

Metarecursion theory における

Sacks の問題について

明大 工 大 橋 健八郎

§1. 序

[1] で, Kleene は relative recursiveness に関する以下の
よる定義を与えた。

1 つの関数 f は関数 $g_1, \dots, g_e$ から f を recursively に定義す
るような 1 つの E (system of equations) が存在するとき,
(general) recursive in $g_1, \dots, g_e$ であるという。

自然数の集合 A に対して, f is recursive in A を
 f is recursive in C_A であるとした。ここで C_A は A の
representing function である。

recursively enumerable sets 全体の standard enumeration
を $W_0, W_1, \dots$ とし,

e is consistent iff $\forall x, y, u, v (\langle x, y, u, v \rangle \in W_e \rightarrow D_u \cap D_v = \emptyset)$

e is regular iff (e is consistent)

$\& \forall x, y_1, y_2, u_1, u_2, v_1, v_2 [$

$$[\langle x, y_1, u_1, v_1 \rangle \in W_e \ \& \ \langle x, y_2, u_2, v_2 \rangle \in W_e$$

$$\ \& \ (D_{u_1} \cup D_{u_2}) \cap (D_{v_1} \cup D_{v_2}) = \emptyset \rightarrow y_1 = y_2]$$

とする。

[2] で, Rogers は

f is recursive in A iff $(\exists e)[e \text{ is regular } \&$

$$\forall x, y [f(x) = y \leftrightarrow (\exists u)(\exists v)(\langle x, y, u, v \rangle \in W_e \\ \& \ D_u \subset A \ \& \ D_v \subset \bar{A})]]$$

と書いた。

Rogers も指摘している如く (証明はない) つぎの命題が成立する。

命題 f is recursive in A (Kleene) $\Leftrightarrow f$ is recursive in A (Rogers)

証明

$$\exists e \forall x, y [f(x) = y \leftrightarrow (\exists u, v) [\langle x, y, u, v \rangle \in W_e \ \& \ D_u \subset A \ \& \ D_v \subset \bar{A}]]$$

$$\Leftrightarrow f \text{ is recursive in } A \text{ (Rogers)}$$

を示せば十分である。

$\Leftarrow$ は明らか。

$\Rightarrow$ の証明。

$$\forall x, y [f(x) = y \leftrightarrow (\exists u, v)(\langle x, y, u, v \rangle \in W_e \ \& \ D_u \subset A \ \& \ D_v \subset \bar{A})]$$

を仮定する。このとき、 W_e は infinite であるから recursive

(total) function $f_e(x)$ で enumerate されていると仮定してよい。

β^S を定義する。(この定義^{の形}は e に依存していない)

1. Step 0. $B^0 = \{k_e(o)\}$.

2. Step 5. finite set B^{s-1} が定義されたとき, $k_e(s) = \langle x_s, y_s, u_s, v_s \rangle$ とする.

Case 1. $D_{u_s} \cap D_{v_s} \neq \emptyset$ $B^s = B^{s-1}$

Case 2. $D_{u_s} \cap D_{v_s} = \emptyset$.

Subcase 2.1. $\forall y, u, v (\langle x_s, y, u, v \rangle \in B^{s-1} \& (D_u \cup D_{u_s}) \cap (D_v \cup D_{v_s}) = \emptyset \rightarrow y = y_s)$

とき, $B^s = B^{s-1} \cup \{k_e(s)\}$

Subcase 2.2. 2.1 以外のとき.

$\langle x_s, y, u, v \rangle \in B^{s-1} \& (D_u \cup D_{u_s}) \cap (D_v \cup D_{v_s}) = \emptyset \& y \neq y_s$ である

ような $\langle x_s, y, u, v \rangle$ を

$\langle x_s, y^0, u^0, v^0 \rangle, \langle x_s, y^1, u^1, v^1 \rangle, \dots, \langle x_s, y^{k-1}, u^{k-1}, v^{k-1} \rangle$

とかく.

$U_s = \bigcup_{i < k} D_{u^i}$, $V_s = \bigcup_{i < k} D_{v^i}$ とおけば, U_s, V_s は finite.

従って

$D_\mu = D_{u_s} \cup U_s$ & $D_\nu = D_{v_s} \cup V_s$ & $S \subset U_s$ & $T \subset V_s$

& $\forall y, u, v (\langle x_s, y, u, v \rangle \in B^{s-1} \& (D_u \cup D_\mu) \cap (D_v \cup D_\nu) = \emptyset \rightarrow y = y_s)$

であるような $\langle x_s, y, \mu, \nu \rangle$ 全体の集合を B_o^s とく.

$B^s = B^{s-1} \cup B_o^s$

とかくとき, B^s は finite.

以上で定義された B^s に対して

$W_e = \bigcup_{s < \omega} B^s$ とかく.

(i) 定義から明らかに e' は regular.

(ii) $\exists u, v (\langle x, y, u, v \rangle \in W_{e'} \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A}) \rightarrow f(x) = y$

であることは、2つの subcases に分けて考えるとすぐわかる.

(ii)' $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{e'} \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A}$ ならば明らか.

(ii)'' $\langle x, y, u, v \rangle \in (W_{e'} - W_e) \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A}$ であるとき、 e' の定義から、 $\langle x, y, u', v' \rangle \in W_e \& D_{u'} \subset D_u \& D_{v'} \subset D_v$ である u', v' が存在する。このとき、仮定から $f(x) = y$.

(iii) $f(x) = y$ と仮定する.

$R_e(s) = \langle x, y, u, v \rangle \in W_e \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A}$ である最小の s を s_0 とする.

(iii)' $R_e(s_0) \in W_{e'}$ ならば、 $\exists u, v (\langle x, y, u, v \rangle \in W_{e'} \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A})$.

(iii)'' $R_e(s_0) = \langle x, y, u, v \rangle \notin W_{e'}$ とする.

$\sim \exists t (R_e(t) = \langle x, y_t, u_t, v_t \rangle \in W_e \& D_{u_t} \subset A \& D_{v_t} \subset \bar{A} \& t < s_0)$ であるから、

$$R_e(t) = \langle x, y_t, u_t, v_t \rangle \in W_e \& y_t \neq y \rightarrow (D_{u_t} \not\subset A \vee D_{v_t} \not\subset \bar{A}).$$

従って $\langle x, y, u, v \rangle \in W_{e'} \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A}$ である u, v がある.

このとき、再び

$$\exists u, v (\langle x, y, u, v \rangle \in W_{e'} \& D_u \subset A \& D_v \subset \bar{A}).$$

以上で命題の証明は終わった.

§2. 定理

[3] その他にあげたものの定義は自然に思われる.

Kleene の T に 対応 する metarecursion theory は あり 3 T -predicate

$$T_1'(B, e, x, s) \leftrightarrow t(e, s) = \langle e, M, N, x, y \rangle \& M \subseteq B \& N \subseteq \bar{B},$$

ここで e = the Gödel n. of a finite system of equations E .

$t(e, s)$ = special metarec. f. which indexes "deductions" from E .

$$\exists s \in \mathbb{N} \quad U(e, s) = y \leftrightarrow t(e, s) = \langle e, M, N, x, y \rangle,$$

$$\{e\}_s^B(x) = y \leftrightarrow T_1'(B, e, x, s) \& U(e, s) = y,$$

$$\{e\}^B(x) = y \leftrightarrow \exists s (\{e\}_s^B(x) = y) \& \forall s (\{e\}_s^B \text{ is defined} \rightarrow U(e, s) = y).$$

ordinary recursion theory は あり 3 § 1 の regular に 対応 する 3 T

の $\mathbb{N}$ 上 に "intrinsically consistent" が あり 3.

$\mathbb{N}$ is intrinsically consistent iff $\forall x, s_1, s_2 [t(e, s_1) = \langle e, M_1, N_1, x, y_1 \rangle$

$$\& t(e, s_2) = \langle e, M_2, N_2, x, y_2 \rangle \& (M_1 \cup M_2) \cap (N_1 \cup N_2) = \emptyset \rightarrow y_1 = y_2].$$

これに対して, 下記の定理が成立する.

定理. あらゆる intrinsically consistent な $\mathbb{N}^*$ に対して (i) or (ii)

のいずれか 1 つ が 成立 する よう な metarecursively enumerable

set A が 存在 する よう な $\bar{e}$ が あり 3.

$$(i) \quad \{e\}^A(e^*) \neq \{e^*\}^A(e^*),$$

$$(ii) \quad \{e\}^A(e^*) \text{ is defined, } \{e^*\}^A(e^*) \text{ is undefined.}$$

上は [3] の 問題 Q5 に対する 解答 になっ ている.

Q5: 各 e に対して, すべての A に対して $\{e\}^A \simeq \{e^*\}^A$ であ

るような intrinsically consistent e^* が存在するから。

ordinary recursion theory において $\mathcal{R}^A$ を上に対象とする形で定義すると、31 命題の証明からみられるように、Q5 が肯定的に解かれるから、定理は ordinary recursion theory の直線的拡張としてでない metarecursion の性質の 1 つを指摘していることとなる。

定理の証明.

用いられる記号を挙げておく。

$$M(e, s) = N \ \& \ N(e, s) = N \ \& \ x(e, s) = x \ \& \ y(e, s) = y$$

$$\leftrightarrow t(e, s) = \langle e, M, N, x, y \rangle$$

$$q(s) = \mu n \ \exists t (t < \omega, \ \& \ n < \omega \ \& \ s = \omega t + n)$$

$$r(s) = \mu t \ (s = \omega t + q(s))$$

明らかに、 $M(e, s)$, $N(e, s)$, $x(e, s)$, $y(e, s)$, $q(s)$, $r(s)$ は metarecursive.

以下、 $e, m, n < \omega$, $s < \omega$, である e, m, n, s に対して定義する。

$$\mu(e, s) = \mu m \ (\forall s') (s' < s \rightarrow \nabla(e, m, 0, s') = \mu)$$

$$h(e, m, n, s) = \begin{cases} \mu \lambda \exists u ((\forall (e, m, n, s) \cup N(e, \lambda)) \cap N(e, u) = \emptyset \\ \quad \& x(e, \lambda) = e \& y(e, u) = m \& \forall (e, m, 0, s) \leq N(e, \lambda) \leq \forall (e, m, n, s) \\ \quad \& \lambda = \gamma(u) \& e = \gamma(u) \& m < h(e, s) \& u \leq s) \\ \quad \text{if such } \lambda \text{ exists,} \\ s+1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$W(e, s) = \begin{cases} (\bigcup_{s < s'} W(e, s') \cup (\bigcup_{h(e, \mu(e, s)-1, n, s) \leq s} (H(e, h(e, \mu(e, s)-1, n, s)) \\ \quad \cup N(e, h(e, \mu(e, s)-1, n, s)))) \\ \quad \text{if } s > 0 \text{ and } \mu(e, s) < \omega \\ \bigcup_{s < s'} W(e, s') & \text{if } s > 0 \text{ and } \mu(e, s) = \omega \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

τ^k, π_i^k ($i \leq k$) は $[2]$ における関数とする。

$$\lambda(e, m, s) = \begin{cases} \mu u \forall t (t < s \rightarrow \lambda(e, m, t) \leq u) & \text{if } m < \mu(e, s), 0 < m, \\ \mu y [\forall x (x \in W(e, s) \rightarrow x < y) \& (y \text{ is a limit ordinal}) \\ \quad \& \forall t \forall x (t < s \& x < \mu(e, s) \rightarrow \lambda(e, x, t) < y)] \\ \quad \text{if } m = \mu(e, s) \& \forall m', n (m < m' \& n < \omega \rightarrow h(e, m', n, s) \leq s) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$V(e, m, n, s) = \begin{cases} \{x \mid 0 \leq x < \omega\} & \text{if } m=0 \text{ \& } n < \omega \text{ \& } 0 \leq s \\ V(e, m, n, t_0) & \text{if } \exists t (t < s \text{ \& } V(e, m, n, t) \neq \emptyset) \\ & \text{\& } t_0 = \mu t (t < s \text{ \& } V(e, m, n, t) \neq \emptyset) \\ \{x \mid \lambda(e, m, s) \leq x < \lambda(e, m, s) + \omega\} & \text{if } 0 < \lambda(e, m, s) \\ & \text{\& } m = \mu(e, s) \text{ \& } n = 0 \\ V(e, m, 0, s) \cup \{\lambda(e, k, s) + \pi_k^m(n) \mid 1 \leq k \leq n \text{ \& } 0 < \pi_k^m(n)\} \\ & \text{if } 0 < \lambda(e, m, s) \text{ \& } m = \mu(e, s) \text{ \& } \omega \leq n \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

関数 f をつぎのよう定義す。

$$f(V, \emptyset, x, s) = y \quad \text{if}$$

$$(f1) \quad s=0 \text{ \& } V = V(e, 0, 0, 0) \text{ \& } x=e \text{ \& } y=0 \quad \text{or}$$

$$(f2) \quad y(e, r(s)) < \mu(e, s) \text{ \& } M(e, r(s)) \neq V(e, y(e, r(s)), 0, s)$$

$$\text{\& } V(e, y(e, r(s)), 0, s) \cap N(e, r(s)) = \emptyset$$

$$\text{\& } a(e) = \mu x (x \in V(e, y(e, r(s)), 0, s) \cap \overline{M(e, r(s))})$$

$$\text{\& } V = V(e, y(e, r(s)), 0, s) \cap \overline{a(e)} \text{ \& } x=e \text{ \& } y = y(e, r(s)) + 1 \quad \text{or}$$

$$(f3) \quad y(e, r(s)) = \mu(e, s) = \omega \text{ \& } 0 < \lambda(e, \omega, s) \text{ \& } V = V(e, \omega, 0, s)$$

$$\text{\& } x=e \text{ \& } y=\omega \quad \text{or}$$

$$(f4) \quad f(V, \emptyset, x, t) = y \quad \text{for some } t < s.$$

$$\bar{e} \text{ を } \underbrace{\text{つぎの, 最小の}}_{\text{最小の}} \text{ の } k \text{ として, } t(\bar{e}, s) = \begin{cases} \langle \bar{e}, M, N, x, y \rangle & \text{if } f(M, N, x, s) = y, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

e^* is intrinsically consistent finite ordinal $\in \mathcal{A}$.

Case 1. (f2) holds for some s .

$$A = (V(e^*, y(e^*, r(s), 0, s) \cup M(e^*, r(s))) \cap \{a(e^*)\}) \quad \text{if } s < t$$

$$\{e^*\}^A(e^*) = y(e^*, r(s)) + 1 \quad \text{if } s < t \quad \{e^*\}^A(e^*) = y(e^*, r(s)).$$

Case 2. $\mu(e^*, s) < \omega$ for all $s < \omega$, and (f2) holds for no s .

$$\forall m < \omega \exists s' (\mu(e^*, s') \geq m) \quad \text{is false}$$

$$g(m) = \begin{cases} \mu(s \forall t (s \leq t \rightarrow \mu(e^*, t) \geq m)) & \text{if } m < \omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is g is not ω , $\{g(m) \mid m < \omega\}$ unbounded and $g(m)$

is metarec. f. is not possible.

from 2.

$$\exists t_0 < \omega, \exists m_0 < \omega \forall t > t_0 (\mu(e^*, t) = m_0 \& V(e^*, m_0, 0, t) = \emptyset \& \lambda(e^*, m_0, t) = 0).$$

is ω of the definition

$$\forall s (m_0 = \mu(e^*, s) \& t_0 < s \rightarrow n_0 < \omega \& R(e^*, m_0 - 1, n_0, s) > s)$$

is there n_0 or not. is not possible.

$$\forall s, t, u [t_0 < s \& ((V(e^*, m_0 - 1, n_0, s) \cup M(e^*, t)) \cap N(e^*, t) = \emptyset$$

$$\& x(e^*, t) = e^* \& y(e^*, t) = m_0 - 1 \& t = r(u) \& e^* - g(u) \& u \leq s$$

$$\rightarrow (V(e^*, m_0 - 1, 0, s) \not\subseteq M(e^*, t) \vee M(e^*, t) \not\subseteq V(e^*, m_0 - 1, n_0, t))$$

$$= \text{if } A = V(e^*, m_0 - 1, n_0, s) \text{ is not } \in$$

$$\{e^*\}^A(e^*) = m_0 - 1 \quad \text{is not possible}$$

$$\{e^*\}^A(e^*) \text{ is defined to be } \{e^*\}^A(e^*) \neq m_0 - 1.$$

Case 3 $\mu(e^*, s) \geq \omega$ for some s , τ (4.2) does not hold for all $s < \omega_1$.

$$= 0 \text{ 且 } \forall m, n < \omega \exists s_{m,n} \exists s_{\omega,0} [R(e^*, m, n, s_{m,n}) \leq s_{m,n}$$

$$\& T(e^*, m, n, s_{m,n}) \neq \emptyset \& A(0) = T(e^*, \omega, 0, s_{\omega,0}) \neq \emptyset.$$

$$\{e^*\}^{A(0)}(e^*) = \{\bar{e}\}^{A(0)}(e^*) = \omega \text{ の } \bar{e} \text{ は } \omega \text{ の } \alpha \text{ 番 目 の } \bar{e} \text{ である。}$$

$$b(0) = \mu x (x \in T(e^*, \eta(0), 0, s_{\eta(0),0}) \cap N(e^*, s_0))$$

$$A(1) = \{b(0)\} \cup A(0)$$

$$b(s) = \mu x (x \in T(e^*, \eta(s), 0, s_{\eta(s),0}) \cap N(e^*, s'))$$

$$A(s+1) = \{b(s)\} \cup A(s)$$

$$= \dots$$

$$s' = \mu s'' (M(e^*, s'') \subseteq A(s) \& A(s) \cap N(e^*, s'') = \emptyset \& e^* \neq x(e^*, s''))$$

$$\& y(e^*, s'') = \omega)$$

と 3. 3.

$$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$$A = \left(\bigcup_{s < \omega_1} \{b(s)\} \right) \cup A(0)$$

と 3. 4.

$$\{\bar{e}\}^{A(e^*)} = \omega \text{ であるが } \{e^*\}^{A(e^*)} \text{ is undetined.}$$

文 献

- [1] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics,
North-Holland, 1952.
- [2] H. Rogers Jr., Theory of recursive functions and effective
computability, McGraw-Hill, 1967.
- [3] G. E. Sacks, Post's problem, admissible ordinals, and regularity
Trans. A.M.S. (1968) pp. 1-23.