

ナビエ-ストークス流のカオス化

京大数理研 木田重雄 (Shigeo Kida)

京大防災研 山田道夫 (Michio Yamada)

京大理物理 大木谷耕司 (Koji Ohkitani)

1. はじめに

流体の運動の形態はそのレイノルズ数の大小に応じて質的に異なる。一般に小さなレイノルズ数に対しては簡単な構造をもつ層流が実現するが、レイノルズ数を上げていくと流れは次第に複雑になり最終的に乱流となる。

Landau¹ はレイノルズ数を上げていく際に速度場が複雑化する過程について次のシナリオを提案した。定常運動 → 単周期運動 → 2重周期運動 (つまり 2 個の基本周期をもつ準周期運動) → ... → n 重周期運動 → ... → 非周期運動 (カオス)。非周期運動は多重周期運動の多重度無限大の極限と考えられる。これに対して、Newhouse, Ruelle, Takens² は力学系の 3重周期運動は C^2 級の微小攪乱に対して不安定であり、また 4重周期運動は、 C^∞ 級の微小攪乱に対して不安定であることを証明し

た。従つてもしそれらの攪乱がナビエ-ストークス方程式と両立するものであれば、3重ないし4重周期運動は実際の流体系では観測されないことになる。

それ以来、多くの研究が乱流への遷移過程に関してなされてきた。特にいろいろな流体系やその他の力学系での3重周期運動の存在が注目されてきた。力学系の種類によつてカオスへ至る道が多様であることがわかってきた。また、3重、4重、そして5重周期運動までもが、レイリー-ベナール対流やテイラー渦流としてその他の簡単な力学系で³⁻⁶観測された。

この論文ではナビエ-ストークス方程式を数値的に解いて得られた複雑化の過程について報告する。

2. ナビエ-ストークス方程式の数値計算

周期 2π の立方体の中での外力を伴った非圧縮粘性流体の運動を考える。この運動はナビエ-ストークス方程式と連続の式によつて支配され、それらはフーリエ表示で次のようにかける。

$$\frac{d}{dt}\tilde{\omega}_j(k) = \epsilon_{jkl}k_k k_m \tilde{u}_{lm}(k) - \nu k^2 \tilde{\omega}_j(k) \quad (1)$$

と

$$k_j \tilde{u}_j(k) = 0 \quad (2)$$

また

$$\tilde{\omega}_j(k) = i\epsilon_{jkl}k_k \tilde{u}_l(k). \quad (3)$$

ここで $\tilde{u}$, $\tilde{\omega}$ はそれぞれ速度 $u(x)$ と渦度 $\omega(x) = \text{rot } u(x)$ のフーリエ変換である;

$$u(x) = \sum_{|k_1|, |k_2|, |k_3| \leq \frac{1}{2}N} \tilde{u}(k) \exp[ik \cdot x] \quad (4)$$

と

$$\omega(x) = \sum_{|k_1|, |k_2|, |k_3| \leq \frac{1}{2}N} \tilde{\omega}(k) \exp[ik \cdot x], \quad (5)$$

ここで N は整数である。式(1)~(3)の添字はベクトルの成分を表す。繰り返して現われる添字については和をとるものとする。 ε_{jkl} はエディントンの記号、 $\widetilde{u u_{lm}}$ は積 $u_l(x) u_m(x)$ のフーリエ変換、 ν は流体の動粘性率、そして $\ell = |\ell|$ である。時間の引数は簡単のために省略する。

記憶領域と計算時間を節約するため速度場に高対称性を課す。適当な初期条件から出発して式(1)~(3)を数値的に解く。非線型項は擬スペクトル法を用いて計算する。

アライアジング相互作用はフーリエ成分を最大波数 $\ell_{\max} = \frac{1}{3}N$ で切ることによって除去する⁸。時間発展はルンゲクッタ・ジル法で行う。低波数側でいつも一定のエネルギーを供給するために以下の速度のフーリエ成分はいつも一定に固定しておく。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(1, \pm 1, \pm 3; t) &= -\tilde{u}_1(-1, \pm 1, \pm 3; t) = -\tilde{u}_1(1, \pm 3, \pm 1; t) \\ &= \tilde{u}_1(-1, \pm 3, \pm 1; t) = \frac{i}{8}, \end{aligned} \quad (6)$$

($\tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ についても同様。)

異なる粘性についていくつかの計算を行った。計算は初期条件の影響がなくなると思われるまで続けた。計算に用いたパラメータは表Iにまとめられている。整数 N は最大波数 $\frac{1}{3}N$ での打ちの影響がないように選んだ。

異なった種類の乱流はTaylorの微小尺度レイノルズ数 R_λ を用いて互いに比べることができる。 R_λ はエネルギー $\varepsilon(t)$ 、インストロフイー $\alpha(t)$ 、動粘性率 ν を用いて

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{10}{3}} \frac{1}{\nu} \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{\alpha(t)}} = \sqrt{\frac{20}{3}} \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{\nu \varepsilon(t)}}, \quad (7)$$

とかける。ここで $\varepsilon(t) = 2\alpha(t)$ はエネルギー散逸率である。

数値計算によると微小尺度レイノルズ数 R_λ は時間的に変動する。レイノルズ数の時間平均を $1/\nu$ に対して図1に示す。これによると R_λ は小さな $1/\nu$ に対しては $1/\nu$ に比例し、大きな $1/\nu$ に対しては $\sqrt{1/\nu}$ に比例することがわかる。レイノルズ数の $1/\nu$ に対するこのような漸近的依存性は、それぞれ層流と乱流の特徴の現れである。

粘性が異なれば流体の運動形態も異なる。大きな $\nu > \nu_c$ (≈ 0.012) に関しては定常状態が実現し、 ν_c より小さい ν に関しては速度場は時間的に変動する。速度場の時間的な振舞は粘性が小さくなるにつれてだんだんと複雑になる。粘性

を徐々に下げることによって速度場の時間的複雑化について次のシナリオが得られた：定常→周期→2重周期→3重周期→非周期（カオス）運動。以下では、それぞれの運動の特徴をエネルギーの時間変化（§3）、位相空間での軌道の図（§4）を用いて議論する。

3. エネルギーの時系列と周波数パワースペクトル

図2に流体の単位質量当りの運動エネルギーの時系列をいくつかの粘性に対して示す。（いずれもかなり長い計算の後半部分に相当する。）エネルギーは $\nu=0.011, 0.008, 0.0069$ に対しては時間的に規則的に振動する。その振動の振巾は $\nu=0.011$ に対しては一定であるが $\nu=0.008, 0.0069$ に対しては振巾自身が変調する。一方 $\nu=0.0065$ に対するエネルギーは極めて複雑に、一見不規則に変化する。

このエネルギー変化のスペクトル的振舞を見るため、各時間ステップ毎にとった $M(=2^{14})$ 個のデータを用いてエネルギーのパワースペクトルを求めた。図2のそれぞれの場合に対応して図3に異なる区間で計算されたサンプルについて平均を施した周波数パワースペクトルを示す。スペクトルの分解精度 $\Delta\omega=2\pi/M\Delta t$ と最大周波数（Nyquist 周波数） $\pi/\Delta t$ はそれぞれ 0.01971, 157.1である。エネルギー変化に関係の

ない0周波数の成分は除いてある。

$\nu = 0.011$ に対するスペクトルは基本周波数 $\omega_1 = 2.575$ とその倍周波数 $2\omega_1$ にはつきりとピークをもち、また大変弱い3倍周波数 $3\omega_1$ のピークをもつ。(図3(a)) スペクトルの逆数に対して放物線で fitting することによってこれらのピークが実際線スペクトルに対応していることがわかる。(付録参照。)⁹ 同時にそれらの周波数も $\Delta\omega$ の数% の誤差の範囲で決定される。それゆえこの場合は単周期運動であるといえる。

$\nu = 0.008$ のスペクトルには数十個のはつきりとしたピークが見られる。これらの周波数はすべて2つの基本周波数 $\omega_1 = 2.574$, $\omega_2 = 0.326$ の和と差で表されることがわかる。つまりこの場合は2重周期運動をしている。第2の周波数 ω_2 は図2(b)にみられるエネルギーの振巾の変調周波数に対応している。

$\nu = 0.0069$ のスペクトルには多くのピークが現れている。(図3(c)) 2つの基本周波数 $\omega_1 (=2.581)$ と $\omega_2 (=0.295)$ は明らかである。この場合第3の基本周波数 $\omega_3 (=0.068)$ が現れ、それは ω_1, ω_2 の簡単な倍数の和又は差では表されない。すべてのピークの周波数が3つの基本周波数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ の和又は差で表現できることを確かめることができる。(表II) それゆえこれは3重周期運動である。

図3(d)には $\lambda=0.0065$ のパワースペクトルを示す。非常に多くのピークが見られる。ピークのスペクトル成分の数を数えたところそれは周波数領域 $0 \leq \omega \leq 8$ で187にも達した。それは周波数成分405の半分近い数である。このようなたくさんのピークの出現はスペクトルが連続であることと両立し、それゆえ、この運動はカオティックであると言える。

4. 状態空間における軌道とポアンカレ断面

運動の多重周期性は状態空間における状態点の軌道(あるいはアトラクタ)をみることによつてよく区別される。アトラクタは定常運動、単周期運動、2重周期運動、3重周期運動、カオスに応じて、それぞれ固定点、リミットサイクル、2-トーラス、3-トーラス、ストレンジ・アトラクタのように対応する。図4に状態点の軌道を3つのフーリエ成分 $\tilde{w}_1(20, 20, 10)$ 、 $\tilde{w}_1(10, 20, 10)$ 、 $\tilde{w}_1(0, 30, 10)$ の張る部分空間へ射影したものの例を、(a)単周期運動、(b)2重周期運動、(c)カオスの場合について示す。図4(a)ではリミット・サイクルがはっきりと現れていて運動が単周期的であることを証明している。図4(b)、(c)に描れている軌道は分散しているのでその構造を見ることはできない。

図5(b)には図5(a)に示されている $\lambda=0.008$ に対する軌道を

$\omega_1(10, 20, 10)$ 軸に垂直な平面で切った時のポアンカレ断面を示す。このポアンカレ断面は閉曲線にのっている様に見えるが、このことは軌道が 2-トーラスにのっていて、運動が 2 重周期的であることを意味している。同様の図を $\lambda = 0.0065$ の場合について示したものが図 6 である。軌道はポアンカレ平面上で散らばっていて、このことは軌道がアトレンジアトラクタ上にあつて運動がカオティックであることと矛盾しない。

5. カオスから乱流入

前節までで考えたカオスは流れが必ずしも "乱流" であることを意味しない。カオスは時間的に不規則な運動であるが、空間的な変動については何も言っていない。一方、乱流は空間的にも時間的にも不規則な運動である。図 7 にある時刻での瞬間流線を (a) 定常 ($\lambda = 0.1$), (b) カオス ($\lambda = 0.0065$), (c) 乱流 ($\lambda = 0.005$)¹⁰ について示す。これらは x_3 軸に垂直な平面での流線である。図 7 (b) に見られるように、カオスにおいても流れは空間的に簡単な構造をもっている。しかしながら、ずつと小さな粘性 ($\lambda = 0.0005$) に対しては図 7 (c) に見られるように速度場はたくさんのいろいろな大きさの渦運動から成っていてたいへん複雑である。

微小尺度レイノルズ数 R_λ は $\lambda = 0.1, 0.0065, 0.0005$ に対応

してそれぞれ約3、40、200 である。上の結果によれば $R_\lambda \approx 40$ で流れはカオティックではあるが乱流とは言えない。一方多くの実験によつて発達した乱流の相似則は $R_\lambda \gtrsim 80$ で成立することが分っている。¹¹ 例えば速度場の微分の歪度は $R_\lambda \approx 80$ の上と下で異つたレイノルズ数依存性をもつ。¹² どのような物理量がこの臨界レイノルズ数付近での遷移を特徴づけるかは興味ある問題である。

6. まとめと議論

速度場の時間的複雑化の過程は図8にまとめられている。レイノルズ数を上げるに従つて速度場の時間的振舞は次のような遷移を示す。定常的(S) $\rightarrow$ 周期的(P) $\rightarrow$ 2重周期的($Q P_2$) $\rightarrow$ 3重周期的($Q P_3$) $\rightarrow$ カオス的(C)な運動。図8に示されている臨界レイノルズ数はエネルギーの分散とリアプノフ数の依存性が決められた。また速度場の再層流化が観察された。つまり、より高いレイノルズ数で再び周期運動が現れる。

いくつかのコメントをつけ加える。まず数値計算における分解能が有限であるために多重度の大きい準周期運動と非周期的な運動を区別することは困難である。例えば図3(d)のスペクトルを連続であるとみなしたが、それが多くの基本周期を

もつ線スペクトルの集合である可能性もある。したがって3重以上の多重周期運動の存在を今の計算で否定することはできない。第二に、3重周期運動は単に数値的な精度の範囲内で結論されるだけである。なぜなら、図3(c)のスペクトルが見えていない連続成分をもつかもしれないからである。第三に、3重周期運動の存在は Newhouse 等の定理における攪乱がナビエ-ストークス方程式と両立しないことを示している。第四に、速度場に課した空間的周期性や高対称性が3重周期運動を壊す攪乱を禁止している恐れがある。高対称性を取り去るとどうなるかは将来の問題である。

付録 周期関数のパワースペクトル

ここでは周期関数に対して、有限の区間でフーリエ変換を施して得られるパワースペクトルの関数形を考える。周期 $2\pi/\Omega$ の実の周期関数を

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp[im\Omega t], \quad (\text{A.1})$$

のようにフーリエ展開する。ここで A_m は複素数である。 $f(t)$ は実数であるので、 $A_m = A_m^*$ である。 $(*)$ は複素共役を表す。有限区間 $(0 \leq t \leq T)$ で $f(t)$ をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega_n) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp[-i\omega_n t] dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{A_m (1 - \exp[im\Omega T])}{i(\omega_n - m\Omega)}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで $\omega_n = 2\pi n/T$ で n は整数である。

フーリエ係数 $\tilde{f}(\omega_n)$ は $\omega_n = m\Omega$ ($m = -\infty, \dots, \infty$) において無限個の極をもち、パワースペクトル $|\tilde{f}(\omega_n)|^2$ は $\omega_n = m\Omega$ 付近で次のように振舞う。

$$|\tilde{f}(\omega_n)|^2 \approx \frac{2}{T^2} \frac{|A_m|^2 (1 - \cos m\Omega T)}{(m\Omega - \omega_n)^2} \quad \text{for } \omega_n \approx m\Omega. \quad (\text{A.3})$$

したがって、パワースペクトルの逆数は放物線で近似され、その軸は $m\Omega$ に対応する。

図 9 に、基本周期 ω_1 付近でのパワースペクトルの逆数を、

$\epsilon = 0.011$ (図3(a)参照)について示す。実線は横軸に最も近い2点を通り、横軸に接する放物線を示す。この図の他の点も放物線の近傍に並んでいるので、これは周期関数の線スペクトルが、フーリエ変換の区間が有限であるために、広がったものであることがわかる。線スペクトルの周波数は放物線の軸から、2.575と決定される。

References

- ¹ L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Oxford, Pergamon, 1959.
- ² S. Newhouse, D. Ruelle and F. Takens, *Comm. Math. Phys.* **64**, 35 (1978).
- ³ J. P. Gollub and S. V. J. Benson, *Fluid Mech.* **100**, 449 (1980); A. Libchaber, S. Fauve and C. Laroche, *Physica* **7D**, 73 (1983); R.W. Walden, P. Kolodner, A. Passner & C.M. Surko, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 242 (1984).
- ⁴ M. Gorman, L. A. Reith and H. L. Swinney, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **357**, 10 (1980).
- ⁵ H. Yahata, *Prog. Theor. Phys.* **64**, 782 (1980), **69**, 396 (1983).
- ⁶ H. T. Moon, P. Huerre and L. G. Redekopp, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 458 (1982); P. Davis and K. Ikeda, *Phys. Lett.* **100A**, 455 (1984).
- ⁷ S. Kida, *J. Phys. Soc. Japan*, **54**, 2132 (1985).
- ⁸ S. A. Orszag, *Stud. Appl. Math.* **50**, 293 (1971).
- ⁹ S. Kida, M. Yamada and K. Ohkitani, (in preparation).
- ¹⁰ S. Kida, and Y. Murakami (in preparation).
- ¹¹ A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, MIT Press, Vol. 2, 1975.
- ¹² S. Tavoularis, J.C. Bennett and S. Corrsin, *J. Fluid Mech.* **88**, 63 (1978).

Table I. The parameters used in the simulation.

$1/\nu$	$10 \leq 1/\nu \leq 500$	1000	2000
N	128	256	512
Δt	0.02	0.01	0.002

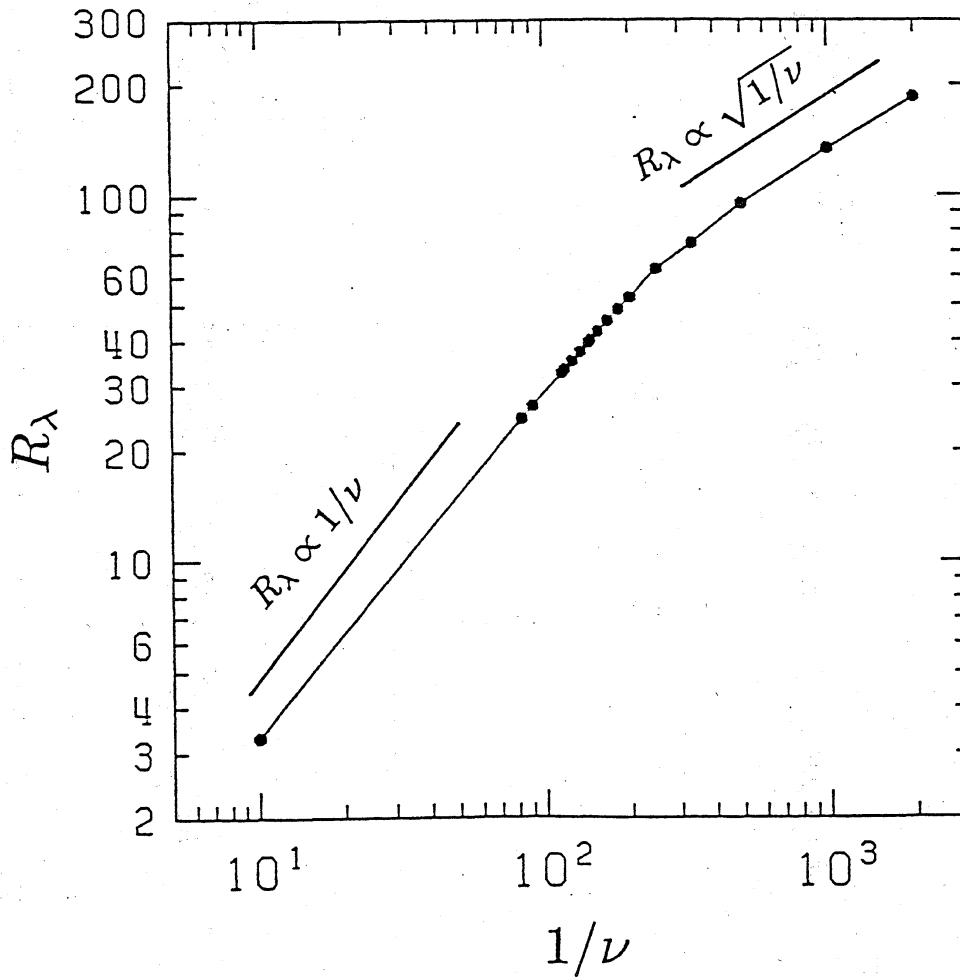


Figure 1. Dependence on viscosity of the averaged micro-scale Reynolds number.

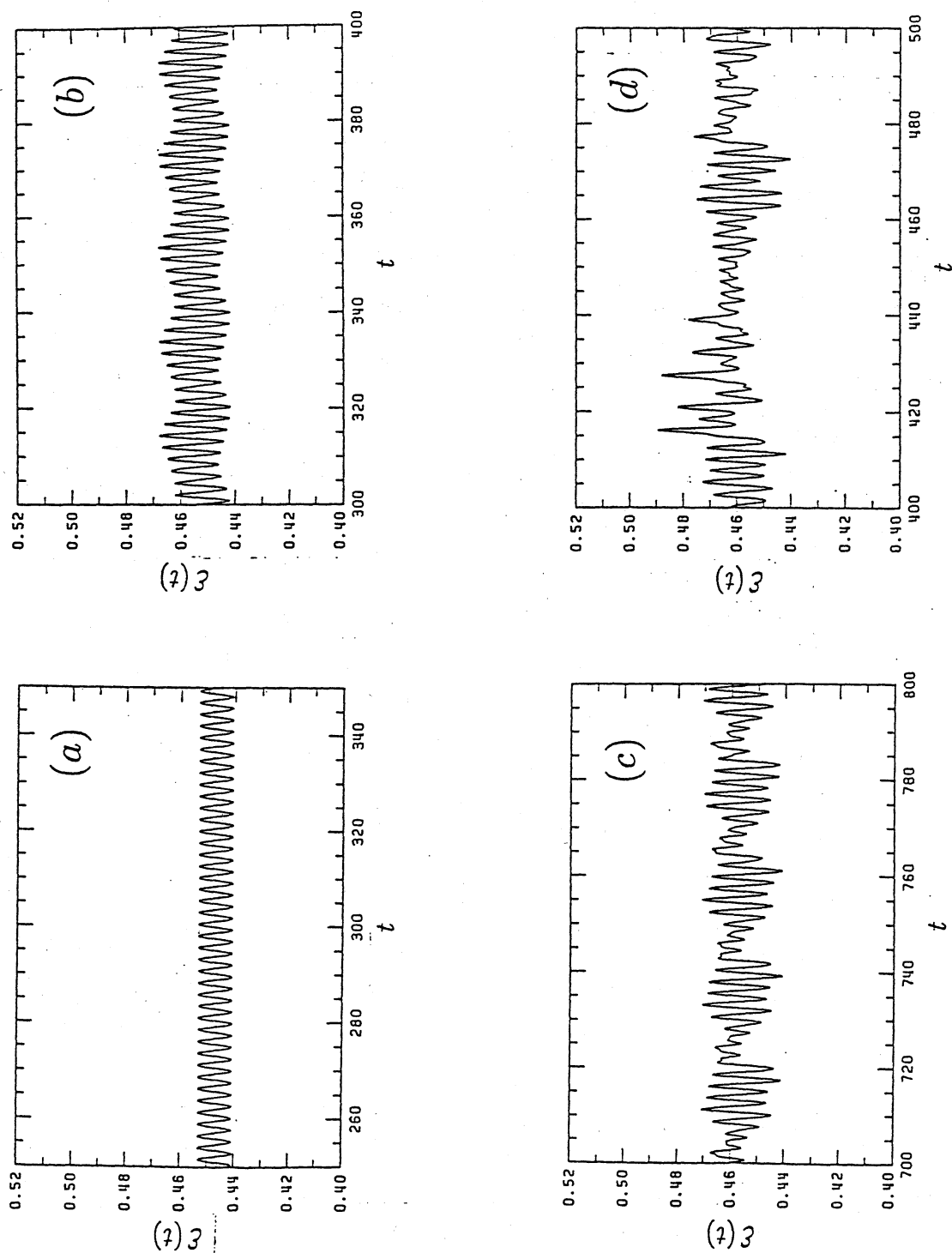


Figure 2. Time series of the energy. (a) $\nu = 0.011$. (b) $\nu = 0.008$.
(c) $\nu = 0.0069$. (d) $\nu = 0.0065$.

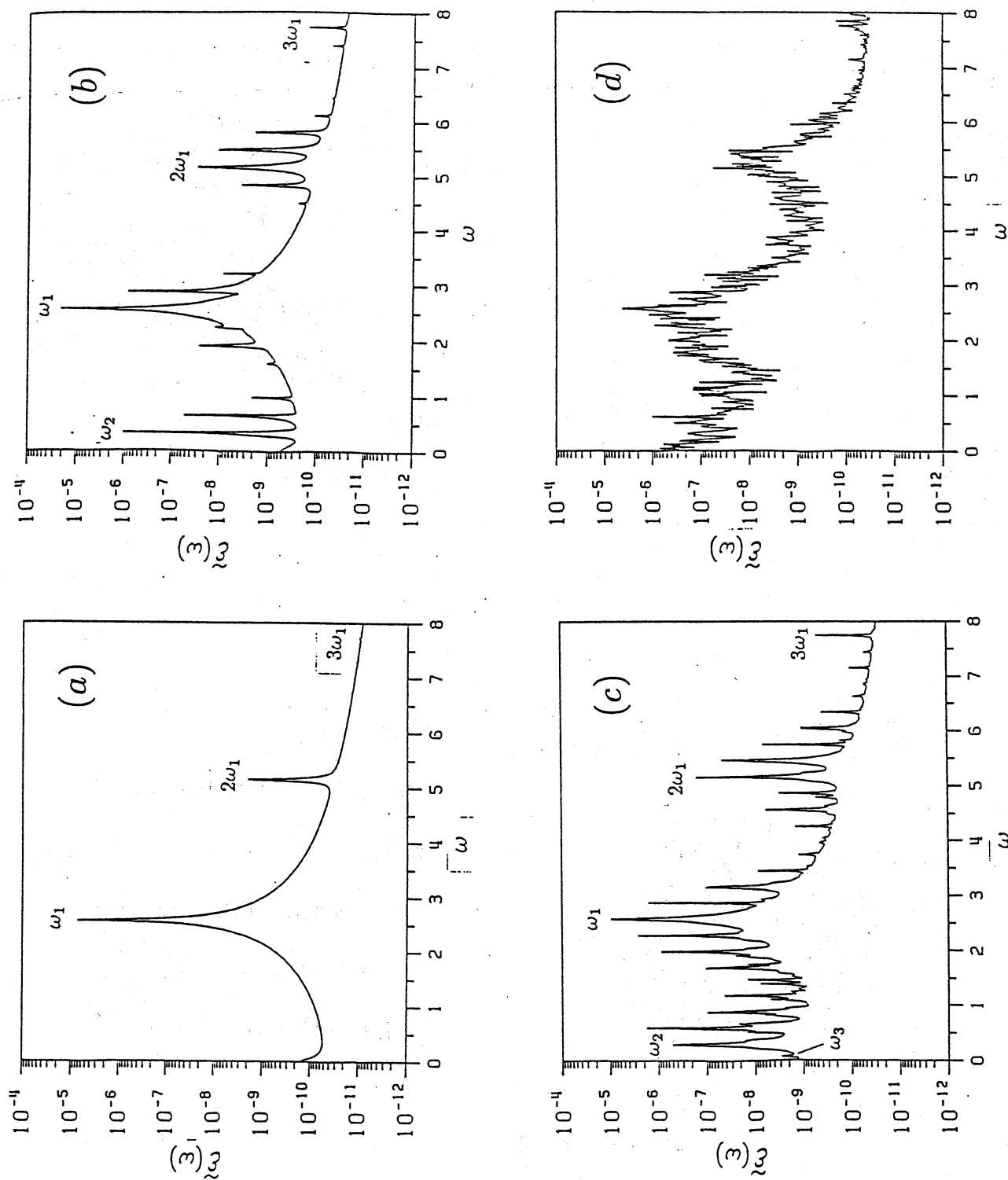


Figure 3. Frequency power spectrum of energy. (a) $\nu = 0.011$.

(b) $\nu = 0.008$. (c) $\nu = 0.0069$. (d) $\nu = 0.0065$.

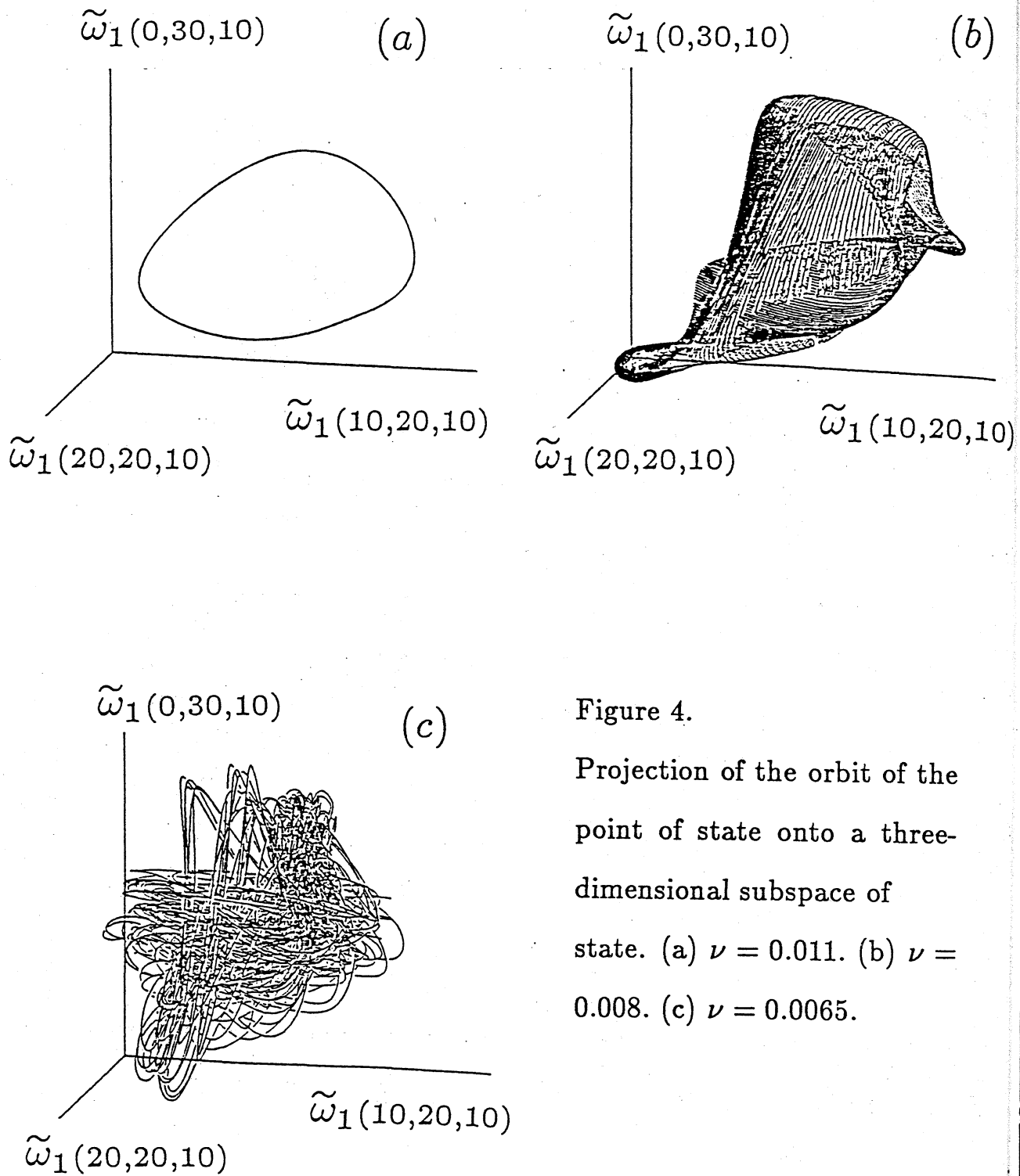


Figure 4.

Projection of the orbit of the point of state onto a three-dimensional subspace of state. (a) $\nu = 0.011$. (b) $\nu = 0.008$. (c) $\nu = 0.0065$.

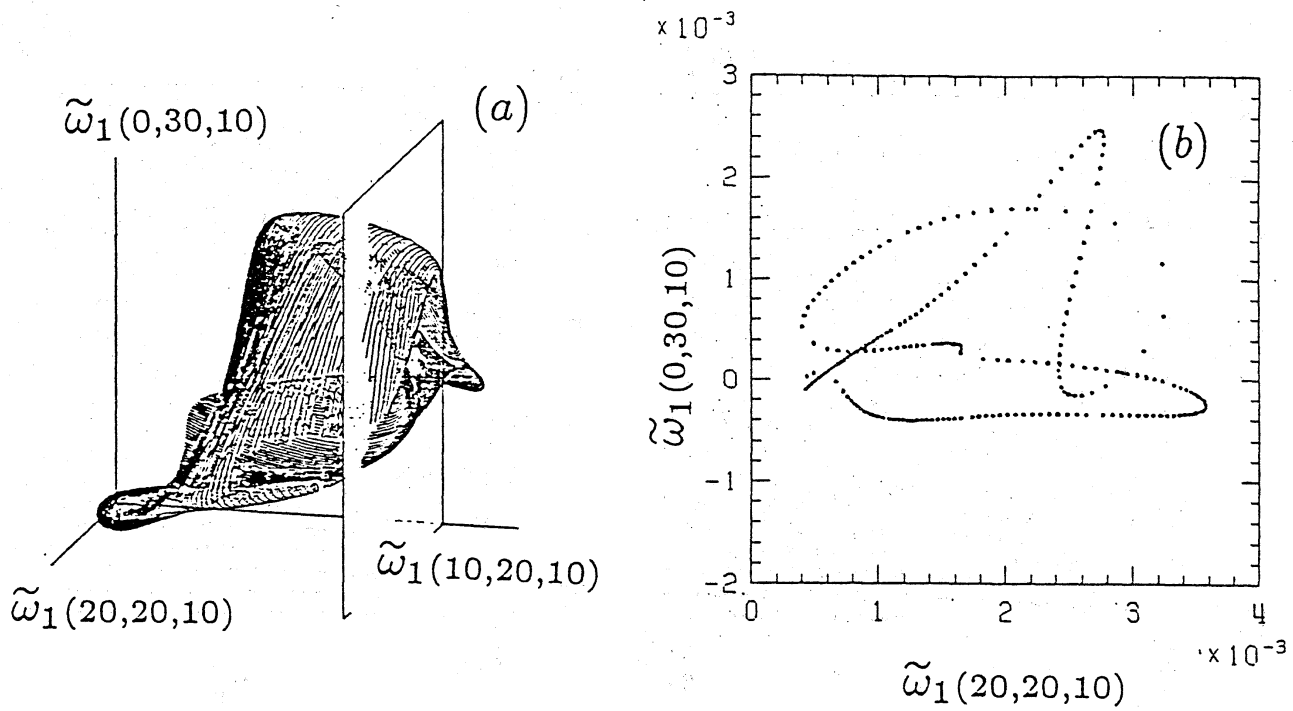


Figure 5. (a) The projection of the orbit of the points of state onto a three-dimensional subspace of state together with a Poincaré plane for $\nu = 0.008$. (b) The Poincaré section of the orbit intersected by the plane shown in (a).

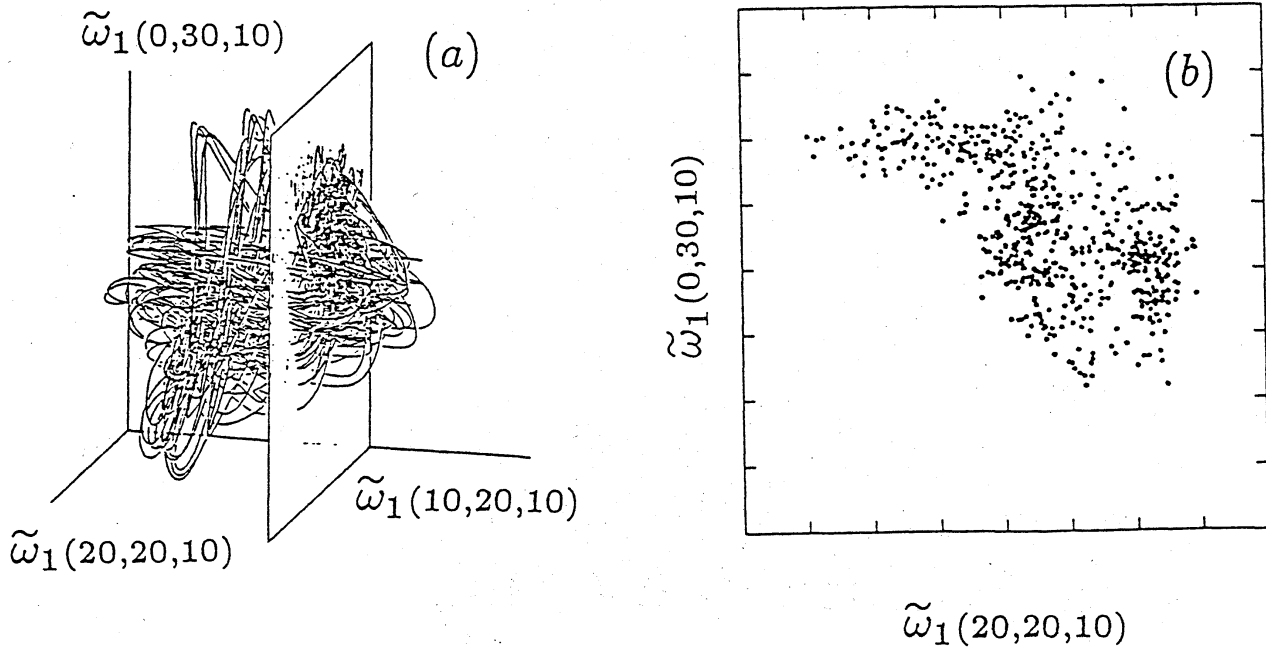
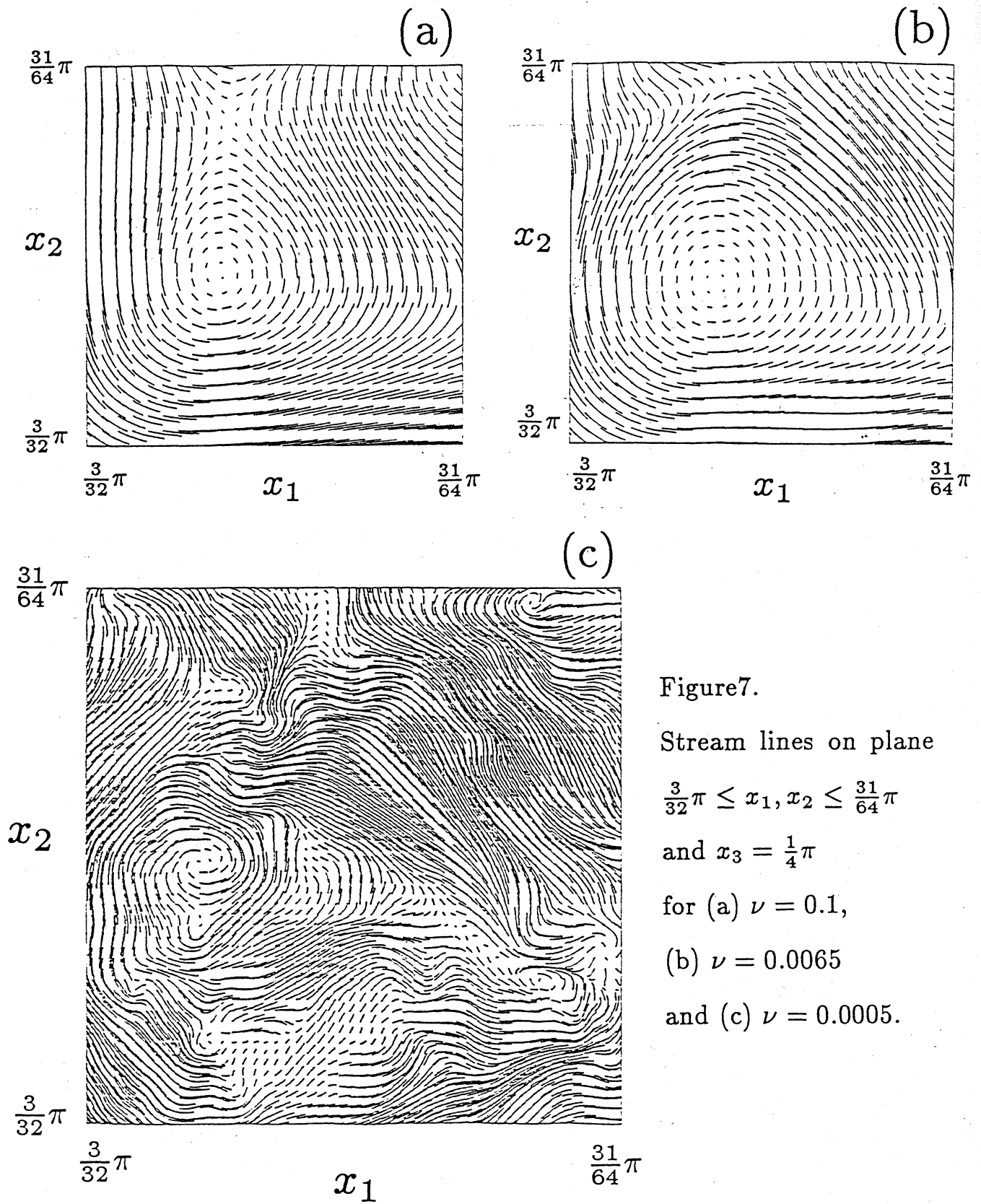


Figure 6. The same as figure 5 for $\nu = 0.0065$.



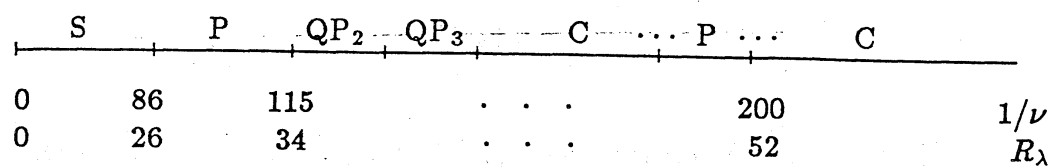


Figure 8. The process of temporal complexity.

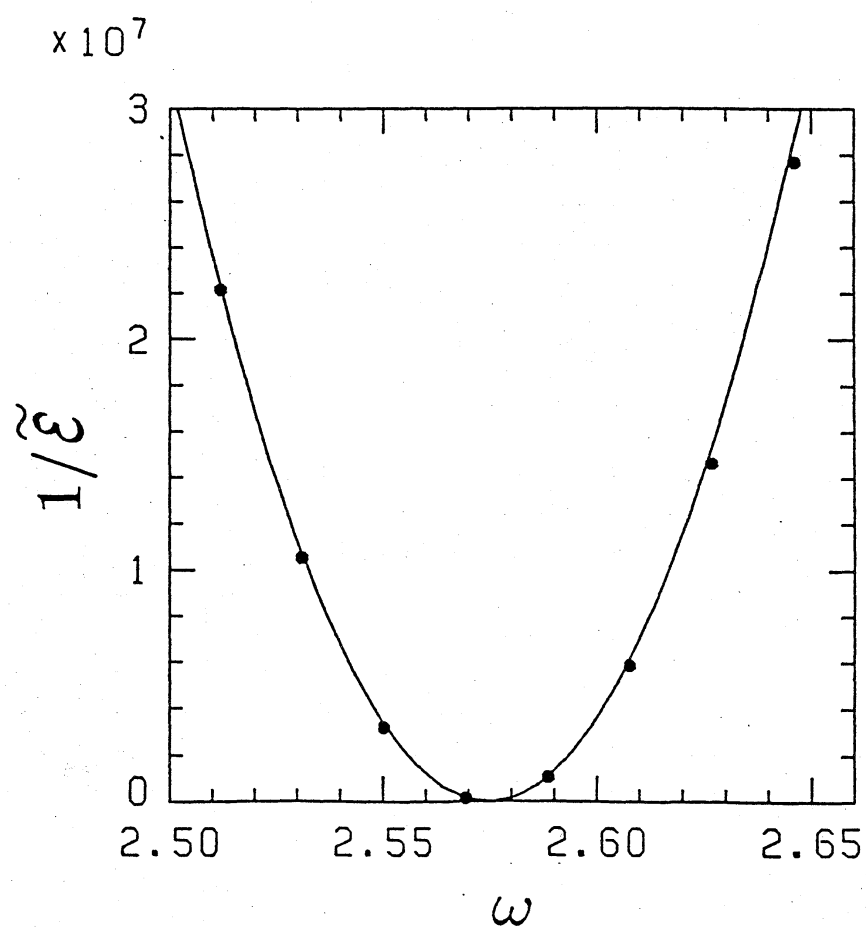


Figure 9. The parabola fitting of the inverse of the frequency power spectrum of the energy for $\nu = 0.011$.

Table II

The simplest triplets of integers (n_1, n_2, n_3) which satisfy the condition that $|\omega(=n\Delta\omega) - (n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3)| \leq 0.9\Delta\omega$ for all the peak spectral components detected in the frequency domain $0 \leq \omega \leq 8$ in case of $\nu = 0.0069$. Here $\omega_1 = 2.581$, $\omega_2 = 0.295$, $\omega_3 = 0.068$ and $\Delta\omega = 0.01917$.

n	(n_1, n_2, n_3)
4	(0, 0, 1)
7	(0, 0, 2)
11	(0, 1, -1)
15	(0, 1, 0)
19	(0, 1, 1)
27	(0, 2, -1)
31	(0, 2, 0)
35	(0, 2, 1)
38	(0, 2, 2)
43	(0, 3, -1)
46	(0, 3, 0)
50	(0, 3, 1)
55	(0, 4, -2)
58	(0, 4, -1)
62	(0, 4, 0)
66	(0, 4, 1)
69	(1, -4, -1)
73	(1, -4, 0)
77	(1, -4, 1)
81	(1, -3, -2)
84	(1, -3, -1)
88	(1, -3, 0)
92	(1, -3, 1)
96	(1, -2, -2)
100	(1, -2, -1)
104	(1, -2, 0)
107	(1, -2, 1)

n	(n_1, n_2, n_3)
115	(1, -1, -1)
119	(1, -1, 0)
123	(1, -1, 1)
135	(1, 0, 0)
146	(1, 1, -1)
150	(1, 1, 0)
154	(1, 1, 1)
162	(1, 2, -1)
165	(1, 2, 0)
169	(1, 2, 1)
177	(1, 3, -1)
181	(1, 3, 0)
185	(1, 3, 1)
192	(1, 4, -1)
196	(1, 4, 0)
200	(1, 4, 1)
203	(1, 4, 2)
207	(2, -4, 0)
212	(2, -4, 1)
219	(2, -3, -1)
223	(2, -3, 0)
226	(2, -3, 1)
235	(2, -2, -1)
238	(2, -2, 0)
242	(2, -2, 1)
247	(2, -1, -2)
250	(2, -1, -1)

n	(n_1, n_2, n_3)
254	(2, -1, 0)
265	(2, 0, -1)
269	(2, 0, 0)
273	(2, 0, 1)
285	(2, 1, 0)
296	(2, 2, -1)
300	(2, 2, 0)
304	(2, 2, 1)
312	(2, 3, -1)
316	(2, 3, 0)
327	(2, 4, -1)
331	(2, 4, 0)
335	(2, 4, 1)
343	(2, 5, -1)
346	(2, 5, 0)
350	(2, 5, 1)
358	(3, -3, 0)
362	(3, -3, 1)
369	(3, -2, -1)
373	(3, -2, 0)
377	(3, -2, 1)
384	(3, -1, -1)
388	(3, -1, 0)
392	(3, -1, 1)
400	(3, 0, -1)
404	(3, 0, 0)
408	(3, 0, 1)