

作用素環の微分と自己同型写像

東工大 木島洋一 村上潔

序. Kadison - Ringrose "Derivations and Automorphisms of Operator Algebras" Commun. math. Phys. 4, 32-63 (1967) の内容を紹介します。論文は I ~ IV の部分に分れており、I ~ III は主に一般論、IV は特殊例についての考察になっています。I ~ III は木島、IV は村上が受けもちました。

§ I ~ III (一般論)

C^* -algebra の $*$ -自己同型写像全体は自然な定義の仕方では位相群をなしている。この位相群の特殊な部分群として 2 個、それに加えて C^* -algebra の忠実な $*$ -表現に関連して定義される部分群 4 個が考察の対象になっている。

これらの部分群たちに対して、お互がいの包含関係はどうなっているか？ それらは位相的に開または閉になっているか？ それらは他の正規部分群になっているか？ などの問題に解答を与えている。

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素全体のつくる C^* -algebra とし、 $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素を $1_{\mathcal{H}}$ で表わす。 $\mathcal{A}$ は $1_{\mathcal{H}}$ を含む $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の C^* -subalgebra で $\overline{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の weak-operator closure とする。 $\mathcal{A}$ 上の $*$ -自己同型写像 α に対して、

- (1) α が $\overline{\mathcal{A}}$ 上の $*$ -自己同型写像に拡張できるとき、
 α は extendable であるという。
- (2) $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ のある unitary operator U が存在して $\mathcal{A}$ 上で
 $\alpha(T) = U T U^*$ と表わされるとき、 α は spatial であるという。
- (3) $\overline{\mathcal{A}}$ のある unitary operator U が存在して $\mathcal{A}$ 上で
 $\alpha(T) = U T U^*$ と表わされるとき、 α は weakly-inner であるという。

$\mathcal{A}$ の $*$ -自己同型写像全体を $\alpha(\mathcal{A})$ で表わす。 $\alpha(\mathcal{A})$ は通常的作用素の積に関して群になっている。この群の単位元は $\mathcal{A}$ 上の恒等自己同型写像でこれを I で表わすことにする。

さらに、 $\alpha(\mathcal{A})$ は metric $\|\alpha_1 - \alpha_2\|$ によって位相群になる。

そこで以下 $\alpha(\mathcal{A})$ を位相群と考える。任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \alpha(\mathcal{A})$ に対して $\|\alpha_1 - \alpha_2\| \leq 2$ 、特に任意の $\alpha \in \alpha(\mathcal{A})$ に対して、

$\|\alpha - I\| \leq 2$ となっていることは、つぎの主要結果との関連において注目に値する。(定理の番号は原論文の番号と一致していません)

定理1. $\{\Phi_t\}$ ($-\infty < t < +\infty$) を $\Phi(0)$ の連続1径数部分群とすれば、各 Φ_t は weakly-inner である。

定理2. $\|\Phi - I\| < 2$ ならば、ある連続1径数部分群 $\{\Phi_t\}$ ($-\infty < t < +\infty$) で Φ を含むものが存在する。

A を単位元1をもつ C^* -algebra とする。 A の $*$ -自己同型写像全体を $\alpha(A)$ で表わす。まえと同様にして、 $\alpha(A)$ は位相群になる。 $\alpha(A)$ の単位元は A 上の恒等自己同型写像であり、これを 1 で表わすことにする。いま A から $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ への忠実な $*$ -表現 φ が与えられたとする。(つねに $\varphi(1) = 1_{\mathcal{H}}$ と仮定しておく) このとき前との関連で $\varphi(A) = \mathcal{O}$ とおくことにすれば、 A 上の任意の $*$ -自己同型写像 α に対して、 $\varphi \alpha \varphi^{-1}$ は $\mathcal{O}$ 上の $*$ -自己同型写像になっている。これらのことをもとにして $\alpha(A)$ のいくつかの部分群を定義する。

$\iota_0(A)$: A の内部 $*$ -自己同型写像全体。

$\gamma(A)$: $\alpha(A)$ の単位元1の連結成分。これは位相群の定理から $\alpha(A)$ の閉正規部分群である。

$\varepsilon_{\varphi}(A)$: $\varphi \alpha \varphi^{-1}$ が extendable である α の全体。

$\sigma_{\varphi}(A)$: $\varphi \alpha \varphi^{-1}$ が spatial である α の全体。

$\iota_\varphi(A)$: $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が weakly-inner である α の全体。

$\pi(A)$: 任意の忠実な $*$ -表現 φ に対して、 $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が weakly-inner である α の全体。このような α は π -inner または permanently weakly inner であるといわれる。

定理 3. $\{\alpha_t\} (-\infty < t < +\infty)$ を $\alpha(A)$ の連続 1 径数部分群とすれば、各 α_t は π -inner である。

定理 4. $\|\alpha - \iota\| < 2$ ならば、ある連続 1 径数部分群 $\{\alpha_t\} (-\infty < t < +\infty)$ で α を含むものが存在する。

定理 3、定理 4 はそれぞれ定理 1、定理 2 の言いかえである。これらの定理から次の主要定理が得られる。

定理 5. $\{\alpha : \|\alpha - \iota\| < 2\} \subseteq \tau(A) \subseteq \pi(A)$.

以上の諸定理から最初にあげた問題の解答は、それぞれ以下の定理 6、定理 7、定理 8 の形で述べられる。

定理 6. $\mathcal{L}_0(A), \mathcal{I}(A) \subseteq \pi(A) \subseteq \mathcal{L}_\varphi(A) \subseteq \mathcal{O}_\varphi(A) \subseteq \mathcal{E}_\varphi(A) \subseteq \alpha(A)$.

$\mathcal{L}_0(A)$ と $\mathcal{I}(A)$ の包含関係はさまざまな場合がある。

定理 7. $\mathcal{I}(A), \pi(A), \mathcal{L}_\varphi(A), \mathcal{O}_\varphi(A), \mathcal{E}_\varphi(A)$ は $\alpha(A)$ の開かつ閉な部分群である。 $\mathcal{L}_0(A)$ についてはさまざまな場合がある。

定理 8. $\mathcal{L}_0(A) \triangleleft \alpha(A), \mathcal{I}(A) \triangleleft \alpha(A), \pi(A) \triangleleft \alpha(A),$
 $\mathcal{L}_\varphi(A) \triangleleft \mathcal{E}_\varphi(A)$. 一方、 $\mathcal{L}_\varphi(A) \triangleleft \alpha(A), \mathcal{O}_\varphi(A) \triangleleft \mathcal{E}_\varphi(A),$
 $\mathcal{E}_\varphi(A) \triangleleft \alpha(A)$ でない例がある。

補. $\mathcal{L}_0(A)$ の位相的性質および φ として universal representation を考えた場合の議論が Kadison-Lance-Ringrose "Derivations and Automorphisms of Operator Algebras. II" Journal of Functional Analysis 1, 204-221 (1967) でなされています。また φ として, reduced atomic representation を考えた場合の議論が Lance "Automorphisms of Postliminal C^* -algebras" Pacific Journal Math. Vol. 23, No. 3, 1967 でなされています。

§ 4. 特殊例

ここでは $\alpha(\mathcal{O})$ の部分群の間の包含関係について、いくつかの例を示す。

例 1. ある C^* -algebra $\mathcal{O}$ に対して、二つの忠実 $*$ 表現 φ と θ が存在し、ある $\alpha \in \alpha(\mathcal{O})$ に対して $\alpha \in \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{O})$, $\theta \notin \mathcal{E}_\theta(\mathcal{O})$ となる。この時 $\mathcal{J}(\mathcal{O}) \subset \pi(\mathcal{O}) \subsetneq \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{O})$ 。

$\mathcal{O}$: the fermion algebra

i.e. $\exists \{M_n\}$; a family of increasing self-adjoint subalgebras of $\mathcal{O}$ with same unit and $M_n \cong \{2^n \times 2^n \text{-matrix}\}$ and $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n = \text{a dense sub algebra of } \mathcal{O}$ ($M_0 = I$).

M_n の matrix units を次のように選ぶ

$$E_{j,j}^n \ (j=1, \dots, 2^n): \text{orthogonal projections, } E_{j,k}^{n*} = E_{k,j}^n$$

$$E_{j,j}^n = E_{2^{j-1}, 2^{j-1}}^n + E_{2^j, 2^j}^n; \ E_{2^{j-1}, 1}^n = E_{j,1}^{n-1} \cdot E_{1,1}^n; \ E_{2^j, 2}^n = E_{j,1}^{n-1} \cdot E_{2,2}^n$$

$$\text{この時 } \exists \alpha \in \alpha(\mathcal{O}) \quad \alpha(E_{j,k}^n) = E_{2^{n-j+1}, 2^{n-k+1}}^n$$

$$\text{又 } U_n \equiv \sum_{j+k=2^{n+1}} E_{j,k}^n \Rightarrow \alpha(A) = U_n A U_n^* = U_{n+1} A U_{n+1}^*, \ A \in M_n \subset M_{n+1}$$

I) φ の構成

$$\mathcal{L} = L^2([0,1], m) \quad (m: \text{the Lebesgue measure})$$

$$\varphi(E_{j,k}^n): (\chi_{S_k^n} f)(t) \rightarrow \chi_{S_j^n}(t) f(t - \frac{j-1}{2} + \frac{k-1}{2}) \quad f \in \mathcal{L}, \ S_k^n = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$$

$$\varphi(E_{j,k}^n): \text{partial isometry } \chi_{S_k^n} \mathcal{L} \rightarrow \chi_{S_j^n} \mathcal{L}$$

$\varphi: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に拡張でき、忠実な*表現となる。

$$M_f \in \varphi(\mathcal{O}) \text{ for } \forall f \in C([0,1]), (M_f(\xi) = f\xi \quad \xi \in \mathcal{H}) \Rightarrow \varphi(\mathcal{O})' = \mathbb{C}I$$

故に φ 既約 i.e. $\overline{\varphi(\mathcal{O})}^w = \mathcal{L}(\mathcal{H})$

II) $\lambda \in \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{O})$

$\forall \{X_{S_j^n}; n=1,2,\dots, j=1,\dots,2^n\}$: dense in $\mathcal{H}$

$$\varphi(U_n)(X_{S_j^n}) = \varphi(U_m)(X_{S_j^n}) \text{ for } m \geq n,$$

$$\|\varphi(U_n)\| = 1, \quad \varphi(U_n)^2 = I \quad \text{for } \forall n.$$

$$\Rightarrow \exists U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^w \quad \varphi(U_n) \rightarrow U, \quad U\varphi(E_{j,k}^n)U = \varphi(U_n)\varphi(E_{j,k}^n)\varphi(U_n)$$

$$\text{故に } \varphi \lambda \varphi^*(A) = UAU \quad A \in \varphi(\mathcal{O})$$

$$\varphi \text{ 既約} \Rightarrow U \in \overline{\varphi(\mathcal{O})}^w \quad \therefore \lambda \in \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{O})$$

III) θ の構成

$\mathcal{H}_0 = L^2([0,1], \mathcal{M})$ $\mathcal{M}(B) \equiv$ the number of dyadic points in B

$$\theta(E_{j,k}^n): (X_{T_k^n} f)(t) \rightarrow X_{T_k^n}(t) f(t - \frac{j-1}{2} + \frac{k}{2}) \quad f \in \mathcal{H}_0, \quad T_k^n = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$$

$\theta: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ に拡張でき、忠実な*表現になる。

$\{X_{\frac{j}{2^n}}(t); n=1,2,\dots, j=1,\dots,2^{n-1}\}$: $\mathcal{H}_0$ の正規直交規底

$$P_{\frac{j}{2^n}} = \bigwedge_{m \geq n} \varphi(E_{j \cdot 2^{m-n}+1, j \cdot 2^{m-n}+1}^m) \quad P_{\frac{j}{2^n}}: \text{projection on } X_{\frac{j}{2^n}} \mathcal{H}_0$$

$$E_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{k}{2^m}}: \text{partial isometry } X_{\frac{k}{2^m}} \mathcal{H}_0 \rightarrow X_{\frac{j}{2^n}} \mathcal{H}_0$$

$$E_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{k}{2^m}} \cdot E_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{j}{2^n}*} = P_{\frac{j}{2^n}} \quad E_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{k}{2^m}*} \cdot E_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{j}{2^n}} = P_{\frac{k}{2^m}}.$$

$$\varphi(E_{p,q}^l) \rightarrow E_{\frac{p}{2^n}}^{\frac{q}{2^m}} \text{ (weak) as } l \rightarrow \infty \quad \begin{pmatrix} p = j \cdot 2^{e-n} + 1 & l \geq n \\ q = k \cdot 2^{e-m} + 1 & l \geq m \end{pmatrix}$$

以上より $\overline{\theta(\mathcal{O})}^w = \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ i.e. θ 既約

IV) $\alpha \notin E_\theta(\mathcal{O})$

$$\alpha(E_{11}^n) = E_{2^n 2^n}^n \quad \wedge \quad \theta(E_{11}^n) = P_0 \quad \wedge \quad \theta(E_{2^n 2^n}^n) = 0$$

$\Rightarrow \theta \alpha \theta^{-1}$ は $\overline{\theta(\mathcal{O})}^\omega = \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ に拡張できない。 $\therefore \alpha \notin E_\theta(\mathcal{O})$.

例2 $\mathcal{L}_0(\mathcal{O}) \subsetneq \pi(\mathcal{O})$ の例を作る.

$\mathcal{H}$: separable Hilbert space.

$$\mathcal{O} = V\{I, C \in \mathcal{C}(\mathcal{H})\} = \{aI + C : a \in \mathbb{C}, C \in \mathcal{C}(\mathcal{H})\}$$

$\mathcal{O}$ の既約表現は $\mathcal{O}$ を定義したものか、又は 1 次元表現だけである。他の表現はこれら 2 つの copy の直和である。

φ : $\mathcal{O}$ の忠実表現

$\Rightarrow \exists Q$: central projection of $\overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega$

$$\overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega(I-Q) = \{\lambda(I-Q)\}, \quad \overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega Q : \text{factor of Type I.}$$

$$\alpha \in \mathcal{A}(\varphi(\mathcal{O})) \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathcal{A}(\overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega) \quad \beta|_{\varphi(\mathcal{O})} = \alpha,$$

$$\beta : \overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega Q \rightarrow \overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega Q \text{ onto}, \quad \overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega(I-Q) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \beta \in \mathcal{L}_0(\overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega) \quad \text{i.e. } \alpha \in \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{O})$$

$$\varphi \text{ 任意} \Rightarrow \alpha \in \pi(\mathcal{O}) \quad \text{i.e. } \mathcal{A}(\mathcal{O}) = \pi(\mathcal{O}).$$

ここで $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(u)}$, $U \notin \mathcal{O}$ とする.

$$\alpha(A) \equiv UAU^* \quad A \in \mathcal{O} \Rightarrow \alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) \quad \alpha \notin \mathcal{L}_0(\mathcal{O})$$

[注. この時 $\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \pi(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}) = \{U \cdot U^* : U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(u)}\}$

$$U = \exp iH, \quad U_t = \exp itH, \quad \alpha_t(\cdot) \equiv U_t \cdot U_t^*$$

$\Rightarrow t \mapsto \alpha_t$: norm cont. one-parameter group in $\mathcal{A}(\mathcal{O})$

$$\therefore \alpha_t \in \mathcal{J}(\mathcal{O}), \quad \alpha = \alpha_1 \in \mathcal{J}(\mathcal{O}). \quad]$$

例3 ある C^* -algebra で 忠実 $*$ 表現 ι が存在し.

$\iota_0(\mathcal{O}) \subsetneq \pi(\mathcal{O}) \subsetneq \iota_1(\mathcal{O})$ なる例を作る.

$\mathcal{H}$: separable Hilbert space

M : factor of Type II acting on $\mathcal{H}$ with coupling 1.

$\mathcal{O} = \{A + C; A \in M, C \in cc(\mathcal{H})\}$: C^* algebra.

M の仮定より $\alpha \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow \exists U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(M)} \quad \alpha(\cdot) = U \cdot U^*$

$$\alpha_0(A+C) \equiv U(A+C)U^* \Rightarrow \alpha_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{O}).$$

ι : $\mathcal{O}$ を定義した $\mathcal{H}$ 上への表現 $\Rightarrow \alpha \in \iota_1(\mathcal{O})$.

$\mathcal{O}/cc(\mathcal{H}) = M \Rightarrow \psi: A+C \rightarrow A$ $\mathcal{O}$ の $\mathcal{H}$ 上への $*$ 表現

$\varphi = \iota \oplus \psi$: $\mathcal{O}$ の $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上への忠実 $*$ 表現, $\overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega = \mathcal{L}(\mathcal{H}) \oplus M$

$$\beta \equiv \varphi \alpha_0 \varphi^{-1} \quad \beta(\{A+C, A\}) = \{\alpha_0(A+C), \alpha_0(A)\} \quad A \in M, C \in cc(\mathcal{H})$$

故に $\alpha \notin \iota_0(M) \Rightarrow \beta \notin \iota_0(\overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega)$ i.e. $\alpha_0 \notin \iota_\varphi(\mathcal{O})$.

$$\therefore \pi(\mathcal{O}) \subsetneq \iota_1(\mathcal{O}).$$

次. $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(M)} \cap M' \quad \|U - I\| < 1, \quad U \neq \lambda I, \quad |\lambda| = 1.$

$$\alpha(\cdot) \equiv U \cdot U^*, \quad \|\alpha - \iota\| < 2.$$

定理5より $\alpha \in \mathcal{J}(\mathcal{O}) \subset \pi(\mathcal{O})$

一方 $\alpha \notin \iota_0(\mathcal{O}) \quad \therefore \iota_0(\mathcal{O}) \subsetneq \pi(\mathcal{O})$.

[注 この時 $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{O}), \alpha|_M = I_M \Rightarrow \alpha \in \mathcal{J}(\mathcal{O})$

$$\alpha|_M = I_M \Rightarrow \exists U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{(M)} \cap M' \quad \alpha(\cdot) = U \cdot U^*$$

$$U = \exp iH, \quad U_t = \exp itH \quad \alpha_t(\cdot) = U_t \cdot U_t^*$$

例3の注と同様にして $\alpha \in \mathcal{K}(\mathcal{O})$]

例4 $\alpha(\mathcal{O})$ の部分群 $\mathcal{K}(\mathcal{O}), \mathcal{L}(\mathcal{O}), \pi(\mathcal{O})$ についてその包含関係を Homotopy Theory を使って考察する。

$$\mathcal{A} = C(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ cont.}\} \quad X: \text{compact } T_2\text{-space.}$$

$$M_n = \mathcal{L}(\mathcal{H}_n) = \{n \times n\text{-matrix}\} \quad \mathcal{H}_n: n\text{-次元複素 Hilbert 空間}$$

$$\mathcal{O} = \mathcal{A} \otimes M_n \cong C(X, M_n) = \{f: X \rightarrow M_n, \text{ cont.}\} \quad \mathcal{E} = \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$$

$$\alpha_c(\mathcal{O}) = \{\alpha \in \alpha(\mathcal{O}); \alpha(A) = A, \text{ for } \forall A \in \mathcal{E}\}.$$

I) $\alpha_c(\mathcal{O}) = \pi(\mathcal{O})$ を示す

$\alpha \in \pi(\mathcal{O}), \varphi: \mathcal{O}$ の一つの忠実*表現

$$\exists U \in \overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega \quad U: \text{unitary} \quad \varphi \alpha \varphi^{-1}(\cdot) = U \cdot U^*$$

$$A \in \mathcal{E} \subset \varphi^{-1}(\overline{\varphi(\mathcal{O})}^\omega \cap \varphi(\mathcal{O}')) \quad \alpha(A) = \varphi^{-1}(\varphi \alpha \varphi^{-1})(\varphi(A)) = A.$$

$$\therefore \alpha \in \alpha_c(\mathcal{O}), \quad \pi(\mathcal{O}) \subset \alpha_c(\mathcal{O}).$$

逆に $\alpha \in \alpha_c(\mathcal{O})$ とする。

$\mathcal{O}$ の忠実*表現は $\mathcal{A}$ が $\mathcal{H}$ の上に忠実*表現されている Hilbert space $\mathcal{H}$ の n -直和 $\mathcal{H}^{\oplus n}$ 上に作用している $\mathcal{A} \otimes M_n$ と unitary 同値である事を注意しておく。

$\{E_{j,k}; j,k=1,2,\dots,n\}$: matrix units of M_n .

$$\alpha(I \otimes E_{j,k}) \equiv B_{j,k}$$

$$\Rightarrow \alpha\left(\sum_{j,k} A_{j,k} \otimes E_{j,k}\right) = \sum_{j,k} (A_{j,k} \otimes I) B_{j,k} \quad \because \alpha(A_{j,k} \otimes I) = A_{j,k} \otimes I.$$

$\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{L} \quad \mathcal{L}(\mathcal{J}^{-1} \mathcal{L})$: strong operator cont.

$$\Rightarrow \mathcal{J} \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{A}}^\omega) \quad (\overline{\mathcal{A}}^\omega = \overline{\mathcal{A}}^\omega \otimes M_n) \quad \mathcal{J}|_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}$$

$$\mathcal{J}(A \otimes I) = A \otimes I, \quad A \in \overline{\mathcal{A}}^\omega, \quad \overline{\mathcal{A}}^{\omega'} = \overline{\mathcal{A}'} \otimes I$$

$$\Rightarrow \mathcal{J} \in \mathcal{L}_0(\overline{\mathcal{A}}^\omega) \quad \because \overline{\mathcal{A}}^\omega: \text{Type I v. N.-alg.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \in \pi(\mathcal{L}) \quad (\text{上の注意より}) \quad \therefore \mathcal{L}_c(\mathcal{L}) \subset \pi(\mathcal{L})$$

II) $\mathcal{J}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}_0(\mathcal{L}) \subset \pi(\mathcal{L})$ を示す.

$$i) \pi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_c(\mathcal{L}) \cong C(X, \mathcal{L}(M_n)) = \{f: X \rightarrow \mathcal{L}(M_n) : \text{cont.}\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{L}), \quad \rho \in X, \quad \varphi_\rho \equiv \rho(A)B \quad (A \in C(X), \rho(A) = A(\rho))$$

φ_ρ : homomorphism of $\overline{\mathcal{A}} \otimes M_n$ onto M_n

$$B \in M_n, \quad \mathcal{L}(\rho)(B) \equiv \varphi_\rho(\mathcal{L}(I \otimes B))$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\rho) \in \mathcal{L}(M_n) \quad \because M_n: \text{有限次元}$$

$$\rho \mapsto \mathcal{L}(\rho): X \rightarrow \mathcal{L}(M_n) : \text{cont.} \quad (f, \mathcal{L} \text{ と 著し})$$

$$f, \mathcal{L} \in C(X, \mathcal{L}(M_n))$$

$$\text{逆に } f \in C(X, \mathcal{L}(M_n)) \quad f(\rho) \equiv \mathcal{L}_f(\rho)$$

$$B \in M_n, \quad \mathcal{L}_f(\rho)B = \sum_{j,k} \hat{A}_{jk}(\rho) E_{jk}$$

$$\hat{A}_{jk}: \rho \mapsto \hat{A}_{jk}(\rho), \quad X \rightarrow \mathbb{C} \text{ cont.} \quad \text{i.e. } \hat{A}_{jk} \in C(X) = \overline{\mathcal{A}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_f(A \otimes B) \equiv \sum_{j,k} A \hat{A}_{jk} \otimes E_{jk}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}), \quad \mathcal{L}_f(A \otimes I) = A \otimes I, \quad A \in \overline{\mathcal{A}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_f \in \mathcal{L}_c(\mathcal{L})$$

$$ii) U(n) = M_n^{(u)} \quad T_1 = \{\lambda I_n \mid |\lambda| = 1\} : \text{the center of } U(n)$$

$$P: U(n) \rightarrow U(n)/T_1 : \text{canonical map}$$

homotopy theory かつ

$U(n)/T_1$: base space, $U(n)$: bundle P : projection

T_1 : fiber and group

と考えられた。

$$\mathcal{A}(M_n) = \mathcal{L}_0(M_n) \cong U(n)/T_1$$

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}_0(\mathcal{O}) \quad \exists U_{\mathcal{A}} \in \mathcal{O}^{(u)} \quad \mathcal{A}(\cdot) = U_{\mathcal{A}} \cdot U_{\mathcal{A}}^*$$

$$f_{\mathcal{A}}(p) \equiv g_p(U_{\mathcal{A}}) \in U(n)$$

$$\Rightarrow f_{\mathcal{A}} \in C(X, U(n)) = \{f: X \rightarrow U(n); \text{cont.}\}, \quad f_{\mathcal{A}} = P \bar{f}_{\mathcal{A}}$$

$$\text{逆に, } \bar{f} \in C(X, U(n)) = C(X, M_n)^{(u)} \cong \mathcal{O}^{(u)}$$

$$\Rightarrow f = P \bar{f} \in C(X, U(n)/T_1) = C(X, \mathcal{A}(M_n)) \cong \mathcal{A}_c(\mathcal{O})$$

$$\mathcal{A}_f(\cdot) = \bar{f} \cdot \bar{f}^*, \quad \therefore \mathcal{A}_f \in \mathcal{L}_0(\mathcal{O})$$

$$\text{以上から } \mathcal{L}_0(\mathcal{O}) \cong \{f \in C(X, U(n)/T_1), \exists \bar{f} \in C(X, U(n)), f = P \bar{f}\}$$

iii) $\mathcal{J}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{L}_0(\mathcal{O})$ を示す

$$\gamma \in \mathcal{J}(\mathcal{O})$$

$$\Rightarrow \exists \delta_i(t); \text{ norm-cont. one-parameter group on } \mathcal{A}(\mathcal{O}) \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\gamma = \delta_1(1) \cdots \delta_m(1)$$

$$P(p, t) \equiv (\delta_1(t))(p) \cdots (\delta_m(t))(p) : X \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}(M_n) \cong U(n)/T_1$$

P is a homotopy of γ and constant mapping $X \rightarrow T_1$

$$\Rightarrow \bar{P}: X \times [0, 1] \rightarrow U(n) \text{ cont.} \quad P \bar{P} = P$$

$$\Rightarrow \gamma = P(p, 1) = P \bar{P}(p, 1) \quad \therefore \gamma \in \mathcal{L}_0(\mathcal{O}).$$

III) $\pi(\mathcal{O})/\mathcal{I}(\mathcal{O}) \cong$ the group of homotopy class of $C(X, U(n)/T_1)$

$\alpha, \beta \in \pi(\mathcal{O}), [\alpha] = [\beta]$ in $\pi(\mathcal{O})/\mathcal{I}(\mathcal{O})$

$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathcal{I}(\mathcal{O}), \alpha = \beta\gamma$

$P(p, t): X \times [0, 1] \rightarrow U(n)/T_1$; homotopy of γ and $P \rightarrow T_1$

$\beta(P)P(p, t)$: a homotopy of β and α

逆に $\alpha, \beta \in \pi(\mathcal{O}) \cong C(X, U(n)/T_1)$ α and β are homotopic

$P(p, t)$: a homotopy of β and α

$\Rightarrow \beta^{-1}(P)P(p, t)$: a homotopy of $\beta^{-1}\alpha$ and $P \rightarrow T_1$

$\Rightarrow \beta^{-1}\alpha \in \mathcal{I}(\mathcal{O}) \quad \therefore [\alpha] = [\beta]$ in $\pi(\mathcal{O})/\mathcal{I}(\mathcal{O})$.

以上の事から $\mathcal{I}(\mathcal{O}), \mathcal{L}_0(\mathcal{O}), \pi(\mathcal{O})$ の細い包含関係を X の性質により与える事ができる。

I) X : contractive (例えば $X = \text{the unit ball in } \mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow X$ の連続写像はすべて恒等写像と homotopic.

$\Rightarrow \pi(\mathcal{O})/\mathcal{I}(\mathcal{O}) \cong \{0\}, \quad \therefore \mathcal{I}(\mathcal{O}) = \mathcal{L}_0(\mathcal{O}) = \pi(\mathcal{O})$.

II) $X = U(n)/T_1 \Rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{O}) \subsetneq \mathcal{L}_0(\mathcal{O}) \subsetneq \pi(\mathcal{O})$.

$\mathcal{L}: U(n)/T_1 \rightarrow U(n)/T_1$: 恒等写像 $\in C(X, U(n)/T_1) \cong \pi(\mathcal{O})$

$\neq \text{id}, \quad \forall f \in C(X, U(n)), \mathcal{L} \neq pf$

$\Rightarrow \mathcal{L} \notin \mathcal{L}_0(\mathcal{O}), \quad \therefore \mathcal{L}_0(\mathcal{O}) \subsetneq \pi(\mathcal{O})$

又 $U(n)/T_1 \cong SU(n)/\mathbb{Z}_n, \quad SU(n) = \{A \in U(n), \det A = 1\}$

$U(n) = T_1 \times SU(n)$

$q : SU(n) \rightarrow SU(n)/T_1$ canonical map

$i : SU(n) \rightarrow U(n) \cong T_1 \times SU(n) \quad i|_U = (1, U)$

$S : SU(n) \rightarrow SU(n) \quad S(U) = U^n$

$r : SU(n)/\mathbb{Z}_n \rightarrow SU(n) \quad r(U/\mathbb{Z}_n) = U^n \quad r \circ q = S$

$t \in C(r : SU(n)/\mathbb{Z}_n \rightarrow U(n))$ cont. i.e. $t \in C(X, U(n))$

$$\begin{array}{ccccc} SU(n)/\mathbb{Z}_n & \xrightarrow{t} & U(n) & \xrightarrow{p} & U(n)/T_1 \\ \uparrow \delta & \searrow r & \uparrow i & & \\ SU(n) & \xrightarrow{S} & SU(n) & & \end{array}$$

$\alpha \equiv p \circ t : U(n)/T_1 \rightarrow U(n)/T_1$ cont. i.e. $\alpha \in C(X, U(n)/T_1)$

α : not essential (i.e. α is not homotopic to constant)

$\Rightarrow \alpha \notin \mathcal{J}(\mathcal{O}) \quad \text{---} \quad \alpha \in \mathcal{L}_0(\mathcal{O}) \equiv \{ \alpha \in C(X, U(n)/T_1) \mid \exists t \in C(X, U(n)) \text{ map } \alpha = p \circ t \}$

III) $X = T_1 \Rightarrow \mathcal{J}(\mathcal{O}) \subsetneq \mathcal{L}_0(\mathcal{O}) = \pi(\mathcal{O})$

$$\pi(\mathcal{O})/\mathcal{J}(\mathcal{O}) = \pi_1(SU(n)/\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$$

$(\pi_n(X); [0, 1]^n \rightarrow X \text{ cont. } \text{of homotopy group})$

$\Rightarrow \exists \alpha_0 \in \pi(\mathcal{O}), [\alpha_0] \neq [0], \quad \therefore \alpha_0 \notin \mathcal{J}(\mathcal{O}) \quad \therefore \mathcal{J}(\mathcal{O}) \subsetneq \pi(\mathcal{O})$

--- $\exists \alpha \in \pi(\mathcal{O}) \equiv C(T_1, U(n)/T_1) \quad \exists \tilde{\alpha} \in C(T_1, U(n)) \quad \alpha = p \circ \tilde{\alpha}$

$\Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}_0(\mathcal{O}), \quad \therefore \mathcal{L}_0(\mathcal{O}) = \pi(\mathcal{O})$

IV) $X = 2\text{-skelton of a triangulation of } P^3$

$$\Rightarrow \mathcal{J}(\mathcal{O}) = \mathcal{L}_0(\mathcal{O}) \subsetneq \pi(\mathcal{O})$$

V) $X = S^m = \{x \in \mathbb{C}^{m+1}, \|x\| = 1\}$

$$\mathcal{O}_{mn} \equiv C(S^m) \otimes M_n$$

$$\Rightarrow \pi(\mathcal{O}_{mn})/\mathcal{J}(\mathcal{O}_{mn}) \cong \pi_m(U(n)/T_1) = \begin{cases} 0 & m: \text{even} \\ \mathbb{Z} & m: \text{odd} \neq 1 \end{cases} \quad m < 2n$$

m : even $< 2n$ の時

$$\pi(\mathcal{O}_{mn})/\mathcal{J}(\mathcal{O}_{mn}) = 0 \quad \therefore \chi(\mathcal{O}_{mn}) = \mathcal{L}_0(\mathcal{O}_{mn}) = \pi(\mathcal{O}_{mn})$$

m : odd, $\neq 1 < 2n$ の時

$$\pi(\mathcal{O}_{mn})/\mathcal{J}(\mathcal{O}_{mn}) = \mathbb{Z} \quad \therefore \chi(\mathcal{O}_{mn}) \subsetneq \pi(\mathcal{O}_{mn})$$

又一般に $\mathcal{L}_0(\mathcal{O}_{mn}) = \pi(\mathcal{O}_{mn})$ for $m, n = 1, 2, \dots$

ii)

$m = 1 \Rightarrow X = T_1$ III) の case

$m = 2 \Rightarrow n > 2$ の時上記より明らかなら、 $n = 1$ の時 $\mathcal{U}(n)/T_1 = 0$

から明らかなら

$m > 2$ の時 homotopy sequence

$$\dots \pi_m(T_1) \rightarrow \pi_m(\mathcal{U}(n)) \xrightarrow{P_*} \pi_m(\mathcal{U}(n)/T_1) \rightarrow \pi_{m-1}(T_1) \dots$$

は exact. $\therefore P_*$: onto isomorphism

$$\Rightarrow \forall \alpha \in C(\mathcal{O}_{mn}) \cong C(S^m, \mathcal{U}(n)/T_1) \quad \exists \beta \in C(S^m, \mathcal{U}(n))$$

$$\alpha = p\beta \quad \therefore \alpha \in \mathcal{L}_0(\mathcal{O}_{mn}) \quad \therefore \mathcal{L}_0(\mathcal{O}_{mn}) = \pi(\mathcal{O}_{mn})$$