

ケーリー代数内の6次元部分多様体上の 概複素構造のある曲率について

On some curvature of 6-dimensional submanifolds in the octonions

橋本 英哉 名城大学理工学部

(Hashimoto, Hideya, Faculty of Science and Technology, Meijo University)

ケーリー代数 $\mathcal{C}$ 内の任意の可符号6次元部分多様体上 $\varphi: M^6 \rightarrow \mathcal{C}$ には次の様に概エルミート構造が存在する。ケーリー代数 $\mathcal{C}$ は非可換性より、外積 $\times$ が存在することを用いて次の様に構成する。 ξ, η を法空間の局所的な正規直交枠場とする。 M 上の概複素構造 J を

$$\varphi_*(JX) = \varphi_*(X)(\eta \times \xi)$$

と定義する。ここに $X \in T_p M$ を表す。ケーリー代数 $\mathcal{C}$ は非結合的、交代的な可除代数であるから $J^2 = -I$ であることが示され、かつ、誘導計量 $\langle, \rangle$ に関しても適合する： $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$ 。 M^6 上に誘導される概エルミート構造は $Spin(7)$ 合同類に関する不変量である。従って、第二基本形式を概エルミート構造で分解し得られるある不変量と $*$ -scalar curvature は、 $Spin(7)$ 合同類に関する不変量となる。一方、8次元ユークリッド空間内の可符号6次元リーマン部分多様体は、平行移動を除いて、 $SO(8)$ 合同類として理解されているが、上記の様に $SO(8)$ 合同ではあるが $Spin(7)$ 合同でない等長はめ込みを許容するのが一般的である。具体的な例を用いて、この状況を説明したい。

実際に $SO(8)$ の作用ではめ込みを動かした場合に $S^2 \times \mathbb{R}^4$ (リーマン積) 上の概エルミート構造が変形することを示す。まず、 $Spin(7)$ はケーリー代数内の向きをもつ3次元部分空間の為す Grassmann 多様体 $G_3(\mathcal{C}) = SO(8)/SO(3) \times SO(5)$ に推移的に作用し、等質空間 $Spin(7)/(Sp(1) \times Sp(1)/Z_2)$ と表示できる。これより S^2 によって定まる3次元部分空間は、 $Spin(7)$ の作用によってケーリー代数内の4元数内の純虚数のなす3次元部分空間に同一視できる。一方、残りの5次元部分空間内の $\mathbb{R}^4$ は、一般に四元数の構造を持つとは限らない。従って、等長はめ込みによって定まる概複素構造は、 $Spin(7)$ 合同にはならないと予測される。実際、概複素構造は $Spin(7)$ 不変量であることから対応する概エルミート構造の不変量例えば $*$ -scalar curvature を計算することにより、この事実が確認できる。

1 準備

四元数を $\mathbf{H}$ で表す。 $\{1, i, j, k\}$ を四元数の基底とすると

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

が成立する。次に、ケーリー代数 $\mathcal{C}$ を四元数の直和 $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H} = \mathcal{C}$ に、下記の積構造を持つものとして定義する。

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac - \bar{d}b + (da + b\bar{c})\varepsilon,$$

ここに、 $\varepsilon = (0, 1) \in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ $a, b, c, d \in \mathbf{H}$, を表し、記号“-” は、四元数での共役を表す。この積に関して、任意の $x, y \in \mathcal{C}$, に対して

$$\langle xy, xy \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

が成立する。

ケーリー代数は、非可換、非結合的、交代的な可除代数である。ケーリー代数の自己同型群は、14次元例外型単純 Lie 群

$$G_2 = \{g \in SO(8) \mid g(uv) = g(u)g(v) \text{ for any } u, v \in \mathcal{C}\}$$

と一致する。ここで用いる Lie 群は、 G_2 を含む Lie 群 $Spin(7)$ であり次の様に定義される。

$$Spin(7) = \{g \in SO(8) \mid g(uv) = g(u)\chi_g(v) \text{ for any } u, v \in \mathcal{C}\}.$$

ここに $\chi_g(v) = g(g^{-1}(1)v)$ である。特に $G_2 = \{g \in Spin(7) \mid g(1) = 1\}$ となる。写像 χ は $Spin(7)$ から $SO(7)$ への二重被覆となり次の性質をみたす。

$$g(u) \times g(v) = \chi_g(u \times v)$$

ここに $u, v \in \mathcal{C}$ であり

$$u \times v = (1/2)(\bar{v}u - u\bar{v})$$

はケーリー代数の外積を表す。ここに $\bar{v} = 2\langle v, 1 \rangle - v$ は $v \in \mathcal{C}$ の共役を表している。外積は $u \times v = -v \times u$ を満たし、 $\mathcal{C}$ の純虚数の元となる。

1.1 $Spin(7)$ -合同定理

ケーリー代数内の可符号 6次元部分多様体の $Spin(7)$ -合同定理は以下の様に述べられる。 M^6 を連結な 6次元多様体とし $\varphi_1, \varphi_2: M^6 \rightarrow \mathcal{C}$ を 2つの等長はめ込みとする。このはめ込みが $Spin(7)$ -合同と仮定する。即ち、 $g \in Spin(7)$ が存在して

$$g \circ \varphi_1 = \varphi_2$$

(平行移動の作用を除いて) となると仮定する。この時、 M 上に誘導された計量と複素構造は一致する。逆に、次の命題が成立する。

Proposition 1.1 M^6 を連結な 6 次元多様体とし $\varphi_1, \varphi_2 : M^6 \rightarrow \mathfrak{C}$ を 2 つの等長はめ込みとし、同じ誘導計量と同じ複素構造をもつものと仮定する。 $II_{\varphi_1}^{(2,0)}, II_{\varphi_2}^{(2,0)}$ を、それぞれの第二基本形式の $(2,0)$ part とする。このとき、 $Spin(7)$ のある元 g が存在して

$$g \circ \varphi_1 = \varphi_2$$

となるための必要十分条件は $II_{\varphi_1}^{(2,0)} = II_{\varphi_2}^{(2,0)}$ となることである。ここに

$$II^{(2,0)} = \langle II(f_i, f_j), \bar{n} \rangle (\omega^i \odot \omega^j) \otimes n$$

であり、 $\odot$ は、対称テンソル積を表す。

1.2 $Spin(7)$ の構造方程式

この節では $Spin(7)$ の構造方程式について説明する。ケーリー代数の複素化を $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathfrak{C}$ とし、その標準基底を次の様に定める。

$$N = (1/2)(1 - \sqrt{-1}\varepsilon), \bar{N} = (1/2)(1 + \sqrt{-1}\varepsilon)$$

$$E_1 = iN, E_2 = jN, E_3 = -kN, \bar{E}_1 = i\bar{N}, \bar{E}_2 = j\bar{N}, \bar{E}_3 = -k\bar{N}.$$

ケーリー代数の積構造を複素線型に拡張すると次の乗積表を得る。

$A \setminus B$	N	E_1	E_2	E_3	$\bar{N}$	$\bar{E}_1$	$\bar{E}_2$	$\bar{E}_3$
N	N	0	0	0	0	$\bar{E}_1$	$\bar{E}_2$	$\bar{E}_3$
E_1	E_1	0	$-\bar{E}_3$	$\bar{E}_2$	0	$-\bar{N}$	0	0
E_2	E_2	$\bar{E}_3$	0	$-\bar{E}_1$	0	0	$-\bar{N}$	0
E_3	E_3	$-\bar{E}_2$	$\bar{E}_1$	0	0	0	0	$-\bar{N}$
$\bar{N}$	0	E_1	E_2	E_3	$\bar{N}$	0	0	0
$\bar{E}_1$	0	$-N$	0	0	$\bar{E}_1$	0	$-E_3$	E_2
$\bar{E}_2$	0	0	$-N$	0	$\bar{E}_2$	E_3	0	$-E_1$
$\bar{E}_3$	0	0	0	$-N$	$\bar{E}_3$	$-E_2$	E_1	0

次に、 $\mathfrak{C}$ と $Spin(7)$ の半直積 $\mathfrak{C} \times Spin(7)$ の構造方程式を述べる。

$$\begin{aligned}
 (x, g)(o; N, E, \bar{N}, \bar{E}) &= (g \cdot o + x, g(N), g(E), g(\bar{N}), g(\bar{E})) \\
 &= (x, g(N), g(E), g(\bar{N}), g(\bar{E})) \\
 &= (o; N, E, \bar{N}, \bar{E}) \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times 8} \\ \rho(x) & \rho(g) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$o = {}^t(0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^8 \simeq \mathfrak{C}$ は複素化されたケーリー一代数の原点を (x, g) は $\mathfrak{C} \times Spin(7)$ の元をそれぞれ表す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times 8} \\ \rho(x) & \rho(g) \end{pmatrix}$$

は $M_{9 \times 9}$ に値をもつ行列表現を表す。 $(x; n, f, \bar{n}, \bar{f})$ が $\mathfrak{C} \times Spin(7)$ admissible frame であるとは $(x, g) \in \mathfrak{C} \times Spin(7)$ が存在して

$$(x; n, f, \bar{n}, \bar{f}) = (x, g)(o; N, E, \bar{N}, \bar{E}).$$

を満たす場合をいう。

Proposition 1.2 ([Br1]) 半直積 $\mathfrak{C} \times Spin(7)$ の Maurer-Cartan form は、次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} d(x; n, f, \bar{n}, \bar{f}) &= (x; n, f, \bar{n}, \bar{f}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0_{1 \times 3} & 0 & 0_{1 \times 3} \\ \nu & \sqrt{-1}\rho & -{}^t\bar{h} & 0 & -{}^t\theta \\ \omega & h & \kappa & \theta & [\bar{\theta}] \\ \bar{\nu} & 0 & -{}^t\bar{\theta} & -\sqrt{-1}\rho & -{}^t\bar{h} \\ \bar{\omega} & \bar{\theta} & [\theta] & \bar{h} & \bar{\kappa} \end{pmatrix} \\ &= (x; n, f, \bar{n}, \bar{f})\psi \end{aligned}$$

ここに ψ は $spin(7) \oplus \mathfrak{C}(M_{9 \times 9}(\mathbf{C}))$ に値をもつ 1-form であり、 ρ は実数に値をもつ 1-form, ν は複素数に値をもつ 1-form, ω, h, θ は $M_{3 \times 1}$ -に値をもつ 1-form, κ は $u(3)$ -に値を持つ関数であり次の条件 $\sqrt{-1}\rho + tr\kappa = 0$, を満たし、記号 $[\]$ は次で定義される。

$$[\theta] = \begin{pmatrix} 0 & \theta^3 & -\theta^2 \\ -\theta^3 & 0 & \theta^1 \\ \theta^2 & -\theta^1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここに、 $\theta = {}^t(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ である。可積分条件は $d\psi + \psi \wedge \psi = 0$ で与えられる。より詳細に述べると

$$\begin{aligned} dx &= (n, f, \bar{n}, \bar{f}) \begin{pmatrix} \nu \\ \omega \\ \bar{\nu} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}, \\ dn &= n\sqrt{-1}\rho + f h + \bar{f} \bar{\theta}, \\ df &= n(-{}^t\bar{h}) + f \kappa + n(-{}^t\bar{\theta}) + \bar{f} [\theta], \end{aligned}$$

となり、可積分条件は以下の式によって与えられる。

$$\begin{aligned}
 d\nu &= \sqrt{-1}\rho \wedge \nu + {}^t\bar{\eta} \wedge \omega + {}^t\bar{\theta} \wedge \bar{\omega}, \\
 d\omega &= -\eta \wedge \nu - \kappa \wedge \omega - \theta \wedge \bar{\nu} - [\theta] \wedge \bar{\omega}, \\
 d(\sqrt{-1}\rho) &= {}^t\bar{\eta} \wedge \eta + {}^t\theta \wedge \bar{\theta}, \\
 d\eta &= -\eta \wedge \sqrt{-1}\rho - \kappa \wedge \eta - [\bar{\theta}] \wedge \bar{\theta}, \\
 d\theta &= \theta \wedge \sqrt{-1}\rho - \kappa \wedge \theta - [\bar{\theta}] \wedge \bar{\eta}, \\
 d\kappa &= \eta \wedge {}^t\bar{\eta} - \kappa \wedge \kappa + \theta \wedge {}^t\bar{\theta} - [\bar{\theta}] \wedge [\theta].
 \end{aligned}$$

2 Gram-Schmidt process of Spin(7)

G_2 -枠を構成しその後Spin(7)-枠を構成する。 $\mathcal{C}_0 = \{x \in \mathcal{C} \mid \langle x, 1 \rangle = 0\}$ とする。

Lemma 2.1 e_1, e_4 を $\mathcal{C}_0$ の互いに直交する単位ベクトルとする。 $e_5 = e_1 e_4$ とおく。つぎに e_2 を e_1, e_4, e_5 によって張られる3次元部分空間に直交する $\mathcal{C}_0$ の元とする。 $e_3 = e_1 e_2$, $e_6 = e_2 e_4$, $e_7 = e_3 e_4$ とおく。このとき行列

$$g = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7] \in SO(7)$$

は G_2 の元となる。

Lemma 2.1 によって、特に $e_4 = \eta \times \xi$, とおくと G_2 -枠場を得る。

$$\begin{aligned}
 N^* &= (1/2)(1 - \sqrt{-1}e_4), \quad \bar{N}^* = (1/2)(1 + \sqrt{-1}e_4), \\
 E_1^* &= (1/2)(e_1 - \sqrt{-1}e_5), \quad \bar{E}_1^* = (1/2)(e_1 + \sqrt{-1}e_5), \\
 E_2^* &= (1/2)(e_2 - \sqrt{-1}e_6), \quad \bar{E}_2^* = (1/2)(e_2 + \sqrt{-1}e_6), \\
 E_3^* &= -(1/2)(e_3 - \sqrt{-1}e_7), \quad \bar{E}_3^* = -(1/2)(e_3 + \sqrt{-1}e_7).
 \end{aligned}$$

ここに $\text{span}_{\mathbb{C}}\{N^*, E_1^*, E_2^*, E_3^*\}$ は、概複素構造 $J = R_{\eta \times \xi}$ at $p \in \mathcal{C}$. に関する $\sqrt{-1}$ -固有空間 $T_p^{(1,0)}\mathcal{C} (\subset \mathcal{C} \otimes \mathbb{C})$ を表す。一方 $n = (1/2)(\xi - \sqrt{-1}\eta)$ は、複素化した法ベクトルバンドル $T^{\perp(1,0)}M$ の局所直交枠場を与える。ここで $T_{\varphi(m)}^{\perp(1,0)}M \subset T_{\varphi(m)}^{(1,0)}\mathcal{C}$, であるから $M_{4 \times 1}(\mathbb{C})$ -に値を持つ関数 $a_1 = {}^t(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$, が存在して

$$n = (1/2)(\xi - \sqrt{-1}\eta) = (N^*, E_1^*, E_2^*, E_3^*)a_1.$$

となる。ここで $T_{\varphi(m)}^{(1,0)}\mathcal{C}$, 上のエルミート内積に関する Gram-Schmidt の直交化を行ない $M_{4 \times 1}(\mathbb{C})$ -に値を持つ関数 $\{a_2, a_3, a_4\}$ が存在して $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ が special unitary frame となる様にとる。

$$f_i = (N^*, E_1^*, E_2^*, E_3^*)a_{i+1}$$

$i = 1, 2, 3$ とおく。すると

$$(n, f, \bar{n}, \bar{f}) = (n, f_1, f_2, f_3, \bar{n}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$$

は局所的な M 上の $\text{Spin}(7)$ -枠場を与える。

Remark 2.1 この構成方法は次の等質空間の表示の存在から保証されている。

$$\text{Spin}(7)/\text{Spin}(6) = \text{Spin}(7)/\text{SU}(4) = S^6 \cong G_2/\text{SU}(3).$$

3 $\text{Spin}(7)$ の作用する等質空間

以下に述べる様に $\text{Spin}(7)$ 及びその部分群は 7 次元以下の球面の例外的な表示を持つ。実際、

$$S^7 = \text{Spin}(7)/G_2, S^6 = G_2/\text{SU}(3), S^5 = \text{SU}(3)/\text{SU}(2)$$

となる。特に、最後の $\text{SU}(2)$ の作用は、 $\mathbb{C}^2$ への標準的な作用であることに気をつけると、5 次元球面 S^5 上の接空間 $T_p S^5$ ($p \in S^5$) 内の 4 次元球面に推移的に作用しないことがわかる。従って、8 次元ユークリッド空間内の直交 4 枠の為す Stiefel 多様体 $V_4(\mathbb{R}^8)$ 及び、8 次元ユークリッド空間内の 4 次元可符号平面の為す Grassmann 多様体 $G_4^+(\mathbb{R}^8)$ には $\text{Spin}(7)$ は推移的に作用しない。

一方、 k を 3 以下の自然数とすると、8 次元ユークリッド空間内の直交 k -枠の為す Stiefel 多様体 $V_k(\mathbb{R}^8)$ 及び、8 次元ユークリッド空間内の k 次元可符号平面の為す Grassmann 多様体 $G_k^+(\mathbb{R}^8)$ は、次の表示を持つ。

$$V_2(\mathbb{R}^8) \simeq \text{Spin}(7)/\text{SU}(3), V_3(\mathbb{R}^8) \simeq \text{Spin}(7)/\text{SU}(2),$$

$$G_2^+(\mathbb{R}^8) \simeq \text{Spin}(7)/\text{U}(3), G_3^+(\mathbb{R}^8) \simeq \text{Spin}(7)/\text{SO}(4).$$

以上の様に $\text{Spin}(7)$ は直交群 $\text{SO}(8)$ の部分群ではあるが、面白い幾何学的な性質を持っている。

4 $S^2 \times \mathbb{R}^4$ の埋め込みの 1 径数族

$V_3(\mathbb{R}^8) \simeq \text{Spin}(7)/\text{SU}(2)$ であることに気をつけると $S^2 \times \mathbb{R}^4$ のケーリー代数への埋め込み (標準的な積) は $\text{Spin}(7)$ の作用によって次の様な φ_t に標準化される。埋め込み φ_t は $(\varphi_t : S^3 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C})$

$$\varphi_t(q, \tilde{y}) = qi\bar{q} + (-\sin(t) + \cos(t)\varepsilon)y_1 + (y_2i + y_3j + y_4k)\varepsilon.$$

によって与えられるとしてよい。ここに、 $0 \leq t \leq \pi/2$, $q \in S^3 \subset \mathbb{H}$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ を表す。 $\varphi_0(S^3 \times \mathbb{R}^4)$ は $S^2 \times \mathbb{R}^4$ とリーマン多様体として一致する。

特に、 φ_0 は、

$$\varphi_0(S^3 \times \mathbf{R}^4) = S^2 \times \mathbf{R}^4 \subset \text{ImH} \oplus \mathbf{H}\varepsilon.$$

となり（部分空間への分解に注意）、誘導される概エルミート構造は等質であり Quasi-Kähler 構造となることが知られている。

次に、この埋め込みの族についての $Spin(7)$ frame field を記述する。そのために、ケーリー代数への $Sp(1)$ 群作用を次の様に定義する。

$$\rho_{II}(q)(a + b\varepsilon) = qa\bar{q} + (qb\bar{q})\varepsilon$$

ここに、 $q \in S^3 \simeq Sp(1)$, $a + b\varepsilon \in \mathbb{C}$ である。この表示を用いると $Spin(7)$ frame field は

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2} \left\{ \rho_{II}(q)(\cos(t) \cdot 1 + \sin(t)\varepsilon - \sqrt{-1}i) \right\}, \\ f_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \rho_{II}(q)(j\varepsilon + \sqrt{-1}(\cos(t) \cdot k - \sin(t)k\varepsilon)) \right\}, \\ f_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \rho_{II}(q)(j\varepsilon + \sqrt{-1}(\cos(t) \cdot k - \sin(t)k\varepsilon)) \right\}, \\ f_3 &= -\frac{1}{2} \left\{ \rho_{II}(q)(-\sin(t) \cdot 1 + \cos(t)\varepsilon + \sqrt{-1}i) \right\}, \end{aligned}$$

となる。Coframe field $(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ は S^2 上の（局所的な）一次微分形式を

$$\mu_1 = \langle d(qi\bar{q}), qj\bar{q} \rangle, \mu_2 = \langle d(qi\bar{q}), qk\bar{q} \rangle,$$

また、 ImH に値を持つ 1-form $d\beta$ を

$$d\beta = idy_1 + jdy_2 + kdy_3$$

とおくとき、次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \mu_1 - \sqrt{-1}(\cos(t)\mu_2 - \sin(t) \langle qk\bar{q}, d\beta \rangle), \\ \omega^2 &= \langle qj\bar{q}, d\beta \rangle + \sqrt{-1}(\sin(t)\mu_2 + \cos(t) \langle qk\bar{q}, d\beta \rangle), \\ \omega^3 &= dy_1 - \sqrt{-1} \langle qk\bar{q}, d\beta \rangle. \end{aligned}$$

ここで

$$dn = -\frac{\sqrt{-1}}{2}dqi\bar{q} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}(qj\bar{q} \otimes \mu_1 + qk\bar{q} \otimes \mu_2).$$

及び、Cartan's Lemma ($\nu = 0$) よりある $M_{3 \times 3}$ に値をもつ関数 A, B, C が存在して

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B} & \bar{A} \\ {}^t B & \bar{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

となる。埋め込み φ_t に関する上記の行列は次の様に定まる。

$$A = -C = \frac{\sqrt{-1}}{4} \begin{pmatrix} \sin^2(t) & \sin(t)\cos(t) & 0 \\ \sin(t)\cos(t) & -\sin^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\sqrt{-1}}{4} \begin{pmatrix} 1 + \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) & 0 \\ -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って $Spin(7)$ 不変量である $*$ - scalar curvature $\tau^* = -4\{\text{tr}A\bar{A} - 2\text{tr}^*B\bar{B} + \text{tr}C\bar{C}\}$ は次の式で与えられる。

$$\tau^* = 1 + \cos 2t \geq 0$$

従って、変形のパラメーター t によって誘導される複素構造は変形することがわかる。

5 $S^1 \times S^2 \times \mathbf{R}^3$ の埋め込みの 1 径数族

この節では、リーマン等質空間 $S^1 \times S^2 \times \mathbf{R}^3$ 上に誘導される非等質な複素構造の変形を与える。以下の様に埋め込みの 1 径数族を定義し $Spin(7)$ 合同でないことを示す。 $(e^{i\theta}, q, x_1, x_2, x_3) \in S^1 \times S^3 \times \mathbf{R}^3$ とし、 S^3 から S^2 への Hopf 写像を $q \rightarrow qi\bar{q}$ と表す。各 $t \in \mathbf{R}$ に対して次の様に埋め込みを定める。

$$\begin{aligned} \varphi_t(e^{i\theta}, q, x_1, x_2, x_3) \\ = \cos(\theta) \left(\cos(t) \cdot 1 - \sin(t) \cdot i\varepsilon \right) + x_1 \left(\sin(t) \cdot 1 + \cos(t) \cdot i\varepsilon \right) \\ + qi\bar{q} + \sin(\theta)\varepsilon + x_2j\varepsilon + x_3k\varepsilon. \end{aligned}$$

このとき、 φ_t に沿った $Spin(7)$ -frame field は

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2} \{ \cos(\theta) \cos(t) \cdot 1 + \alpha_0 \varepsilon - \sqrt{-1} qi\bar{q} \}, \\ f_1 &= \frac{1}{2} \{ qj\bar{q} + \sqrt{-1} (\cos(\theta) \cos(t) qk\bar{q} - (\alpha_0 qk\bar{q}) \varepsilon \}, \\ f_2 &= \frac{1}{2} \{ -|\alpha_0| \cdot 1 + (\cos(\theta) \cos(t)/|\alpha_0|)(\alpha_0) \varepsilon + \sqrt{-1} \left((1/|\alpha_0|)(\alpha_0 qi\bar{q}) \varepsilon \right) \}, \\ f_3 &= -\frac{1}{2} \left\{ (1/|\alpha_0|)(\alpha_0 qj\bar{q}) \varepsilon - \sqrt{-1} (|\alpha_0| qi\bar{q} + (\cos(\theta) \cos(t)/|\alpha_0|)(\alpha_0 qk\bar{q}) \varepsilon \right\}, \end{aligned}$$

である。ここに $\alpha_0 = \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(t) \cdot i$ を表す。次に、構造方程式による不変量を計算する。 $d\varphi_t, dn$ を表示し、第二基本形式と $SU(3)$ の作用による分解を与える。まず、上記の $Spin(7)$ 枠場の coframe ω_i を上記の座標を用いて記述する。

$$d\varphi_t = \sum_{i=1}^3 f_i \omega^i + \bar{f}_i \bar{\omega}^i$$

を満たすことに注意すると

$$\begin{aligned}
& \omega^1 \\
&= \mu_1 - \sqrt{-1} \left\{ \cos(\theta) \cos(t) \mu_2 - \sin(t) \langle iq, qk \rangle d\theta \right. \\
&\quad - \cos(t) \sin(\theta) \langle iq, qk \rangle dx_1 \\
&\quad - (\sin(\theta) \langle jq, qk \rangle + \cos(\theta) \sin(t) \langle kq, qk \rangle) dx_2 \\
&\quad \left. - (\sin(\theta) \langle kq, qk \rangle - \cos(\theta) \sin(t) \langle jq, qk \rangle) dx_3 \right\}, \\
& \omega^2 \\
&= (1/|\alpha_0|) \left\{ (\sin(\theta) \cos(t) - \sqrt{-1} \sin(t) \langle iq, qi \rangle) d\theta \right. \\
&\quad - (\sin(t) + \sqrt{-1} \sin(\theta) \cos(t) \langle iq, qi \rangle) dx_1 \\
&\quad - \sqrt{-1} (\sin(\theta) \langle jq, qi \rangle + \cos(\theta) \sin(t) \langle kq, qi \rangle) dx_2 \\
&\quad \left. - \sqrt{-1} (\sin(\theta) \langle kq, qi \rangle - \cos(\theta) \sin(t) \langle jq, qi \rangle) dx_3 \right\}, \\
& \omega^3 \\
&= -(1/|\alpha_0|) \left\{ \sqrt{-1} |\alpha_0|^2 \mu_2 \right. \\
&\quad + \left(\sin(\theta) \langle iq, qj \rangle + \sqrt{-1} \cos(\theta) \sin(t) \langle iq, qk \rangle \right) d\theta \\
&\quad + \cos(t) \left(\sin(\theta) \langle iq, qj \rangle + \sqrt{-1} \cos(\theta) \cos(t) \langle iq, qk \rangle \right) dx_1 \\
&\quad + \left(\sin(\theta) \langle jq, qj \rangle + \cos(\theta) \sin(t) \langle kq, qj \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-1} \cos(\theta) \cos(t) (\sin(\theta) \langle jq, qk \rangle + \cos(\theta) \sin(t) \langle kq, qk \rangle) \right) dx_2 \\
&\quad \left. + \sqrt{-1} \cos(\theta) \cos(t) (\sin(\theta) \langle kq, qk \rangle - \cos(\theta) \sin(t) \langle jq, qk \rangle) dx_3 \right\}
\end{aligned}$$

を得る。ここで Cartan's Lemma ($\nu = 0$) よりある $M_{3 \times 3}$ に値をもつ関数 A, B, C が存在して、次を満たす。

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B} & \bar{A} \\ {}^t B & \bar{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

ここに ${}^t A = A, {}^t C = C$ であり、第二基本形式の Spin(7) 枠場に沿った成分表示である。上記の計算からこの行列成分を求めると

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{1}{4} \left\{ (p_3)^2 \sin^2(t) + \sqrt{-1} (1 + \cos^2(\theta) \cos^2(t)) \right\}, \\
B_{12} &= \frac{\sin(t) p_3}{4|\alpha_0|} \left\{ p_1 \sin(t) + \sqrt{-1} \sin(\theta) \cos(t) \right\}, \\
B_{13} &= \frac{1}{4|\alpha_0|} \left\{ -(p_3)^2 \cos(\theta) \cos(t) \sin^2(t) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-1} (p_2 p_3 \sin^2(t) + |\alpha_0|^2 \cos(\theta) \cos(t)) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{21} &= \frac{\sin(t)p_3}{4|\alpha_0|} \left\{ -p_1 \sin(t) + \sqrt{-1} \sin(\theta) \cos(t) \right\}, \\
B_{22} &= \frac{1}{4|\alpha_0|^2} \{ \sin^2(\theta) \cos^2(t) + (p_1)^2 \sin^2(t) \}, \\
B_{23} &= -\frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2} \left\{ p_2 \sin(\theta) \cos(t) - p_1 p_3 \cos(\theta) \cos(t) \sin(t) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-1} (p_1 p_2 \sin(t) + p_3 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(t)) \right\}, \\
B_{31} &= \frac{1}{4|\alpha_0|} \left\{ -(p_3)^2 \cos(\theta) \cos(t) \sin^2(t) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-1} (-p_2 p_3 \sin^2(t) + |\alpha_0|^2 \cos(\theta) \cos(t)) \right\}, \\
B_{32} &= -\frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2} \left\{ p_2 \sin(\theta) \cos(t) - p_1 p_3 \cos(\theta) \cos(t) \sin(t) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{-1} (p_1 p_2 \sin(t) + p_3 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(t)) \right\}, \\
B_{33} &= \frac{\sin^2(t)}{4|\alpha_0|^2} \{ (p_2)^2 + \cos^2(\theta) \cos^2(t) (p_3)^2 \} + \frac{\sqrt{-1} |\alpha_0|^2}{4}.
\end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}
A_{11} &= C_{11} = -\frac{1}{4} \{ (p_3)^2 \sin^2(t) + \sqrt{-1} |\alpha_0|^2 \}, \\
A_{12} &= A_{21} = C_{12} = C_{21} \\
&= \frac{\sin(t)p_3}{4|\alpha_0|} \{ p_1 \sin(t) - \sqrt{-1} \sin(\theta) \cos(t) \}, \\
A_{13} &= A_{31} \\
&= \frac{p_3 \sin^2(t)}{4|\alpha_0|} \{ p_3 \cos(\theta) \cos(t) + \sqrt{-1} p_2 \} \\
&\quad - \frac{\sqrt{-1} |\alpha_0| \cos(\theta) \cos(t)}{4}, \\
A_{22} &= \frac{1}{4|\alpha_0|^2} \{ \sin(\theta) \cos(t) + \sqrt{-1} p_1 \sin(t) \}^2, \\
A_{23} &= A_{32} = -\frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2} \{ (p_2 \sin(\theta) \cos(t) - p_1 p_3 \cos(\theta) \cos(t) \sin(t)) \\
&\quad + \sqrt{-1} (p_3 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(t) + p_1 p_2 \sin(t)) \} \\
A_{33} &= \frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2} \{ (p_2 - \sqrt{-1} \cos(\theta) \cos(t) p_3) \}^2 - \frac{\sqrt{-1} |\alpha_0|^2}{4}, \\
C_{13} &= C_{31} \\
&= \frac{p_3 \sin^2(t)}{4|\alpha_0|} \{ p_3 \cos(\theta) \cos(t) - \sqrt{-1} p_2 \} + \frac{\sqrt{-1} |\alpha_0| \cos(\theta) \cos(t)}{4}, \\
C_{23} &= C_{32} = \frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2} \left(p_2 \sin(\theta) \cos(t) + p_1 p_3 \cos(\theta) \cos(t) \sin(t) \right) \\
&\quad + \sqrt{-1} (-p_3 \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(t) + p_1 p_2 \sin(t)),
\end{aligned}$$

$$C_{33} = \frac{\sin^2(t)}{4|\alpha_0|^2} \{p_2 - \sqrt{-1}p_3 \cos(\theta) \cos(t)\}^2 + \frac{\sqrt{-1}|\alpha_0|^2}{4}.$$

上記の式から埋め込み φ_t に関する $*$ - scalar curvature $\tau^* = -4\{\text{tr}A\bar{A} - 2\text{tr}^t\bar{B}B + \text{tr}C\bar{C}\}$ は次の式で与えられる。

Theorem 5.1 $\tau^* = 2\cos^2(\theta)\cos^2(t)$

Corollary 5.1 $t \neq \pi/2 \bmod \pi$ であるとき $*$ - scalar curvature は定数ではない。

従って誘導される概複素構造は等質にはなり得ない。さらに概複素構造の変形の次元が 1 以上となることが示された。

一方、 $Spin(7)/(Sp(1) \times Sp(1)/Z_2) = G_3(\mathbb{C})$ であることを用いると変形の次元は 1 次元しか可能性がないことが分る。従って上記の定理から概複素構造の moduli 空間の次元は 1 であることがわかる。

実際、群作用に注目して以下の様に示される。まず、部分群の作用 $\rho: Sp(1) \times Sp(1) \rightarrow Spin(7)$ は、次の様に与えられる。

$$\rho(q_1, q_2)(a + b\varepsilon) = q_1 a \bar{q}_1 + (q_2 a \bar{q}_1)\varepsilon$$

ここに、 $(q_1, q_2) \in Sp(1) \times Sp(1)$, $a + b\varepsilon \in \mathbb{C}$ である。従って $S^2 = \{q_1 i \bar{q}_1 | q_1 \in Sp(1)\}$ を指定すると S^2 を含む 3 次元部分空間 V と 4 次元部分空間

$$W = \text{span}\{\bar{q}_1\varepsilon, (i\bar{q}_1)\varepsilon, (j\bar{q}_1)\varepsilon, (k\bar{q}_1)\varepsilon\}$$

が指定される。1 次元円 $S^1(\subset U \cong \mathbb{R}^2)$ は V の補空間 $V^\perp$ に含まれかつ $\dim W^\perp \cap U \leq 1$ となることから概複素構造の moduli 空間の次元は 1 以下である。従って、定理により変形する次元は 1 であることが示された。

参考文献

- [Br1] R. L. Bryant. Submanifolds and special structures on the octonions. J. Diff. Geom., 17 (1982) 185-232.
- [H-L] R. Harvey and H. B. Lawson. Calibrated geometries. Acta Math., 148 (1982) 47-157.
- [H1] H. Hashimoto. Characteristic classes of oriented 6-dimensional submanifolds in the octonians. Kodai Math. J., 16 (1993) 65-73.

- [H2] H.Hashimoto. Oriented 6-dimensional submanifolds in the octonions **III** . Internat. J. Math and Math. Sci., 18 (1995) 111-120.
- [HsL] W.Y.Hsiang and H.B.Lawson. Minimal submanifolds of low cohomogeneity. J. Differential geometry., 5 (1971) 1-38.
- [KN] S.Kobayashi and K.Nomizu. Foundations of Differential geometry **II**. Wiley-Interscience, New York. 1968.