

群整環上の表現加群のヴァーテックスについて

名古屋市立大学 河田成人

Shigeto Kawata
Nagoya City University

$(K, \mathcal{O}, k)$ を p -モジュラー系 (p は素数) とする. すなわち, $\mathcal{O}$ は標数 0 の完備離散付値環で極大イデアル $\pi\mathcal{O}$ を持つもので, その剰余体 $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ は正標数 p の体であるとし, K は $\mathcal{O}$ の商体とする. R で $\mathcal{O}$ または k を表し, 有限群 G の R 上の群環を RG で表す.

直既約 $\mathcal{O}G$ -加群 L と kG -加群 $L/\pi L$ の直既約分解 $L/\pi L = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ に対し, ある直既約因子 M_i ($1 \leq i \leq n$) でそのヴァーテックスが L のヴァーテックスに一致するものが存在するかという問題を, Auslander-Reiten quiver と関連付けて考察したい.

有限群の表現論について詳しくは [NT], [B] を参照してください.

1. 群環上の直既約加群のヴァーテックス

ここで RG -加群とは R 上有限生成な右 RG -加群を意味し, RG -表現加群 (RG -lattice) とは R -自由な RG -加群を意味するものとする.

H を G の部分群とする. RH -加群 W に対し, 誘導された RG -加群 $W^{\uparrow G} = W \otimes_{RH} RG$ を $W^{\uparrow G}$ で表す. また, RG -加群 V に対し, 作用を H に制限して RH -加群とみなしたものを $V \downarrow_H$ と書く. RG -加群 U, V に対して $U \mid V$ と書くことは, U が V のある直和因子に同型であることを表す.

RG -加群 V が次の性質を持つとき, V は H -射影的であるという:

RG -加群の完全列 $U \rightarrow V \rightarrow 0$ が RH -加群の完全列と見て分裂していれば
 RG -加群の完全列として分裂している.

RG -表現加群 V が $\{1_G\}$ -射影的であるとは, V が射影的であることを意味する.

直既約 RG -加群 V に対し, G の部分群の集合

$$\{H \leq G \mid V : H\text{-射影的}\}$$

における極小部分群を V のヴァーテックスと呼び, $\text{vx}(V)$ で表す. $\text{vx}(V)$ は G の p -部分群であり, 共役を除いて一意に定まることが知られている.

さて、直既約 OG -表現加群 L に対し、次の性質 $(\star)$ を考える：

$(\star)$ kG -加群 $L/\pi L$ のある直既約因子は $\text{vx}(L)$ をヴァーテックスとして持つ。

性質 $(\star)$ を持つ直既約 OG -表現加群の例を幾つか挙げてみよう。

群環 RG を環として直既約分解したときの直和因子をブロックと呼ぶ。 V が直既約 RG -加群であれば、 V は実質的にはあるブロック B 上の加群である。 RG のブロック B に対し、 G の p -部分群からなる次の集合

$$\{ \text{vx}(V) \mid V : \text{直既約 } B\text{-加群} \}$$

における極大部分群は共役を除いて一意的に定まり、 B の不足群と呼ばれる。 G の Sylow p -部分群の位数を p^s とし、 ブロック B の不足群の位数を p^d とする。 このとき、 B -表現加群 V の階数は p^{s-d} で割り切られるので

$$p^{s-d+\text{ht}(V)} \parallel \text{rank}_R V \quad (\exists \text{ht}(V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と表される。 この非負整数 $\text{ht}(V)$ を V の高さと呼ぶ。

例 1.1 OG のブロック B に属する直既約 OG -表現加群 L は高さが 0 であるとする。 このとき、 L のヴァーテックスは B の不足群 D に一致する。 また、 kG -加群 $L/\pi L$ の直既約分解において、 ある直既約因子 M は高さが 0 である。 従って、 M のヴァーテックスは D である。 特に、 p' -階数の直既約 OG -表現加群 L (すなわち $p \nmid \text{rank}_O L$) のヴァーテックスは G の Sylow p -部分群であり、 L は性質 $(\star)$ を持つ。

$Q := \text{vx}(V)$ を直既約 RG -加群 V のヴァーテックスとすると、

$$S \mid V \downarrow_Q, \quad V \mid S \uparrow^G$$

を満たす直既約 RQ -加群 S が (共役を除いて) 一意的に存在する。 この S を V のソースと呼ぶ。

例 1.2 Q を G の p -部分群とし、 L を自明な OQ -表現加群 O_Q をソースに持つ OG -表現加群 (trivial source OG -lattice) とする。 L のヴァーテックスは Q である。 このとき、 $L/\pi L$ は自明な kQ -表現加群 k_Q をソースに持つ直既約な kG -加群であって、 $L/\pi L$ のヴァーテックスは Q である。

これ以降は、 p -モジュラー系 $(K, \mathcal{O}, k)$ について次の条件 (#) を仮定する：

(#) $(K, \mathcal{O}, k)$ はある p -モジュラー系 $(K', \mathcal{O}', k')$ の分岐指数 3 以上の拡大であり、
 $k = k'$ は代数閉体である。

kG -加群 M に対し、 M を $\mathcal{O}G$ -加群と見做したときの射影被覆を P_M とし、その核を Z_M とおく： $0 \rightarrow Z_M \rightarrow P_M \rightarrow M \rightarrow 0$. Z_M を M の Heller $\mathcal{O}G$ -表現加群と呼ぶ。

条件 (#) のもとでは、直既約 kG -加群 M の Heller $\mathcal{O}G$ -表現加群 Z_M は直既約であることが保証される [K2].

例 1.3 [K2, Proposition 2.2] 直既約 kG -加群の M の Heller $\mathcal{O}G$ -表現加群 Z_M のヴァーテックスは M のヴァーテックスに等しく、 $Z_M/\pi Z_M \cong M \oplus \Omega M$ が成り立つ。

2. 性質 (*) を持たない直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群

Feit の本に、直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 L で、 kG -加群 $L/\pi L$ は直既約で $v_X(L) \geq v_X(L/\pi L)$ となる例が記載されている [F, page 111]. この節では、概分裂列に注目することで性質 (*) を持たない直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群を見い出せることを紹介したい。

RG -表現加群の短完全列 $\mathcal{A}: 0 \rightarrow X \rightarrow Y \xrightarrow{f} Z \rightarrow 0$ は次の 3 条件を満たすとき、概分裂列と呼ばれる：

- (i) $\mathcal{A}$ は分裂していない。
- (ii) X, Z は直既約である。
- (iii) RG -準同型 $g: W \rightarrow Z$ が分裂全射でなければ f を通過する。

L が射影的ではない直既約な RG -表現加群ならば、 L で終わる概分裂列が一意的に存在することが知られている ([AR], [R]). L の概分裂列を $\mathcal{A}(L): 0 \rightarrow \tau L \rightarrow m(L) \rightarrow L \rightarrow 0$ と表すことにする。Auslander-Reiten translator τ は、 $R = \mathcal{O}$ のときは $\tau = \Omega$ (Heller operator) であり、 $R = k$ のときは $\tau = \Omega^2$ である。次の命題で述べるように、概分裂列によって Heller 表現加群は特徴付けられる。

$\mathcal{O}G$ -表現加群の短完全列 $\mathcal{S}: 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ から導かれる kG -加群の短完全列 $0 \rightarrow X/\pi X \rightarrow Y/\pi Y \rightarrow Z/\pi Z \rightarrow 0$ を $\bar{\mathcal{S}}$ で表す。

命題 2.1 [K2, Theorem 4.4] p -モジュラー系 $(K, \mathcal{O}, k)$ は条件 (#) を満たすとする。

(1) 直既約 kG -加群 M の Heller $\mathcal{O}G$ -表現加群 Z_M について次が成り立つ：

$$\overline{\mathcal{A}(Z_M)} = \mathcal{A}(M) \oplus [\text{分裂列 } 0 \rightarrow \Omega M \rightarrow \Omega M \oplus \Omega M \rightarrow \Omega M \rightarrow 0]$$

(2) 直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 L が Heller 表現加群でなければ、 $\overline{\mathcal{A}(L)}$ は分裂する。

例 2.2 $Q (\neq 1)$ を G の正規 p -部分群とし、直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 T は自明な $\mathcal{O}Q$ -表現加群をソースに持つとする。このとき、 T のヴァーテックスは Q である。 T の概分裂列 $\mathcal{A}(T)$ の中間項を $m(T)$ とおく。また、 T が属するブロック B は無限表現型と仮定する。すなわち、 B は互いに非同型な直既約 $\mathcal{O}Q$ -表現加群を無限個持つとする。このとき、 $m(T)$ は直既約である [K4, Theorem 3.1]。さらに、 kG -加群 $T/\pi T$ は既約ではないと仮定しよう。すると

$$\text{vx}(T) \subsetneq \text{vx}(m(T))$$

が成り立つ ([IH], [K4, Lemma 2.6])。また、 $T/\pi T$ は直既約であるので、例 1.3 から、 T は Heller $\mathcal{O}Q$ -表現加群ではない。従って、命題 2.1(2) から $\overline{\mathcal{A}(T)}$ は分裂する。すなわち

$$m(T)/\pi m(T) \cong T/\pi T \oplus \Omega T/\pi \Omega T$$

ここで $T/\pi T$ は自明な kQ -加群をソースに持ち、ヴァーテックスは Q である。 $\Omega T/\pi \Omega T \cong \Omega(T/\pi T)$ のヴァーテックスも Q なので、 $m(T)$ は性質 $(\star)$ を持たない。

注意 2.3 G が p -群で $T := \mathcal{O}_Q \uparrow^G$ ($1 \subsetneq Q \subsetneq G$) の場合は、 $\text{vx}(m(T)) = G$ であることが Inoue-Hieda によって示されている [IH, Proposition 3.2]。

P と $Q (\neq 1)$ は G の p -部分群で、 Q は P の真の正規部分群であるとする。 $T := \mathcal{O}_Q \uparrow^P$ とし、 $S := m(T)$ (T の概分裂列の中間項) とおく。このとき例 2.2 と注意 2.3 から $\mathcal{O}P$ -表現加群 S のヴァーテックスは P で、 $S/\pi S$ の各直既約因子のヴァーテックスは Q である。いま X は直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群で S を P -ソースに持つものとする。このとき、 X は性質 $(\star)$ を持たず、 $X/\pi X$ のある直既約因子のヴァーテックスは Q であり、その他の直既約因子についても、それらのヴァーテックスは Q に含まれる。このことは、次の事実の一例と言える。

命題 2.4 P と $Q (\neq 1)$ は G の p -部分群で、 Q は P の真の正規部分群であるとする。このとき、次の性質 (i), (ii) を持つ直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 X が存在する：

(i) $\text{vx}(X) = P$.

(ii) kG -加群 $X/\pi X$ の各直既約因子のヴァーテックスは Q に含まれ、それらのうちの少なくとも一つは Q に一致する。

3. Auslander-Reiten 連結成分とヴァーテックス

概分裂列と Auslander-Reiten quiver は密接な関係がある。この節では Auslander-Reiten quiver に注目して、直既約 OG -表現加群のヴァーテックスを考察しよう。

群環 RG の **Auslander-Reiten quiver** $\Gamma(RG)$ とは、直既約 RG -表現加群の同型類の全体を点集合とし、直既約 RG -表現加群 L から L' に既約写像と呼ばれる RG -準同型写像が存在するときに矢 $L \rightarrow L'$ を引くことで描かれる有向グラフのことである。ここで $f: L \rightarrow L'$ が既約写像とは、 $f = g \circ h$ と写像の積の形で書けるのは g が分裂単射であるか h が分裂全射であるかのいずれかが自明な場合しかないときをいう。Auslander-Reiten 理論については、[ASS], [ARS], [E1], [W], [Y] を参照してください。

$\Gamma(RG)$ の連結成分 Θ を Auslander-Reiten 成分と呼び、 Θ の stable part (Θ から射影加群 (= 入射加群) を取り除いて得られる有向グラフ) を Θ_s と書く。 G の部分群からなる集合

$$\{ vx(L) \mid L \in \Theta_s \}$$

には極小なものが共役を除いて唯一存在する ([K1, Proposition 3.2], [IH]) が、それを Θ のヴァーテックスと呼び、 $vx(\Theta)$ と書く。

モジュラー表現 ($R = k$) の場合に、Okuyama-Uno によって次の定理が示された。

定理 3.1[OU] 群多元環 kG のブロック B の Auslander-Reiten 成分 Δ の tree class が A_∞ であれば、次のいずれかが成り立つ：

- (i) $\{ vx(X) \mid X \in \Delta_s \} = \{ Q \}$.
- (ii) $\{ vx(X) \mid X \in \Delta_s \} = \{ Q, P \}$, $Q \not\leq P$.

なお (ii) の場合、 Δ のグラフの端に位置する直既約 kG -加群のヴァーテックスは Q であり、 Δ の端に位置しない直既約 kG -加群のヴァーテックスは P である。

ちなみに、 kG のブロック B が wild 表現型であれば、 B の任意の Auslander-Reiten 成分の tree class は A_∞ であることが Erdmann によって示された [E2]。宇野-奥山の定理を踏まえて、整数表現における Auslander-Reiten quiver $\Gamma(OG)$ の連結成分 Θ に対し、 $\{ vx(X) \mid X \in \Theta_s \}$ について考察したい。 Θ のヴァーテックス $vx(\Theta)$ について次が言える。

命題 3.2 [K6, 定理 2.5] 射影的ではない直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 L は性質 $(*)$ を持つとし, L を含む Auslander-Reiten 成分を θ とする. θ が Heller $\mathcal{O}G$ -表現加群を含まなければ, $\text{vx}(L) = \text{vx}(\theta)$ が成り立つ.

まず, 群整環 $\mathcal{O}G$ のブロックの Auslander-Reiten 成分 θ で $\{\text{vx}(X) \mid X \in \theta_s\} = \{Q\}$ となる例を挙げる.

例 3.3 L を高さが 0 の直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群とし, L を含む Auslander-Reiten 成分を θ とする. L が属するブロック B が無限表現型であれば, θ は Heller 表現加群を含まない: 実際, もし θ が Heller 表現加群を含めば, θ に含まれるすべての直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群の階数が $|G|_p$ で割り切れる [K5, Lemma 2.4(1)] が, L の高さが 0 であることに矛盾する. ところで, 例 1.1 で見たように L は性質 $(*)$ を持つので, 命題 3.2 から θ_s の任意の直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群 X に対し $\text{vx}(L) = D \leq \text{vx}(X)$ (ここに D は B の不足群) が言えて, $D = \text{vx}(X)$ が成り立つ. すなわち, $\{\text{vx}(X) \mid X \in \theta_s\} = \{D\}$ が従う. 特に, L が p' -階数の直既約 $\mathcal{O}G$ -表現加群であれば $\{\text{vx}(X) \mid X \in \theta_s\} = \{\text{Sylow } p\text{-部分群}\}$ である.

以下で, 群整環 $\mathcal{O}G$ の Auslander-Reiten 成分 θ で $\{\text{vx}(X) \mid X \in \theta_s\} \supseteq \{Q, P\}$ ($Q \not\leq P$) となる例を挙げよう. 例 2.2 と Auslander-Reiten 成分にまつわる Green 対応 [K6, 系 2.10] を考え合わせると, 次が分かる.

例 3.4 Q を G の p -部分群とし, $\mathcal{O}Q$ -表現加群 T は自明な $\mathcal{O}Q$ -表現加群をソースに持つとする. さらに, T が属するブロック B は無限表現型とし, T の Green 対応子 fT について $fT/\pi fT$ は既約な kG -加群でないとする. このとき, T の概分裂列の中間項 $m(L)$ は直既約であり, $\text{vx}(T) \not\leq \text{vx}(m(T))$ が成り立つ. すなわち, T と $m(T)$ を含む Auslander-Reiten 成分を θ とすると, 次が言える:

$$\{\text{vx}(X) \mid X \in \theta_s\} \supseteq \{\text{vx}(T), \text{vx}(m(T))\} \quad (\text{ここで } \text{vx}(T) \not\leq \text{vx}(m(T)))$$

またこのとき, θ は A_∞ 型であり, T は θ の端に位置している [K4, Theorem 3.1].

最後に, 宇野-奥山の定理 3.1 (ii) の Auslander-Reiten 成分 Δ に注目し, Δ の端に位置する kG -加群の Heller $\mathcal{O}G$ -表現加群を含む Auslander-Reiten 成分を考えたい.

例 3.5 直既約 kG -加群 M は A_∞ 型の Auslander-Reiten 成分 Δ の端に位置しているとし, $\text{vx}(M) = Q$ とする. また, M の概分裂列 $\mathcal{A}(M)$ の中間項 $m(M)$ は直既約で, $\text{vx}(m(M)) = P \geq Q$ とする. Z_M を M の Heller $\mathcal{O}G$ -表現加群とする. $\mathcal{A}(Z_M)$ の中間項 $m(Z_M)$ は直既約である [K3, Theorem 5.1] が, 命題 2.1(1) から, $m(M)$ が $m(Z_M)/\pi m(Z_M)$ の直既約因子として現れる. 従って, $\text{vx}(m(Z_M)) \geq \text{vx}(m(M)) = P \geq Q$ を得る. また, 例 1.3 から $\text{vx}(Z_M) = Q$ である. 従って, Z_M と $m(Z_M)$ を含む Auslander-Reiten 成分 Θ とすると, 次の言える:

$$\{\text{vx}(X) \mid X \in \Theta_s\} \supseteq \{Q = \text{vx}(Z_M), \text{vx}(m(Z_M))\} \quad (\text{ここで } Q \leq \text{vx}(m(Z_M)))$$

なおこのとき, Θ は A_∞ 型であり, Z_M は Θ の端に位置している [K3, Theorem].

参考文献

- [ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A.: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1, Techniques of Representation Theory, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 65, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [AR] Auslander, M. and Reiten, I.: *Representation theory of artin algebras V: Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms*, Comm. Algebra **5**(1977), 519–544.
- [ARS] Auslander, M., Reiten, I. and Smalø, S.: Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Studies in Advanced Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [B] Benson, D. J.: Representations and Cohomology I, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [E1] Erdmann, K.: Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Note in Math. 1428, Springer, Berlin/New York, 1990.
- [E2] Erdmann, K.: *On Auslander-Reiten components for group algebras*, J. Pure Appl. Algebra **104**(1995), 149–160.
- [F] Feit, W.: The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland Mathematical Library 25, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.
- [IH] Inoue, T. and Hieda, Y.: *A note on Auslander-Reiten quivers for integral group rings*, Osaka J. Math. **32**(1995), 483–494.
- [K1] Kawata, S.: *Module correspondence in Auslander-Reiten quivers for finite groups*, Osaka J. Math. **26**(1989), 671–678.
- [K2] Kawata, S.: *On Heller lattices over ramified extended orders*, J. Pure Appl. Algebra **202**(2005), 55–71, *Erratum to “On Heller lattices over ramified extended orders”*, J. Pure Appl. Algebra **212**(2008), 1849–1851.
- [K3] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and Heller lattices for integral group rings*, Algebr. Represent. Theory **9**(2006), 513–524.

- [K4] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and trivial source lattices for integral group rings*, J. Algebra **322**(2009), 1395–1405.
- [K5] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and height zero lattices for integral group rings*, Algebr. Represent. Theory **17**(2014), 1603–1613.
- [K6] 河田成人: 群環の表現加群のヴァーテックスと Auslander-Reiten 連結成分について, 京都大学数理解析研究所講究録 「有限群・代数的組合せ論・頂点作用素代数の研究」(出版予定).
- [NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.
- [OU] Okuyama, T. and Uno, K.: *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver III*, in: Groups and combinatorics - in memory of Michio Suzuki, 355–368, Adv. Stud. Pure Math., 32, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.
- [R] Roggenkamp, K. W.: *The construction of almost split sequences for integral group rings and orders*, Comm. Algebra **5**(1977), 1363–1373.
- [Y] 山形邦夫: 有限次元自己入射多元環の表現とその周辺, 数学 **61**(2009), 270–292.