq t \leq \tau). \quad (2.2)$$

短期金利過程 $\{r(t)\}_{t \geq 0}$ が、(2.1) あるいは (2.2) に従う短期金利モデル $\mathcal{M}$ を考える。我々はマネー・マーケット・アカウント過程 $\{B(t)\}$ を次で定義する：

$$B(t) := e^{\int_0^t r(s)ds} \quad (t \geq 0).$$

$T \in (0, \infty)$, $0 \leq t \leq T$ に対し、 T -債券の時間 t における価格を $P(t, T)$ とする。 Q は、

$$\tilde{P}(t, T) := \frac{P(t, T)}{B(t)} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.3)$$

が $\{Q, \mathcal{F}_t\}$ -マルチンゲールになるという意味での, $\mathcal{M}$ の同値マルチンゲール測度であるとみなす. すると, 次が成り立つ:

$$P(t, T) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (0 \leq t \leq T). \quad (2.4)$$

以上のような金利モデルの一般論については, [4, 第3章] を見よ.

注意 1. $p = 0$ ならば, $Z(t) = W^*(t)$ より $\mathcal{M}$ は古典的な Vasicek モデルに帰着する.

3 債券と債券オプションの価格

(2.1) によって定義される短期金利過程 $\{r(t)\}$ は非マルコフであるが, モデル $\mathcal{M}$ において $P(t, T)$ は明示的な表現を持つ. この結果を述べるために, 次の関数を定義する:

$$m(t) := \int_0^t p e^{-(p+q)s} \{1 - e^{-b(t-s)}\} ds.$$

定理 3.1. 次が成り立つ:

$$P(t, T) = \exp \{-A(t, T) - C(t, T)r(t) + U(t, T)\} \quad (0 \leq t \leq T).$$

ここで,

$$\begin{aligned} C(t, T) &:= \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}, \\ A(t, T) &:= \frac{a}{b} \{T - t - C(t, T)\} - \frac{\sigma^2}{2b^2} \int_0^{T-t} \{m(s) + e^{-bs} - 1\}^2 ds \\ &\quad - \frac{\sigma^2 q m^2(T-t)}{b^2 \{(p+2q)^2 e^{2qt} - p^2\}}, \\ U(t, T) &:= \frac{\sigma(p+2q)^2 e^{qt} m(T-t)}{b \{(p+2q)^2 e^{2qt} - p^2\}} \int_0^t \left(e^{qs} - \frac{p}{p+2q} e^{-qs} \right) dZ(s). \end{aligned}$$

定理 3.1 から, (1.2) で定義されるイールド $Y(t, T)$ に対する次の定理が得られる.

定理 3.2. 次が成り立つ:

$$Y(t, T) = \frac{A(t, T)}{T-t} + \frac{C(t, T)}{T-t} r(t) - \frac{U(t, T)}{T-t} \quad (0 \leq t < T).$$

特に,

$$Y(0, T) = \frac{A(0, T)}{T} + \frac{C(0, T)}{T} r(0) \quad (T > 0). \quad (3.1)$$

$\tilde{P}(t, T)$ は (2.3) で定義されていたことを思い出そう.

命題 3.3. $\{\tilde{P}(t, T)\}_{0 \leq t \leq T}$ は, SDE

$$d\tilde{P}(t, T) = v(t, T) \tilde{P}(t, T) dW^*(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.2)$$

を満たす. ここで $v(t, T)$ は次で定義される確定的な関数である:

$$v(t, T) := \frac{\sigma}{b} \{e^{-b(T-t)} - 1 + l(t)m(T-t)\} \quad (0 \leq t \leq T).$$

T -債券の上に書かれた満期 $S \in (0, T)$, 行使価格 $K \in (0, \infty)$ のヨーロピアン・コール・オプション C を考える. $\pi_C(0)$ を C の時間 0 における価格とする:

$$\pi_C(0) = E^Q \left[e^{-\int_0^S r(s)ds} (P(S, T) - K)_+ \right].$$

ここで, $(x)_+ := \max(x, 0)$ である. Φ を標準正規分布の分布関数とする:

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)y^2} dy.$$

命題 3.3 とフォワード測度を用いる方法 (cf. [5], [4, 第 3.2.4 節]) により, 直ちに次が得られる.

命題 3.4. 次が成り立つ:

$$\pi_C(0) = P(0, T)\Phi(d_+) - KP(0, S)\Phi(d_-).$$

ここで,

$$\begin{aligned} d_+ &:= \frac{1}{\sqrt{\Sigma^2(S)}} \left\{ \log \left(\frac{P(0, T)}{KP(0, S)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma^2(S) \right\}, \\ d_- &:= d_+ - \sqrt{\Sigma^2(S)}, \quad \Sigma^2(S) := \int_0^S v_{S,T}^2(t) dt, \\ v_{S,T}(t) &:= \frac{\sigma}{b} \{ e^{-b(T-t)} - e^{-b(S-t)} + l(t)(m(T-t) - m(S-t)) \}. \end{aligned}$$

4 2次元マルコフ過程への埋め込み

確率過程 $\{u(t)\}$ を次で定義する:

$$u(t) := \int_0^t e^{(p+q)s} l(s) dW^*(s) \quad (t \geq 0).$$

すると, 2次元確率過程 $\{(r(t), u(t))^T\}$ は次の SDE を満たすことがわかる:

$$d \begin{pmatrix} r(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & \sigma p e^{-(p+q)t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\} dt + \begin{pmatrix} \sigma \\ e^{(p+q)t} l(t) \end{pmatrix} dW^*(t).$$

従って $\{(r(t), u(t))^T\}$ は 2次元マルコフ過程であるので, (2.4) によって定義される $P(t, T)$ は $P(t, T) = F(t, r(t), u(t); T)$ という形の表現を持つはずである. 次の定理はそのような明示表現を与える. この表示は, モデル $\mathcal{M}$ に対するアフィン期間構造 (cf. [4, 第 3.3.2 節]) の類似物とみなすことができる.

定理 4.1. 次が成り立つ:

$$P(t, T) = F(t, r(t), u(t); T) \quad (0 \leq t \leq T).$$

ここで,

$$\begin{aligned} F(t, x, y; T) &:= e^{-A(t, T) - C(t, T)x + D(t, T)y} \quad ((t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \\ D(t, T) &:= \frac{\sigma}{b} e^{-(p+q)t} m(T-t). \end{aligned}$$

モデル $\mathcal{M}$ におけるヨーロピアン・タイプの条件付き請求権については、次が期間構造方程式 (cf. [4, 第 3.3.1 節]) の役割を果たす。

命題 4.2. $S \in (0, \infty)$ とし, $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $G: [0, S] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする. G は $C^{1,2,2}([0, S] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ に属し, 次を満たすと仮定する:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t}(t, x, y) + \mathcal{L}G(t, x, y) = 0 & ((t, x, y) \in [0, S] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \\ G(S, x, y) = g(x, y) & ((x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}). \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで,

$$\mathcal{L}G := \frac{\sigma^2}{2} G_{xx} + \sigma e^{(p+q)t} l(t) G_{xy} + \frac{\{e^{(p+q)t} l(t)\}^2}{2} G_{yy} + \{a - bx - p\sigma e^{-(p+q)t} y\} G_x - xG.$$

さらに,

$$\int_0^S E^Q \left[e^{-2 \int_0^t r(s) ds} \{ \Delta G(t, r(t), u(t)) \}^2 \right] dt < \infty$$

が成り立つと仮定する. 但し,

$$\Delta G := \sigma G_x + e^{(p+q)t} l(t) G_y$$

とする. この時, 次が成り立つ:

$$E^Q \left[e^{-\int_t^S r(s) ds} g(r(S), u(S)) \middle| \mathcal{F}_t \right] = G(t, r(t), u(t)) \quad (0 \leq t \leq S). \quad (4.2)$$

$0 < S \leq T$ と連続関数 $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 満期が S でペイオフが $h(P(S, T))$ のヨーロピアン・タイプの条件付き請求権を考える. $h(P(S, T)) = h(F(S, r(S), u(S); T))$ より, 時刻 $t \in [0, S]$ におけるその価格は, $g(x, y) := h(F(S, x, y; T))$ のときの (4.2) の左辺により与えられる. 従って, 命題 4.2 より, その価格評価は PDE (4.1) を数値的に解くことに帰着される.

例. ヨーロピアン・コール・オプション $(P(S, T) - K)_+$ を考える. Figure 1 は,

$$T = 5, \quad K = 0.6, \quad r(0) = 0.025, \quad a = 0.047, \quad b = 0.94, \quad \sigma = 0.16, \quad p = 0.1, \quad q = 0.02$$

で $g(x, y) = (F(S, x, y; T) - K)_+$ の場合の PDE (4.1) を有限差分法により数値的に解いた結果 $G(0, r(0), 0)$ を, 命題 3.4 のコール・オプション価格の厳密解と比較したものである. 多少のずれは, 有限差分法の改良の余地を示唆しているものと考えている.

5 パラメータの推定

市場のイールドのデータから, モデル $\mathcal{M}$ のパラメータの推定を, 最小二乗法

$$\sum_{i=1}^n \{y(0, T_i) - Y(0, T_i)\}^2,$$

を用いて行う. ここで, $y(0, T)$ は市場で観測された T -債券のイールド, $Y(0, T)$ は, (3.1) で与えられるイールドの理論式である.

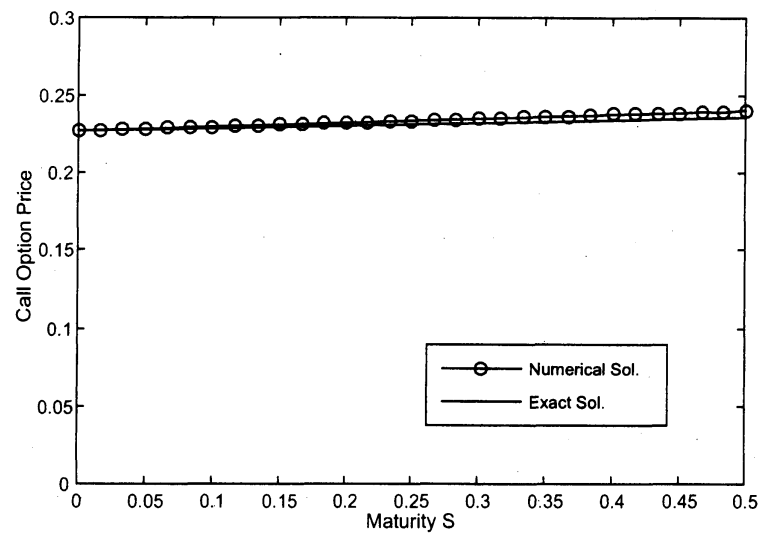


Figure 1: コール・オプション価格

$y(0, T)$ の例として、米財務省の HP にある 2005 年 12 月 19 日時点の米国債のイールドを用いる。 $n = 10$ で

$$T_1 = \frac{1}{12}, T_2 = \frac{3}{12}, T_3 = \frac{6}{12}, T_4 = 1, T_5 = 2, T_6 = 3, T_7 = 5, T_8 = 7, T_9 = 10, T_{10} = 20$$

(単位は年) とする。この場合のパラメータの推定値は、以下の通りである：

$$a = 0.1198, b = 1.5451, \sigma = 0.4215, p = 0.0144, q = 0.0465, r(0) = 0.0335.$$

Figure 2 では、この市場のデータと、それらに (3.1) および古典的な Vasicek モデルのイールド曲線をそれぞれフィットさせた結果を、図示している。

次に、 $y(0, T)$ として 2013 年 11 月 27 日時点の米国債のイールドを用いる。この場合のパラメータの推定値は、

$$a = 0.0193, b = 0.4299, \sigma = 0.3175, p = 0.8447, q = 0.0600, r(0) = 1.0000 \times 10^{-5}$$

となり、結果は Figure 3 に図示されている。

最後に、 $y(0, T)$ として 2006 年 12 月 1 日時点の米国債のイールドを用いる。この場合のパラメータの推定値は、

$$a = 0.1019, b = 1.7839, \sigma = 0.3407, p = 0.0468, q = 0.1011, r(0) = 0.0510$$

となり、結果は Figure 4 に図示されている。

参考文献

- [1] Anh, V., and A. Inoue. 2005. Financial markets with memory I: Dynamic models. *Stochastic Anal. Appl.* 23:275–300.

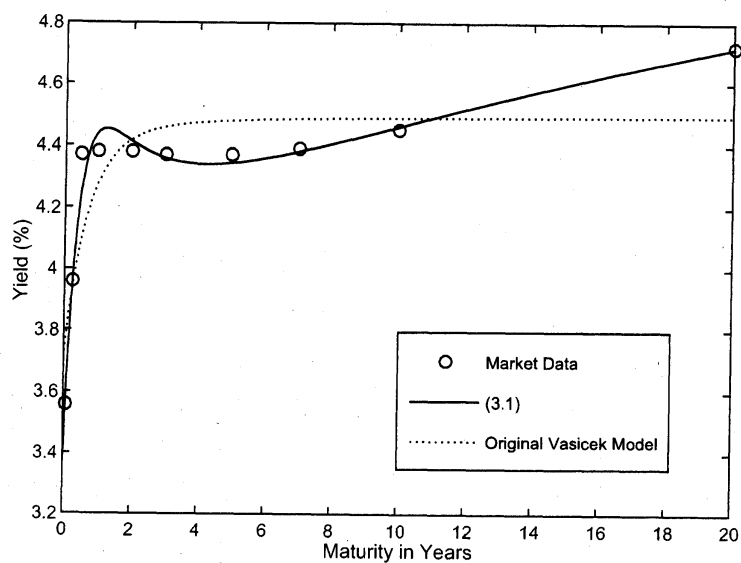


Figure 2: 2005 年 12 月 19 日のイールド曲線

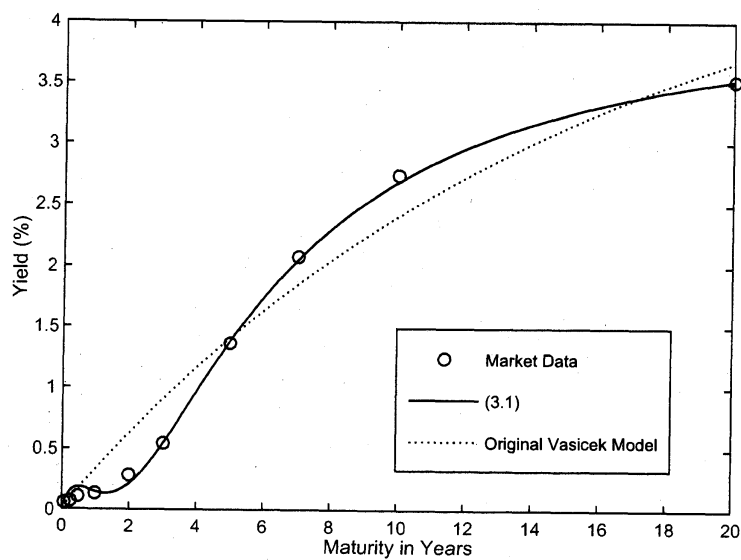


Figure 3: 2013 年 11 月 27 日のイールド曲線

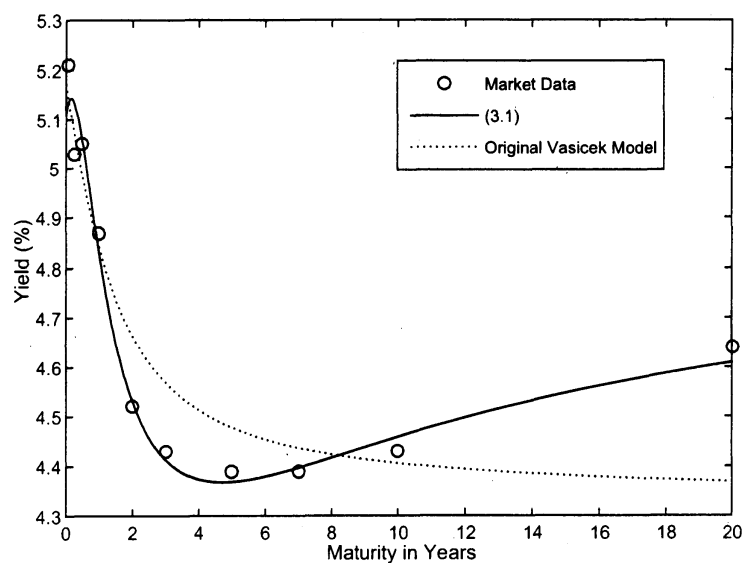


Figure 4: 2006 年 12 月 1 日のイールド曲線

- [2] Anh, V., A. Inoue and Y. Kasahara. 2005. Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization. *Stochastic Anal. Appl.* 23:301–328.
- [3] Inoue, A., Y. Nakano and V. Anh. 2006. Linear filtering of systems with memory and application to finance. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* Art. ID 53104, 26 pp.
- [4] 井上昭彦, 中野張, 福田敬, ファイナンスと保険の数理, 岩波書店, 2014.
- [5] Jamshidian, F. 1989. An exact bond option pricing formula. *J. Finance.* 44:205–209.
- [6] Vasicek, O. 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *J. Finan. Econom.* 5:177–188.