

図2に $a=1$, $A=2$ の場合の (X, Y, Z) を書いておく。

§ 4. 最後に

上記 bend 解の物理的意義を述べる。超流動状態で熱流が大きいと多くの渦ができる。渦と渦は必ず衝突する。その場合図3に示すような reconnection がおこる。この event の後に鋭い cusp = bend ができるのである。この bent の長時間ふるまい (減衰が重要な時間スケールで) は上に示した bend 解で記述できる。

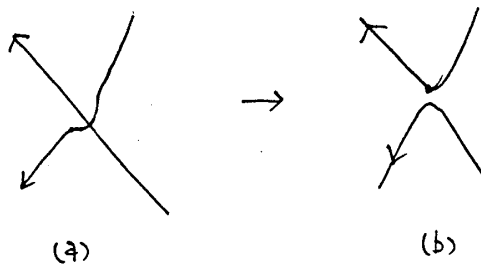


図 3.

Schwarz は bend の運動を数値計算している (1985)。彼の式は (21) と同じものである。

最後に bend 解 (23) ~ (25) は 野崎・戸次氏の厳密解 (減衰のある非線型シュレディンガー方程式) とよくにていることをいっておく。以上の内容は Progress 74 (1985) 979 に発表しました。

また Navier-Stokes 式に従う流体で渦の衝突・reconnection は大変重要な素過程である。この場合渦を表わす曲線の運動方程式は、非局所的 (long range) になる。何らかの厳密解か stochastic な近似等があればよいと強く期待し努力してみるつもりであるが……。

2次元渦糸系の可積分性と渦衝突について

東大・理 木 村 芳 文

§ 1. 2次元渦糸系の可積分性

渦糸とは2次元の縮まない渦無し流れの特解であり、無限領域における N 個の渦糸の運動は次の方程式によって記述される。

$$\frac{dz_j}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\Gamma_k}{z_j - \bar{z}_k} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

ここで $z_j = x_j + iy_j$ は j 番目の渦糸の複素 z 平面における位置, Γ_j はその強さである。 $\bar{z}_j$ は複素共役を表わし、和は $\bar{z}_j = \bar{z}_k$ を除いてとるものとする。

方程式 (1) は次のような Hamilton 関数を導入することにより Hamilton 形式に書けること

が知られている。

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{(i \neq j)} \Gamma_i \Gamma_j \log r_{ij} \quad (2)$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\Gamma_j \dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j} \quad \Gamma_j \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (3)$$

また, Poisson bracket を次のように定義すれば

$$\{f, g\} \equiv \sum_{j=1}^N \frac{1}{\Gamma_j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial y_j} \right] \quad (4)$$

(1) は

$$\dot{x}_j = \{x_j, H\} \quad \dot{y}_j = \{y_j, H\} \quad (5)$$

と書ける。(4) が通常形と $1/\Gamma_j$ だけ違っているのは Γ_j が正または負の値をとり得ることによるものである。

Hamiltonian の可積分性については次の Liouville の定理がよく知られている。

TH. (Liouville) —

N 自由度の Hamiltonian は N の一価、独立な第一積分が包合的に存在すれば求積法によって解ける。

ここで第一積分とは Hamiltonian と Poisson bracket において可換なものであり、包合的とはすべての第一積分がやはり可換であることを要請している。

さて、(1) に関しては次の 3 つの量が条件に合う第一積分として得られている。

① Hamiltonian 自身

② 慣性モーメント $I = \sum_{j=1}^N \Gamma_j (x_j^2 + y_j^2)$

③ 渦中心関数 $G^2 = \left(\sum_{j=1}^N \Gamma_j x_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \Gamma_j y_j \right)^2$

(実は $\sum_{j=1}^N \Gamma_j x_j$, $\sum_{j=1}^N \Gamma_j y_j$ はそれぞれ第一積分であるが可換ではないので単独に扱うことが

できないのである。) よって、無限領域中においては、3 個の渦系系は可積分であることが保証された。ところが境界や流れがある場合には対称性が低下し、もっと少ない個数でさえ、可積分ではなくなってしまうことがわかっている。

§ 2. 衝突解

ここで(1)の相似解を求めるために、3つの渦糸系に対して $z_m = k_m f(t)$ を代入してみる。

$$\dot{f} \bar{f} k_m = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^3 \frac{\Gamma_j}{\bar{k}_m - \bar{k}_j} \quad (m=1, 2, 3) \quad (6)$$

上式で $\dot{f} \bar{f} = A + iB$ (定数) を仮定して時間部分と空間部分を別々に解くと、時間部分に対して

$$f = \sqrt{2At + \alpha} \exp \left[i \left\{ \frac{B}{2A} \log(2At + \alpha) + \beta \right\} \right] \quad (7)$$

(α, β は定数) これによると $A > 0$, $A = 0$, $A < 0$ に対して系の expansion, rigid rotation, contraction を表わしていることがわかる。次に空間部分に対しては

$$(\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1)(X^2 + X + 1) \{ (\Gamma_1 + \Gamma_2) X^3 + (\Gamma_2 + 2\Gamma_3) X - (\Gamma_2 + \Gamma_3) \} = 0$$

ただし $X = (k_1 - k_2) / (k_2 - k_3)$ (8)

が得られる。上式の各因子は次のような意味を持っている。

$$\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1$$

Hamilton 関数(2)に $Z_m = k_m f(t)$ を代入すると expansion および contraction に対して H が時間によらないためには $\sum_{(i \neq j)} \Gamma_i \Gamma_j = 0$ が必要である。

$$X^2 + X + 1$$

この解は3つの渦糸が正三角形を作っている場合に対応している。すなわち、正三角形解が相似解(実は剛体回転解なのだが)として常に存在することを意味している。

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2) X^3 + (\Gamma_2 + 2\Gamma_3) X - (\Gamma_2 + \Gamma_3)$$

この3次方程式の実数解は正三角形解に対して一直線解を表わしていることがわかる。

さらに詳細に調べてみると、3つの渦糸を図1のように配置するとき、衝突解(膨張解)の条件としては

$$\textcircled{1} \quad \Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \Gamma_1 \Gamma_2 l_{12}^2 + \Gamma_2 \Gamma_3 l_{23}^2 + \Gamma_3 \Gamma_1 l_{31}^2 = 0$$

が得られる。 Γ_1 と Γ_2 を決めたとき Γ_3 の位置は次のように決められる。 Γ_1 と Γ_2 をまず適当に置いてその重心を中心として半径

$$r = l_{12} \sqrt{\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2}}$$

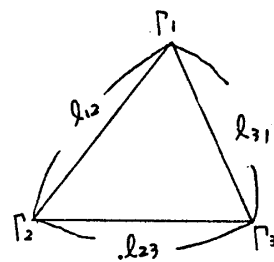


図 1.

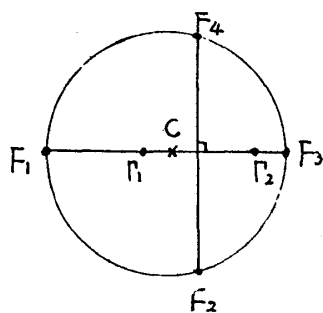


図 2.

の円周上が Γ_3 の位置である。図 2 で $\Gamma_1\Gamma_2$ を結ぶ線と円との交点 F_1F_3 と $\Gamma_1\Gamma_2$ の垂直二等分線と円との交点 F_2F_4 が剛体回転解であり、前の 2 つが一直線解、後の 2 つが正三角形解となる。さらに、衝突をおこすのは初期位置が $\widehat{F_1F_2}$ 上と $\widehat{F_3F_4}$ 上であり、膨脹するのは $\widehat{F_2F_3}$ 上と $\widehat{F_4F_1}$ 上であることもわかる。

最後に衝突点を越しての解析接続性についてであるが、これに関しては相似解の時間部分 (7) が、 $(t - t^*)^{1/2}$ という形を持っており、(t^* は衝突時間) $t > t^*$ では物理量が本質的に虚数になってしまい、解析接続不能である。このことはクーロン粒子が直衝突において弾性反発という解析接続解を持つことと対照的である。

参 考 文 献

- Y. Kimura and H. Hasimoto, J. P. S. J. **54** (11) 1985 pp. 4069–4072.
 Y. Kimura and H. Hasimoto, J. P. S. J. **55** (1) 1986 pp. 5–8.
 Y. Kimura and H. Hasimoto, *Proc. 7th Kyoto Summer Institute, Dynamical Problems in Soliton Systems, Kyoto 1984* (Springer)
 H. Hasimoto, K. Ishii, Y. Kimura and M. Sakiyama, *Proc. Int. Symp. Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, Kyoto 1984* (North Holland).
 H. Aref, Phys. Fluids **22**. 1979 pp. 393–400.
 J. L. Synge, Can. J. Math. **1**. 1949 pp. 257–270.

2 次元非線形波動系の軌道不安定性と トポロジカルな渦のダイナミクス

京大・工 石森勇次, 宮本範親

トポロジカルな欠陥を許す非線形波動系の積分可能性と、欠陥のダイナミクスがどのようににかかわっているのか。特に秩序パラメータの成分が 2 で空間の次元が 2 の系 (そのような系として最も簡単な系はグロス=ピタエフスキー方程式及びヒッグス方程式である) で考える。この様な系の許すトポロジカルに安定な欠陥は渦である。前回の研究会において我々は、渦間