

Homotopy spheres 上の Z_r -action について

東大 大学院 松江 広文

§ 1. 序

homotopy $(n+2)$ -sphere Σ^{n+2} 上の smooth semi free Z_r -action (但し、 Z_r は order r の cyclic gp.) で fixed pt. set として homotopy n -sphere Σ^n を持つもので、 Σ^n が Σ^{n+2} の中で knot しているものを construct する。

Giffen [2], Su [4], Tamura [5], により既に上記の action は construct されているが彼らとは別の方法で construct する。

§ 2. 主定理とその応用

$a_i \geq 2$ を integer として、複素 $(n+2)$ -変数の polynomial を

$$f(z_1, \dots, z_{n+2}) = (z_1)^{a_1} + \dots + (z_{n+2})^{a_{n+2}}$$

とする。

$$S^{2n+3} \stackrel{\text{def}}{=} \{(z_1, \dots, z_{n+2}) \in \mathbb{C}^{n+2} \mid z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_{n+2} \bar{z}_{n+2} = 1\}$$

Brieskorn manifold $f^{-1}(0) \cap S^{2n+3}$ を K^{2n+1} と書く。

$$K^{2n-1} \stackrel{\text{def}}{=} K^{2n+1} \cap \{z_{n+2} = 0\}$$

すると次の定理が得える。

< Theorem A > $n \geq 2$ とする時

$$\pi_n(K^{2n+1} - K^{2n-1}) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$$

$$((a_1 - 1) \dots (a_{n+1} - 1)) \text{ の } \mathbb{Z} \text{ の直和}$$

この定理の応用として序で述べた action が次のように construct される。

$r \geq 2$ を任意の integer, $p, q \geq 3$ を odd integer で 次の条件(*)を満たすものとする。

条件(*) 最大公約数 $(p, q) = (p, r) = (q, r) = 1$

$$f(z) = z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2 + z_n^p + z_{n+1}^q + z_{n+2}^r$$

$n \geq 3$ とした時 Brieskorn [1] より

次の2つの Brieskorn manif. $f^{-1}(0) \cap S^{2n+3}$,
 $f^{-1}(0) \cap S^{2n+3} \cap \{z_{n+2} = 0\}$ は homotopy sphere.

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}(0) \cap S^{2n+3} &= \Sigma_{(p,q,r)}^{2n+1} \\ \Sigma_{(p,q,r)}^{2n+1} \cap \{z_{n+2}=0\} &= \Sigma_{(p,q)}^{2n-1} \end{aligned} \right\} \text{と書く.}$$

<Theorem A> より

$$\pi_n(\Sigma_{(p,q,r)}^{2n+1} - \Sigma_{(p,q)}^{2n-1}) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$$

((p-1)(q-1) の直和).

故に $(\Sigma_{(p,q,r)}^{2n+1}, \Sigma_{(p,q)}^{2n-1})$ は *homotopy spheres* の *smooth knot*.

$$\alpha: \Sigma_{(p,q,r)}^{2n+1} \rightarrow S^1$$

$$\alpha(z_1, \dots, z_{n+1}, z_{n+2}) \stackrel{\text{def}}{=} (z_1, \dots, z_{n+1}, \varepsilon z_{n+2})$$

と定義する。但し $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{r}}$ 。

α により, $\Sigma_{(p,q)}^{2n-1}$ を *fixed pt. set* とする

$\Sigma_{(p,q,r)}^{2n+1}$ 上の *smooth semi free* $\mathbb{Z}_r$ -action が *construct* される。

各 $r \geq 2$ に対し (条件*) を満たし $(p-1)(q-1)$

が異なる 113113 なる *odd integer* $p, q \geq 3$ を

とするとにより次の事が云える。

<Theorem B> knotted fixed pt. set Σ^{2n-1} をもつ, Σ^{2n+1} 上の *smooth semi free* $\mathbb{Z}_r$ -action で無限個異なる (*topological* に) ものが存在する。但し $n \geq 3, r \geq 2$ 。

§3. <Theorem A>の証明

$$f(z_1, \dots, z_{n+2}) = (z_1)^{a_1} + \dots + (z_{n+2})^{a_{n+2}} \text{ に対し}$$

$$\tilde{f}(z_1, \dots, z_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} f(z_1, \dots, z_{n+1}, 0) \text{ とする。}$$

$$S^{2n+1} = S^{2n+3} \cap \{z_{n+2} = 0\} \text{ とすると}$$

$$\tilde{f}^{-1}(0) \cap S^{2n+1} = K^{2n-1}$$

Milnor [3] の smooth fibering

$$\phi: S^{2n+1} - K^{2n-1} \longrightarrow S^1$$

$$\phi: \begin{matrix} \cup \\ z \end{matrix} \longmapsto \tilde{f}(z) / |\tilde{f}(z)|$$

に対し, $S^1 \ni e^{i\theta}$ 上の fiber を F_θ とおく。

$$W^{2n} \stackrel{\text{def}}{=} K^{2n+1} \cap \{ \operatorname{Im} z_{n+2} = 0, \operatorname{Re} z_{n+2} > 0 \}$$

<Lemma. 1.>

$$W^{2n} \text{ と } F_\pi (= \phi^{-1}(-1)) \text{ は homeomorphic}$$

(証明)

$R: F_\pi \rightarrow W^{2n}$ を次のように定義する。

$$F_\pi \ni (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = z$$

$$R(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \left(\tau^{\frac{1}{a_1}} z_1, \tau^{\frac{1}{a_2}} z_2, \dots, \tau^{\frac{1}{a_{n+1}}} z_{n+1}, \tau^{\frac{1}{a_{n+2}}} |\tilde{f}(z)|^{\frac{1}{a_{n+2}}} \right)$$

ただし $R \ni \tau > 0$ は次の方程式を解いた値。

$$|z_1|^2 \tau^{\frac{2}{a_1}} + |z_2|^2 \tau^{\frac{2}{a_2}} + \dots + |z_{n+1}|^2 \tau^{\frac{2}{a_{n+1}}} + |\tilde{f}(z)|^{\frac{2}{a_{n+2}}} \tau^{\frac{1}{a_{n+2}}} = 1,$$

$\tau > 0$ なる値をとると1に12あるので,

τ は $F_\pi \ni z$ を fix すると unique に定まる。

又
$$\left. \begin{array}{ccc} F_{\pi} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ なる map は } \\ \text{continuous map.}$$

故に k は continuous map.

$\bar{k} : W^{2n} \rightarrow F_{\pi}$ を次のように定義する.

$W^{2n} \ni (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, x_{n+2}), \mathbb{R} \ni x_{n+2} > 0$

$\bar{k}(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, x_{n+2})$

$\stackrel{\text{def}}{=} \left(\lambda^{\frac{1}{a_1}} z_1, \lambda^{\frac{1}{a_2}} z_2, \dots, \lambda^{\frac{1}{a_{n+1}}} z_{n+1} \right)$

ただし $\mathbb{R} \ni \lambda > 0$ は次の方程式を解いた値.

$$|z_1|^2 \lambda^{\frac{2}{a_1}} + |z_2|^2 \lambda^{\frac{2}{a_2}} + \dots + |z_{n+1}|^2 \lambda^{\frac{2}{a_{n+1}}} = 1.$$

k と $\bar{k}$ の定義より, $k\bar{k} = \text{id}$, $\bar{k}k = \text{id}$

が云える. 故に W^{2n} と F_{π} は homeomorphic.

q. e. d.

*<Lemma. 2.>
$$\begin{array}{ccc} \psi : K^{2n+1} - K^{2n-1} & \longrightarrow & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z_1, \dots, z_{n+2}) & \longmapsto & z_{n+2}/|z_{n+2}| \end{array}$$

 なる map は smooth fibering

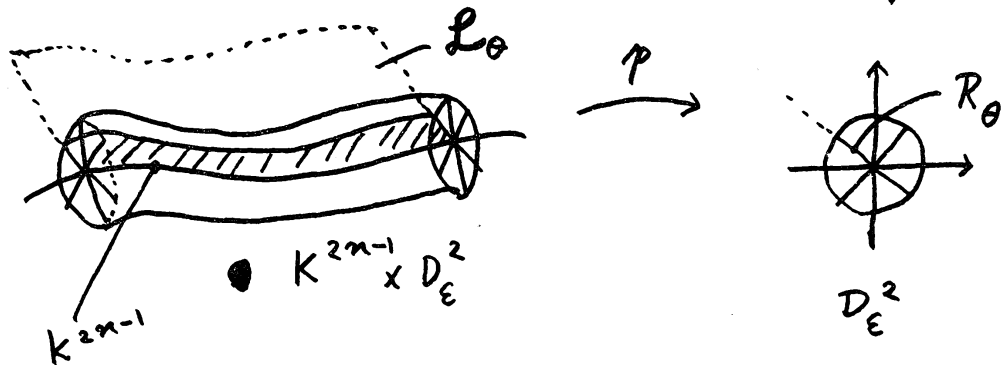
(証明)

$$\begin{array}{ccc} p : K^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z_1, \dots, z_{n+2}) & \longmapsto & z_{n+2} \end{array}$$

なる smooth map p に対し, $0 \in \{0\}$ は p の regular value.

$\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$: 十分小 に対し,

$D_\varepsilon^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \varepsilon\}$
 $p^{-1}(0) = K^{2n-1}$ 故 $p^{-1}(D_\varepsilon^2)$ は $K^{2n+1} \supset K^{2n-1}$
 の tub. nbhd. $K^{2n-1} \times D_\varepsilon^2$ である。
 $\psi : (K^{2n+1} - K^{2n-1} \times D_\varepsilon^2) : K^{2n+1} - K^{2n-1} \times D_\varepsilon^2 \rightarrow S^1$
 は onto submersion 故 smooth fibering.



$R_\theta = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 < r \leq \varepsilon\}$
 $L_\theta = \psi^{-1}(e^{i\theta})$ } とおく.
 (上 ☒)
 $L_\theta \cap K^{2n-1} \times D_\varepsilon^2 = p^{-1}(R_\theta)$
 故に $\psi : K^{2n+1} - K^{2n-1} \rightarrow S^1$
 は各 $e^{i\theta} \in S^1$ に対し L_θ を fiber とする
 smooth fibering.

q. e. d.

(<Theorem A> の証明.)

Lemma 2 の ψ の定義 と W^{2n} の定義より

$$W^{2n} = \psi^{-1}(1) (= L_0)$$

故に $K^{2n+1} - K^{2n-1} = E$ とおくと次の exact

sequence が fibering ψ より 云える.

$$\pi_{n+1}(S^1) \rightarrow \pi_n(W^{2n}) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(S^1)$$

$$n \geq 2 \text{ 故 } \pi_n(W^{2n}) \simeq \pi_n(E)$$

$n=3$ が Lemma 1 より W^{2n} は smooth fibering $\phi: S^{2n+1} - K^{2n-1} \rightarrow S^1$ の -1 の fiber $F_\pi (= \phi^{-1}(-1))$ に homeomorphic.

Milnor [3] に より F_π は $(a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{n+1}-1)$ 個の S^n の bouquet $S^n \vee \dots \vee S^n$ の homotopy type を持つ.

$$\text{故に } \pi_n(E) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$$

$((a_1-1)(a_2-1)\dots(a_{n+1}-1) \text{ 個の } \mathbb{Z} \text{ の直和}).$

q. e. d.

Remark.

<Theorem A> は 加藤 士人 達 が 云われた
 “ $K^{2n+1} - K^{2n-1}$ は $S^{2n+1} - K^{2n-1}$ 上の
 a_{n+2} -fold covering space になっている”
 と云う事 かも 云える.

----- references -----

[1]. E. Brieskorn,

Inventiones Math. 2, pp. 1-14 (1966)

- [2] C. H. Giffen,
Amer. J. of Math 88, pp. 187-198 (1966)
- [3] J. Milnor, "Singular pts of complex
hypersurfaces"
- [4] J. C. Su,
Proc. of the Conf. on Transf gr. pp. 193-204
- [5] I. Tamura,
J. of the Fac. of Sci. Univ. of Tokyo
Sect. 1. Vol. 16, pp. 101-114 (1969-1970)