

標数 p の有限体上の 4 次元 symplectic 群の p -Sylow 群からの特徴づけ

北大 理学 中 川 暢夫

§ 1. 序

$PSL(n, q)$ (q は素数 p の冪) の特徴づけが、最近 N. Ito, M. O'Nan, T. P. McDonough, T. Tuzuku などによっていっ
つかなされてきた。2 重可移置換群 (G, Ω) が $PSL(n, q)$ の
ある性質を有するとき、 (G, Ω) は $PSL(n, q)$ を含んでしま
うといった仕事である。

これらに共通の方法は、与えられた性質から、その上に G
が自然に働くような Ω を作り、それが
Projective Space となり、便に G がすべての Transvection を
含むことをいうのである。

都筑氏の与えた条件は「 (G, Ω) が 2 重可移で次数 n と p -Sylow
群 (p は体の標数) が $PSL(n, q)$ ($q = p^a$) のそれと同じ」
というものであるが、ここで以下のべるのは、symplectic 群
についての同様の試みである。

但し今までの成果は4次元と6次元の一部にっいてのみである。このときは D. G Higman の rank 3 及び rank 1 の置換群にっいての研究が本質的である。

§ 2.

定理 1 $(G, \Omega) = \text{primitive}$ で 2 重可移でない群

$$|\Omega| = 1 + q + q^2 + q^3, \quad q = p^a \quad (p \text{ は } 1 \text{ の素数})$$

$\tilde{P} = PS_p(4, q)$ の Sylow p -subgroup

$P = G$ の Sylow p -subgroup

Assume $(P, \Omega) \cong (\tilde{P}, \mathbb{P}_3(q))$

$$\Rightarrow (PS_p(4, q), \mathbb{P}_3(q)) \subseteq (G, \Omega)$$

(ここで $\mathbb{P}_3(q)$ は $GF(q)$ 上の 3 次元 projective space である。)

定理 2 $(G, \Omega) = \text{primitive}$ でかつ 2 重可移でない群

$$|\Omega| = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5, \quad q = p^a \quad (p \text{ は } 1 \text{ の素数})$$

$\tilde{P} = PS_p(6, q)$ の Sylow p -subgroup

$P = G$ の Sylow p -subgroup Assume $(P, \Omega) \cong (\tilde{P}, \mathbb{P}_5(q))$

$\Rightarrow (G, \Omega)$ は rank 3 group であり subdegree は、 $1 + q + q^2 + q^3 + q^4, \quad q^5$ である。

§ 3. 定理の証明

まず D. G Higman による次の lemma をあげる。

(G, Ω) を transitive group, 任意の $a \in \Omega$ に対し Ω はちょうど r 個の G_a -orbits に分かれるとする。それらを $\Gamma_0(a) = \{a\}$, $\Gamma_1(a), \dots, \Gamma_{r-1}(a)$ とする。ここで G_a は a の stabilizer を意味する。すなわち $a \in \Omega$, $s \in G$, $i=1, 2, \dots, r-1$ に対して $\Gamma_i(a)^s = \Gamma_i(as)$ としてよい。 $J'(a) = \{a^s \mid a^s \in J(a)\}$ とすると $J(a)$ が G_a -orbit であれば $J'(a)$ も $J(a)$ の G_a -orbit である。

$$|\Gamma_i(a)| = l_i \quad (a \text{ に depend しない}, i=1, 2, \dots, r-1)$$

$$\mu_{ij}^{(\alpha)} = |\Gamma_\alpha(b) \cap \Gamma_i(a)| \quad (b \in \Gamma_j(a)) \text{ とおく。}$$

Lemma ([2] の (7.1) 及び (7.2))

$$1) \quad \sum_i \mu_{ij}^{(\alpha)} = l_j \quad \text{かつ} \quad \sum_j \mu_{ij}^{(\alpha)} = l_i$$

$$\mu_{i0}^{(\alpha)} = \delta_{i\alpha} l_\alpha \quad \text{かつ} \quad \mu_{0i}^{(\alpha)} = \delta_{i\alpha} l_\alpha$$

$$2) \quad l_j \mu_{ij}^{(\alpha)} = l_i \mu_{ji}^{(\alpha)} \quad \text{かつ} \quad l_i \mu_{R'i}^{(\beta)} = l_j \mu_{i'j}^{(\beta)} = l_R \mu_{j'R}^{(\beta)}$$

$$(\text{ここで } \Gamma_{\alpha'} = \Gamma_\alpha')$$

定理 1 において $GF(2) = F$, $Sp(4, 2)$ の元の $P_{ij}(4, 2)$ の像を

$$A \text{ であらわす。 } \tilde{P} = \left\{ A \mid A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & d & 1 \\ c & b-ad & -a \end{pmatrix}, a, b, c, d \in F \right\}$$

$(\tilde{P}, P_3(4))$ は長さ 1, 2, 2, 2 の orbits $\tilde{I}_0, \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ を

もつ。 $a \in \Omega$, $G_a \supset P$ とするとき (P, Ω) の長さ 1, g , g^2 , g^3 の orbits をそれぞれ $\Delta_0(a) = \{a\}$, $\Delta_1(a)$, $\Delta_2(a)$, $\Delta_3(a)$ とする。まず $(G, \Omega) = \text{rank } 4$ の場合は G_a の orbits が $\Delta_0(a)$, $\Delta_1(a)$, $\Delta_2(a)$, $\Delta_3(a)$ になる。 $b \in \Delta_1(a)$ に對して $P_b (\subseteq G_{ab})$ の Ω 上の orbits を考えると $\Delta_1(a)$ 上の各点を固定し, $\Delta_2(a)$ 上には transitive に働き, $\Delta_3(a)$ 上には長さ g^2 の g の orbits に分ける。このことから $a \cup \Delta_1(a) = b \cup \Delta_1(b)$ for all $b \in \Delta_1(a) \cup \{a\}$ となり, $a \cup \Delta_1(a)$ は (G, Ω) の 1 つの block となり, (G, Ω) が primitive であることに反する。

次に (G, Ω) が rank 3 の場合は (G_a, Ω) の orbits 分解の可能性は,

$$(1) \quad \Delta_0(a), \Delta_1(a), \Delta_2(a) \cup \Delta_3(a)$$

$$(2) \quad \Delta_0(a), \Delta_1(a) \cup \Delta_2(a), \Delta_3(a)$$

$$(3) \quad \Delta_0(a), \Delta_1(a) \cup \Delta_3(a), \Delta_2(a) \quad \text{の 3 つである。}$$

このうち (2) 以外は起らない。

例えば (1) の場合は, $\Delta_0(a) = \{a\}$, $\Delta_1(a) = \Delta(a)$, $\Delta_2(a) \cup \Delta_3(a) = \Gamma(a)$

$$|\Delta(a) \cap \Delta(b)| = \begin{cases} \lambda & \text{if } a \in \Delta(b) \\ \mu & \text{if } a \in \Gamma(b) \end{cases}$$

と おく と Lemma の (1), (2) より λ, μ は a, b のとり方によらず一定で $\mu(g^2 + g^3) = g(g - \lambda - 1)$ が成立する。

故に $g \mid \lambda + 1$, $\lambda < g$ より $\lambda = g - 1$ でこのとき (G, Ω) は

imprimitive になり、矛盾である。

(3) の場合も同様である。

次に $\tilde{\Omega} = \left\{ \bar{A} \in \tilde{P} \mid A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & c & 0 & 0 \end{pmatrix}, c \in F \right\}$ とおくと

$\tilde{\Omega}$ は $\tilde{I}_0 \cup \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2$ を pointwise に固定する。 $|\tilde{\Omega}| = \delta$,
 それ故 $G_a (a \in \Omega)$ において長さ $\delta + \delta^2$ の orbit $\tilde{I}_1(a)$ を
 pointwise に固定する G の元はちょうど δ 個存在する。
 後は b. G. Higman による [17] の Theorem 2 により、定理 1 の結
 論を得る。

定理 2 において $(P, P_5(\delta))$ は長さ $1, \delta, \delta^2, \delta^3, \delta^4, \delta^5$ の
 orbits $\tilde{I}_0, \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3, \tilde{I}_4, \tilde{I}_5$ をもつ。

$a \in \Omega$ に対し $G_a \supset P$ とするとき (P, Ω) の長さ $1, \delta, \delta^2, \delta^3,$
 δ^4, δ^5 の orbits をそれぞれ $\Delta_0(a) = \{a\}, \Delta_1(a), \Delta_2(a), \Delta_3(a),$
 $\Delta_4(a), \Delta_5(a)$ とする。

このとき (G, Ω) が rank 6, rank 5, rank 4, rank 3 の
 可能性が生じるが、考え方は同じであるから rank 4 の一
 の場合だけにについて証明する。 (G_a, Ω) の orbit 分解が、
 $\Delta_0(a), \Delta_1(a) \cup \Delta_3(a) = \Gamma_1(a), \Delta_2(a) \cup \Delta_4(a) = \Gamma_2(a), \Delta_5(a) = \Gamma_3(a)$
 の場合は $k_i, u_{ij}^{(x)}$ は Lemma のものと同じとする。

すると Lemma の (1) 及び (2) によつて $\lambda_2 \mu_{12}' + \lambda_3 \mu_{13}' = \lambda_1 (\lambda_1 - \mu_{11}' - 1)$
 故に $(g + g^3) \mu_{12}' + g^4 \mu_{13}' = (1 + g^2) (\lambda_1 - \mu_{11}' - 1)$, これより
 $1 + g^2 \mid \mu_{13}'$, $\mu_{13}' = (1 + g^2)t$ とおくと $g(\mu_{12}' + g^3 t) = \lambda_1 - \mu_{11}' - 1$
 $\mu_{11}' = g + g^3 - g \mu_{12}' - g t - 1$ ここで $t \neq 0$ なら $\mu_{11}' < 0$ と
 なつて矛盾だから $t = 0$ すなわち $\mu_{13}' = 0$ である。

ここで $\mu_{12}' = 0$ なら $\lambda_1 = \mu_{11}' + 1$ で $a \cup \Gamma(a)$ が (G, Ω) の
 1, の block となつて (G, Ω) が primitive であることに反
 する。故に $\mu_{12}' \neq 0$ である。

ここで $b \in \Gamma_1(a)$ に対して $P_b(\subseteq G_{ab})$ は $\Delta_1(a)$ の各点を固定し
 $\Delta_2(a), \Delta_3(a), \Delta_4(a)$ 上には transitive に働き, $\Delta_5(a)$ 上には長さ
 g^4 の g の orbits に分ける。

又 $\mu_{12}' \geq 1$ より $\mu_{11}' = g + g^3 - g \mu_{12}' - 1 \leq g^3 - 1$ だから $\Gamma_1(b) \cap \Delta_5(a)$
 $= \phi$ ($\Gamma_1(b) = \Delta_1(b) \cup \Delta_3(b)$) 従つて $\mu_{11}' = |\Gamma_1(b) \cap \Gamma_1(a)| \leq g - 1$
 故に 前の式より $g^2 \leq \mu_{12}'$, ここで $c \in \Gamma_2(a)$ ($a \in \Gamma_2(c)$) と
 すると $P_c(\subseteq G_{ac})$ は Ω 上の作用として $\Delta_1(a)$ 上 transitive,
 $\Delta_2(a)$ の各点を固定, $\Delta_3(a)$ 上 transitive, $\Delta_4(a)$ 上長さ g^3 の g
 の orbits に分け, $\Delta_5(a)$ 上長さ g^4 の g の orbits に分ける
 。もし $\Delta_4(a) \subseteq \Gamma_2(c) \cup \Gamma_3(c)$ であれば $\Delta_3(a) \subseteq \Gamma_1(c)$ だから
 $\mu_{12}' = |\Gamma_1(a) \cap \Gamma_1(c)| \geq g^3$, 従つて $\mu_{11}' = g + g^3 - g \mu_{12}' - 1 < 0$
 で矛盾である。それ故に $|\Delta_4(a) \cap \Gamma_1(b)| \geq g^3$ このとき $t \neq$

$u'_2 = (\overline{u}_1(a), \overline{u}_1(b)) \neq \emptyset$ で $\mu'_2 \geq 2^2$ に反する。

このように上の場合は起らないことが証明される。

rank 3 で $\text{codegree } 1$, $8+2^2-2^3=2^4$, 2^5 の場合を除く、
他のすべての場合も同様の計算で矛盾がでる。

文献

- [1] D. G. Higman. Finite permutation groups of rank 3.
Math. Zeit 86, 145~156 (1964)
- [2] D. G. Higman. Intersection Matrices for Finite
Permutation Groups. Journal of Alg. 6, 22~42
(1967)