

*On the  $p$ -rationality of  
lifted characters.*

大阪市大理 延里嘉保

$p$ -可解群に関する Fong-Swan の定理を考えると、次の結果は究極的な形を与えているといつてよい。

定理 (I. M. Isaacs)

$G$  は  $p$ -solvable,  $\varphi$  は  $G$  の irreducible Brauer character とする。このとき

- (i)  $\exists \chi \in \text{Irr}(G)$  such that  $\chi$  は  $p$ -rational で、  
 $\chi \equiv \varphi$  on  $p$ -regular elements. また  
 $p \neq 2$  なら  $\chi$  は unique
- (ii)  $p \neq 2$ ,  $\chi \in \text{Irr}(G)$  は  $p$ -rational で modularly irreducible とする。このとき、 $N \triangleleft G$ ,  $\chi_N > \zeta$  とすると、 $\zeta$  は  $p$ -rational で、modularly irreducible

さて、この定理の証明であるが、かなり難解である。

というわけで, Feit は次のことを示し, 簡単な証明を (つまり Fong の理論の範囲内での証明) 与えている。

(I)  $\chi \in \text{Irr}(G)$  が  $p$ -rational で modularly irreducible なる  $\ker \chi \supset O_p(G)$ . ただし  $p \neq 2$

(II) Fong の Second Reduction (Fong [2] の Theorem (2D)) における ordinary characters の間の一対一対応が,  $p$ -rationality を保存するとしてよい。

ただし, (II) の方は, その証明に少々怪しい所がある。

つまり, Feit [ ] の Chap. X に見られる命題 (1.1) の (ii) の部分の主張については, その証明がそのまま通用するとは思われない。とは言うものの, 次のことの成立が示され, Feit の目論見が O.K. であることに変わりはない。

命題.  $H$  は  $G$  の normal  $p'$ -subgroup,  $\theta \in \text{Irr}(G)$

は  $G$ -stable とする。  $|G||H|^2 = p^a m$ ,  $(p, m) = 1$

$K = Q(\zeta_m)$  ( $\zeta_m$  は 1 の原始  $m$ -乗根)

このとき, 次のような central extension

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

及び  $\tilde{\theta} \in \text{Irr}(\tilde{G})$  がとれる。

- (i)  $Z$  は cyclic で  $|Z|$  は  $|H|^2$  を割り切る。
- (ii)  $\exists \tilde{H} \triangleleft \tilde{G}$  such that  $\tilde{\theta}^{-1}(H) = \tilde{H}Z = \tilde{H} \times Z$
- (iii)  $\tilde{\theta}$  は  $K$  上 realizable で,  $\tilde{\theta}(\tilde{\kappa}) = \theta(\kappa) \quad \forall \tilde{\kappa} \in \tilde{H}$

Fait が主張しているのは、「 $|H|^2 = n$  としたとき,  $\tilde{\theta}$  が  $Q(\zeta_n)$  上 realizable にとれる。」ということであるが, この部分の証明に問題があるわけである。

さて, この命題の証明は, 既成の方法の踏襲に過ぎないのであるが, 少々煩雑である。そのため, Nohusato [4] に譲ることにする。また, この命題を使って Hong の Second Reduction が改良されるわけであるが, 「 $\tilde{\theta}$  が  $K$  上 realizable」 ということは, 特に威力があるわけではない。

つまり  $p$ -rationality のみで十分なのである。

最後に  $p=2$  の場合に少し触れておこう。少々弱いのであるが, 次のことは容易に示される。

(III).  $G$  は solvable とし, 2-block について考える。  $\varphi$  は irreducible Brauer character,  $G \triangleright N$  とすると, 次のような  $\chi \in \text{Irr}(G)$  がとれる。

- (i)  $\chi \equiv \varphi$  on 2-regular elements

(ii)  $\chi$  及び  $\chi_N$  の各成分は  $p$ -rational で modularly irreducible.

### 文 献

- [1] W. Feit: Representations of finite groups,  
Lecture note, Yale University, New Haven,  
1965-1975
- [2]. P. Hong: On the characters of  $p$ -solvable groups  
Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961) pp 263-284
- [3]. I. M. Isaacs: Lifting Brauer characters in  
 $p$ -solvable groups, Pacific J. Math 53 (1974)  
pp 171-188
- [4]. Y. Nobusato: On the  $p$ -rationality of  
lifted characters, to appear in Math. J. Okayama Univ.