

2 階準線形常微分方程式の正值弱増大解の漸近形

加茂 憲一 広島大学理学部

Ken-ichi Kamo

Faculty of Science, Hiroshima University

宇佐美 広介 広島大学総合科学部

Hiroyuki Usami

Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University

1 Introduction.

2 階準線形常微分方程式

$$(|u'|^{\alpha-1}u')' + p(t)|u|^{\lambda-1}u = 0 \quad (E)$$

を考える. ここで α, λ は正定数で $\lambda > \alpha$, p は区間 $[t_0, \infty)$ 上で定義された正值連続関数とする. もう少し一般的な準線形常微分方程式

$$(P(t)|v'|^{\alpha-1}v')' + Q(t)|v|^{\lambda-1}v = 0$$

(P, Q は正值連続関数) は

$$\int_{t_0}^{\infty} P(t)^{-1/\alpha} dt = \infty$$

の場合, 変数変換 $\tau = \int_{t_0}^t P(s)^{-1/\alpha} ds$ によって (E) のタイプの方程式に帰着する. 方程式 (E) の解とは, 区間 $[T, \infty)$ ($T \geq t_0$) で定義された実数値関数 u で u と $|u'|^{\alpha-1}u'$ が共に $C^1[T, \infty)$ で, そこで (E) をみたすものと定義する.

方程式 (E) の正值解は, その漸近挙動によって次の補題のように 3 つに分類されることが容易に判る:

補題 1.1. u を (E) の正值解とする. このとき u は次の (i)-(iii) のいずれかをみたす.

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = \text{const} \in (0, \infty);$$

(asymptotically linear solution)

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty;$$

(weakly increasing solution)

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \text{const} \in (0, \infty), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = 0;$$

(asymptotically constant solution)

また (i), (iii) のタイプの解が存在するための必要十分条件は以下の通りである（注：(ii) のタイプの解が存在するための分かり易い条件は私の知る限りでは存在しない）：

補題 1.2. 方程式 (E) が (i) のタイプの解を持つ為の必要十分条件は

$$\int_0^\infty tp(t) dt < \infty.$$

方程式 (E) が (iii) のタイプの解を持つ為の必要十分条件は

$$\int_0^\infty \left(\int_t^\infty p(s) ds \right)^{1/\alpha} dt < \infty.$$

(i) あるいは (iii) のタイプの解は漸近的主要項が判る（(i) では ct , (iii) では正定数）。しかし (ii) のタイプについては、ある程度の解の挙動は判るが漸近的主要項までは判らない。そこで (ii) のタイプの解の漸近的主要項が決定出来るための条件を得る事を今回の目標とする。今後 (ii) のタイプの解を“弱増大解”と呼ぶことにする。

例 1.2. (E) において $p(t) \equiv t^{-\rho}$ すなわち

$$(|u'|^{\alpha-1}u')' + t^{-\rho}|u|^{\lambda-1}u = 0 \quad (E1)$$

の場合を考える。

- (E1) が (i) のタイプの解を持つ為の必要十分条件は $\rho > 2$.
- (E1) が (iii) のタイプの解を持つ為の必要十分条件は $\rho > 1 + 2\alpha$.

また (E1) は $\alpha + 1 < \rho < \lambda + 1$ の場合には

$$u_0(t) = \hat{c}t^k, \quad k = \frac{\rho - \alpha - 1}{\lambda - \alpha}, \quad \hat{c} = \{\alpha k^\alpha(1 - k)\}^{1/(\lambda - \alpha)} \quad (1)$$

という弱増大解を持つ。（注： $\alpha + 1 < \rho < \lambda + 1$ と $0 < k < 1$ は同値である。）

2 Main Theorem.

方程式 (E) と (E1) の相違は非線形項の係数関数のみである。そこで $p(t)$ が“何らかの意味で” $t^{-\rho}$ に近ければ (E) の弱増大解の挙動は (1) で与えられる $u_0(t)$ に近いであろうと予想される。本講演では、この予想がある場合には正しいことを証明しよう。

定理 2.1. 方程式 (E) において $0 < \alpha \leq 1$, $p(t) \sim t^{-\rho}$,

$$\frac{\lambda + \alpha + 2}{2} < \rho < \lambda + 1 \quad \left(\Longleftrightarrow \frac{1}{2} < k < 1 \right)$$

かつ次のどちらかをみたすとする：

$$\int^{\infty} \frac{(t^{\rho}p(t) - 1)^2}{t} dt < \infty, \quad (2)$$

$$\int^{\infty} |(t^{\rho}p(t))'| dt < \infty. \quad (3)$$

このとき (E) の弱増大解 u は

$$u(t) \sim u_0(t)$$

をみたす. 但し $u_0(t)$ は (1) で与えられる方程式 (E1) の厳密解である.

3 Proof of Theorem 2.1.

この章では, 前の定理 2.1 の略証を与える.

補題 3.1. 定理 2.1 の仮定の下で

$$u(t) = O(u_0(t)), \quad u'(t) = O(u_0'(t)).$$

補題 3.2. 方程式 (E) は変数変換 $v = u/u_0$, $s = \log u_0(t)$ により次の方程式に帰着される：

$$\ddot{v} + a\dot{v} - bv + b(1 + \delta(s))(\dot{v} + v)^{1-\alpha}v^{\lambda} = 0 \quad (4)$$

但し $\dot{} = d/ds$,

$$a = 2 - \frac{1}{k} \quad (> 0), \quad b = \frac{1-k}{k} \quad (> 0), \quad \delta(s) = t^{\rho}p(t) - 1 \quad (\rightarrow 0 \text{ as } s \rightarrow \infty).$$

以上の補題の証明は省略する. また, 補題 3.1 より, 定理 2.1 の仮定の下では次が判る：

$$v, \dot{v}, \ddot{v} = O(1), \quad v + \dot{v} > 0.$$

補題 3.3. $\dot{v} \in L^2[s_0, \infty)$ かつ $\dot{v} \rightarrow 0$ as $s \rightarrow \infty$.

(証明)

$0 < \alpha \leq 1$ より $(\dot{v} + v)^{1-\alpha}\dot{v} \geq v^{1-\alpha}\dot{v}$ であることに着目すると (4) の両辺に $\dot{v}$ を掛けた式より

$$\ddot{v}\dot{v} + a\dot{v} - b\dot{v}v + bv^{1-\alpha}\dot{v} + b\delta(s)v^{1-\alpha+\lambda}\dot{v} \leq 0$$

となり, これの両辺を積分して

$$\left[\frac{\dot{v}^2}{2} \right]_{s_0}^s + a \int_{s_0}^s \dot{v}^2 dr - \left[\frac{bv^2}{2} \right]_{s_0}^s + \left[\frac{bv^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{s_0}^s + b \int_{s_0}^s \delta(r)v^{1-\alpha+\lambda}\dot{v} dr \leq 0$$

を得る. $v, \dot{v} = O(1)$ より

$$a \int_{s_0}^s \dot{v}^2 dr + b \int_{s_0}^s \delta(r) v^{1-\alpha+\lambda} \dot{v} dr \leq O(1)$$

が判る. 仮定 (2) は $\int_{s_0}^\infty \delta(r)^2 dr < \infty$ と, 仮定 (3) は $\int_{s_0}^\infty |\dot{\delta}(r)| dr < \infty$ と同値であることに注目する. 仮定 (2) の下では Schwarz の不等式を用いると

$$\int_{s_0}^s |\delta(r) v^{1-\alpha+\lambda} \dot{v}| dr \leq c_1 \left(\int_{s_0}^s \delta(r)^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_{s_0}^s \dot{v}^2 dr \right)^{1/2}$$

なので, また仮定 (3) の下では部分積分を用い

$$\int_{s_0}^s \delta(r) v^{1-\alpha+\lambda} \dot{v} dr = \left[\frac{\delta(r) v^{2-\alpha+\lambda}}{2-\alpha+\lambda} \right]_{s_0}^s - \int_{s_0}^s \frac{\dot{\delta}(r) v^{2-\alpha+\lambda}}{2-\alpha+\lambda} dr$$

なので, どちらの仮定の下でも $\int_{s_0}^s \delta(r) v^{1-\alpha+\lambda} \dot{v} dr = O(1)$ が判る. 従って $\dot{v} \in L^2[s_0, \infty)$ また $\ddot{v} = O(1)$ より $\dot{v} \rightarrow 0$ ([1] Lemma 2.2 参照).

補題 3.4. $\liminf_{s \rightarrow \infty} v(s) > 0$ ($\Leftrightarrow \liminf_{s \rightarrow \infty} u(t)/u_0(t) > 0$).

(証明)

背理法を用いる. $\liminf_{s \rightarrow \infty} v(s) = 0$ と仮定すると次の2つの状況が考えられる:

(I) $\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = 0$

(II) $\liminf_{s \rightarrow \infty} v(s) = 0$ かつ $\limsup_{s \rightarrow \infty} v(s) > 0$

(I) の場合, $\lambda > \alpha$ なることと $\delta(s) \rightarrow 0$ なることより, 終局的に v は単調減少であることが分かり

$$\begin{aligned} u'(t) &= \left(\int_t^\infty p(s) u^\lambda ds \right)^{1/\alpha} \\ &= \left(\int_t^\infty p(s) u_0(s)^\lambda \left(\frac{u(s)}{u_0(s)} \right)^\lambda ds \right)^{1/\alpha} \\ &\leq \left(\frac{u(t)}{u_0(t)} \right)^\lambda \left(\int_t^\infty p(s) u_0(s)^\lambda ds \right)^{1/\alpha} \\ &\leq c_1 t^{(1-\rho)/\alpha} u(t)^{\lambda/\alpha}. \end{aligned}$$

従って $u(t) \geq c_2 u_0(t)$ となり矛盾を生じる.

次に (II) の場合を考えよう. やはり $\lambda > \alpha$, $\delta(s) \rightarrow 0$ なることと解曲線の凹凸より, 次のような点列 $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ が存在することが判る:

$$\xi_n, \eta_n \rightarrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

$$\xi_n < \eta_n < \xi_{n+1} < \eta_{n+1} < \cdots,$$

$$\dot{v}(\eta_n) = 0, \quad v(\eta_n) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

$$v(\xi_n) = (1 + \delta(\xi_n))^{-1/(\lambda-\alpha)} \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

方程式 (4) に $\dot{v}$ を掛けて $[\xi_n, \eta_n]$ 上積分すると

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{v}(\xi_n)^2}{2} + a \int_{\xi_n}^{\eta_n} \dot{v}(s)^2 ds - \frac{b(v(\eta_n)^2 - v(\xi_n)^2)}{2} + \frac{b(v(\eta_n)^{2-\alpha+\lambda} - v(\xi_n)^{2-\alpha+\lambda})}{2-\alpha+\lambda} \\ + b \int_{\xi_n}^{\eta_n} \delta(s) v(s)^{1-\alpha+\lambda} \dot{v}(s) ds \leq 0. \end{aligned}$$

$\dot{v} = o(1)$, $\dot{v} \in L^2[s_0, \infty)$ (補題 3.3) より

$$-(2-\alpha+\lambda)(v(\eta_n)^2 - v(\xi_n)^2) + 2(v(\eta_n)^{2-\alpha+\lambda} - v(\xi_n)^{2-\alpha+\lambda}) \leq o(1).$$

$v(\eta_n) = o(1)$, $v(\xi_n) = 1 + o(1)$ より $n \rightarrow \infty$ とすると $\lambda > \alpha$ であることに矛盾を生じる.

(定理 2.1 の証明)

$\lim_{s \rightarrow \infty} v(s) = 0$ であることを示せば十分である. 方程式 (4) より

$$\frac{\dot{v}^2}{2} + a \int_{s_0}^s \dot{v}^2 dr - \frac{bv^2}{2} + b \int_{s_0}^s (\dot{v} + v)^{1-\alpha} v^\lambda \dot{v} dr + b \int_{s_0}^s \delta(r) (\dot{v} + v)^{1-\alpha} v^\lambda \dot{v} dr = c_1 \quad (5)$$

である. 左辺の第 4 項に関して 2 項定理を用いて

$$\begin{aligned} I = \int_{s_0}^s (\dot{v} + v)^{1-\alpha} v^\lambda \dot{v} dr &= \int_{s_0}^s \left(1 + \frac{\dot{v}}{v}\right)^{1-\alpha} v^{1-\alpha+\lambda} \dot{v} dr \\ &= \int_{s_0}^s \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\frac{\dot{v}}{v}\right)^n\right) v^{1-\alpha+\lambda} \dot{v} dr. \end{aligned}$$

但し $d_n = (1-\alpha)(-\alpha)\cdots(2-\alpha-n)/n!$. 補題 3.4 の結果を用いると $\sum_{n=1}^{\infty} (d_n \dot{v}^{n-1})/v^n$ は容易に評価できて

$$I = \left[\frac{v^{2-\alpha+\lambda}}{2-\alpha+\lambda} \right]_{s_0}^s + \int_{s_0}^s \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\dot{v}^{n-1}}{v^n} \right) v^{1-\alpha+\lambda} \dot{v}^2 dr = O(1) + \int_{s_0}^s O(1) v^{1-\alpha+\lambda} \dot{v}^2 dr.$$

を得る. 補題 3.3 ($\dot{v} \in L^2[s_0, \infty)$), 3.4 ($\liminf_{s \rightarrow \infty} v > 0$) より (5) において $s \rightarrow \infty$ とすると $(-v^2/2) + (v^{2-\lambda-\alpha})/(2+\lambda-\alpha)$ には正の有限な極限が存在することが判る. $l = \lim_{s \rightarrow \infty} v(s)$ とすると (4) より

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \ddot{v}(s) = bl(1 - l^{\lambda-\alpha})$$

となる. $\dot{v} = o(1)$ より $\lim_{s \rightarrow \infty} \ddot{v} = 0$ のはずである. $0 < l < \infty$ なので $l = 1$. 従って $u \sim u_0$

参考文献

- [1] K.Kamo and H.Usami, *Asymptotic forms of positive solutions of second-order quasilinear ordinary differential equations*, Adv. Math. Sci. Appl. 10 (2000) 673-688.
- [2] K.Kamo and H.Usami, *Asymptotic forms of positive solutions of quasilinear ordinary differential equations with singular nonlinearities*, in preparation.