

天界 第十一號(第一卷)

大正十年
十月號

二次曲線の話(下)

双曲線

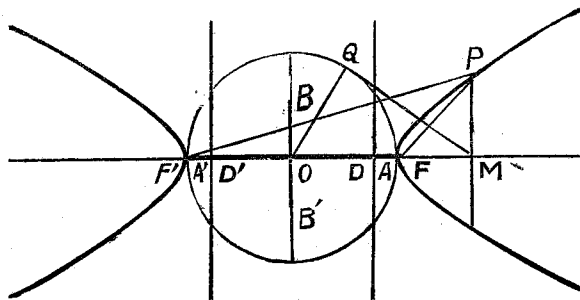
京都帝國大學
助教授理學士 松本敏三

既に楕圓に關して、可なり精しく御話したから、此から向ふは大變容易である。私は類似の個所の證明は簡單にやつける。説明及び證明の不足には前の條を參酌せられたい。

九、中心 O の半徑 a たる圓と、 AA' 及び夫れに垂直なる直徑とを畫く(第四圖)。圓上の任意の一點 Q より、 $\angle OQM$ が直角なる如く直線 QM を引く、 M は直經 AA' の延長上にあり。(QM は點 Q に於ける圓の接線である。第一條の作圖に於ては $\angle OMQ$ が直角であつた。)今 M より AA' に垂直に、 $PM:QM = c:a$ なる如く點 P を取る。今 Q 點を圓周上に一週りさせると、 P 點は圖の如き兩外側に彎曲した曲線を得。此の曲線を双曲線と云ふ。双曲線も亦前記の二直經及び中心 O に關し對稱である。次ぎに直經 AA' に垂直なる直經上に $OB \parallel OB' = c$ なる長さを切る。而し

て點 O を双曲線の中心、 AA' を交軸、 BB' を共軛軸と云ふ。又 A, A' を頂點、圓を補助圓と云ふも前の如し。若し $c > a$ 即ち比の値が一なる時は等邊(或は等角)双曲線と云ふ。

次ぎに $a^2 + b^2 = c^2$ と書く、然る時は c は a より大で



第四圖

ある(第一條參照)。今中心 O より交軸上に

$$OF = OF' = c$$

なる如く二點 F, F' を書く、此二點を焦點と云ふ。次ぎに $ca \parallel e$ を書き、此を双曲線の離心率と云ふ。此の離心率 e は一より大なり。今中心 O より交軸上に

$$OD = OD' = \frac{a}{e}$$

なる如き二點 D, D' に於て垂線を引く、之即ち準線なり。 e は一より大なる故 D は O と A との中間に来る、 D' 亦同じ。次ぎに双曲線上の任意の一點 P より、準線に垂線 PE を下し、其れと焦點への距離 PF との比を求めると、前と同様に、

$$PF = OM - \frac{a}{e}, \quad PF' = c \cdot OM - a$$

$$PF : PE = e : 1 \quad \text{或} > 1.$$

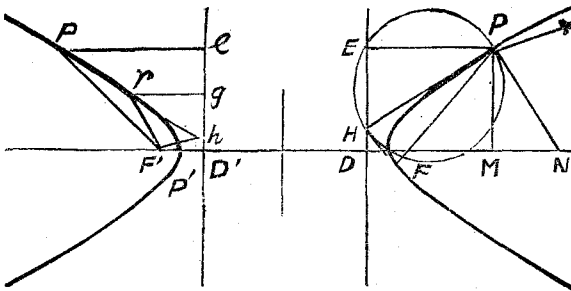
即ち定點と定直線へ至る距離の比が一定にして、其値が一より大なるが如き點の軌跡は双曲線なり。定點は焦點、定直線は準線にして、比は離心率に相當す。扱て前節に於て

$$PF = c \cdot OM - a$$

を知れり、之と同様にして

$$PF' = c \cdot OM + a, \quad PF' - PF = 2a.$$

即ち二定點に至る距離の差が一定なるが如き點の軌



第五圖

跡は双曲線なり。定點は焦點、距離の差は交軸の長さに相當す。(第三條參照)。此の定理に依つて、機

械的に容易に双曲線を書く事を得。

一〇、第五圖は第二圖と全く同様なる考へより畫れてある。同圖左は hF' が $\angle hPF'$ の外角の二等分線なる事を示し、同圖右は HF が PF に垂直にして焦點を通る弦 PP' の両端に於ける接線の交點 H の軌跡は準線なることを示す。(第四條参照)證明は同様につき畧す。第六條も亦容易に證明出来る。即ち一點 P に於ける双曲線への法線 PN は PH を直径とする圓の接線で且つ

$$NF:NF' = PF:PF'$$

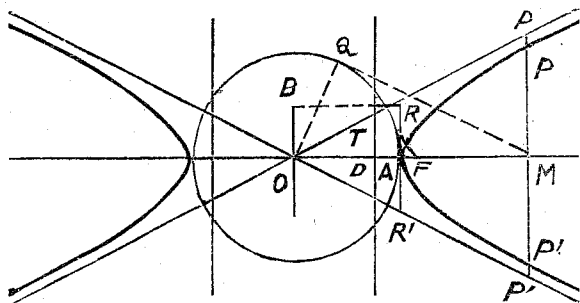
となる、故に PN は $\angle FPF'$ の外角の二等分線である、即ち焦點より出た光線は双曲線に反射して、反射光線の延長が他の焦點を通る様に進む(第五、六條参照)

一一、頂點 A に於て交軸に垂線を引き、其上に

$$AR = AR' = b$$

なる點を取り、其等の點と中心を通る二直線を畫く(第六圖)。此を漸近線と云ふ。(橢圓にこんな直線はない)弦 PM を延長して漸近線と p, p' で交らせる。然る時は

$$\begin{aligned} \frac{PM}{OM} &= \frac{RA}{OA} = \frac{b}{a} = \frac{PM}{QM} \\ \therefore \frac{PM}{QM} &= \frac{PM}{OM} \end{aligned}$$



第 六 圖

明に $OM = ON = OQ = OP = a$ なる、上の比例式

より

$$PM^2 = pM^2 \left(1 - \frac{a^2}{OM^2}\right)$$

故に初めの比例式を用ひて上式より

$$pM^2 - PM^2 = a^2 \frac{pM^2}{OM^2} = a^2 \frac{b^2}{a^2} = b^2$$

$$\therefore b^2 = (pM - PM)(pM + PM) = Pp \cdot Pp'$$

何んとなれば圖は交軸の直線に關し對稱なる故、 $Pp \parallel Pp'$ となるからである。 b は一定であつて、然も P が遠方へ行くと、 Pp' は限りなく大になる。故に Pp は無限に小になる。即ち漸近線は無限に双曲線に接近する。漸近線の名稱は適當だ。(漸近線と準線とは補助圓上で交ることは、容易に證明出来る、夫れより其交點を焦點に結んで直線に漸近線は垂直なることが證明出来る。故に第十條より漸近線は双曲線の無限の遠方の點に於ける接線である事がわかる。)

一二、双曲線に於ても、橢圓の時の様に、共軛經がある。併し今回は影に依つて其性質を證明するのではない。其代りに橢圓にない漸近線と云ふものがある、此の直線を使うのである。證明の方法は違うが、

其の性質は全く同一である。即ち並行弦の中點の軌跡が一つの共軛經である。尙ほ一方の共軛經は其等の並行弦に並行に、中心を通つて引いた線分である。此の直線は、橢圓の時と違つて、も早や双曲線

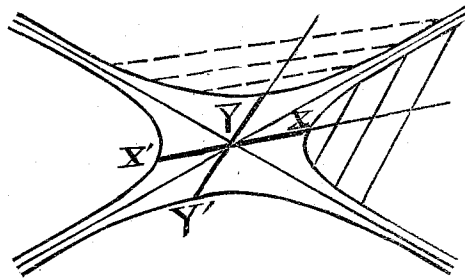


圖 七 第

に交らない。併し乍ら此の双曲線の交軸を共軛軸とし、共軛軸を交軸とする第二の双曲線を考へると、共軛經の一方は其双曲線と交る様になる。此の第二の

双曲線を共軛双曲線と云ふ。此等の事柄は、もう之以上證明せずに唯圖だけを書いておく、第七圖が即ち其れである。本圖の上下に書いてあるのが共軛双曲線である。楕圓の時と同様に、交軸と共軛軸とは互に直角をなす唯一の共軛經である。

拋物線

一三、楕圓を定義するに、第一圖に於て、 $\angle OMQ$ を直角に取つた。双曲線を定義するに、第四圖に於て、 $\angle OOM$ を直角に取つた。今此の二角を同時に直角にする爲めには、補助圓の中心 O を無限の遠方にやつて、従つて OM, OQ を並行にせば宜しい。其時補助圓は直線に成つてしまう。數式に於ては補助圓の半經 a を無限大にする事と同一である。其際楕圓がなくなるかを考へる。 $2a$ は長軸の値であるから、長軸を無限大にせねばならぬ。従つて短軸の長さも變化をうける。焦點を通つて長軸に直角な弦を通經と云ふ。其長さは $2(b^2/a)$ である。其れを求むる爲めに

第一圖に於て M が F に合したと考へる。然る $2PF$ が通經である。第二條に依り

$$\frac{PF}{PE} = e, \text{ 但し } OF = c, OD = \frac{a}{e}, PE = OD - OF$$

此等の關係から容易に出る。(双曲線の時も通經は同様である)で今 $b^2 + a^2 = 2m$ とおき、兩方の軸は無限大にするが、通經従つて $2m$ は變化させないものとする。扱て a を無限大にする時 b^2 を a で除したものは或數である($2m$)、故 b^2 でなくして b を a で除したものは零になるでしよう。一方に於て

$$FD = OD - OF = \frac{a}{e} - c = \frac{a^2 - (a^2 b^2)}{e} = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

と書く事が出来る。 a を無限にすると、分子は $2m$ 分母は一になる、故に $FD = 2m$ となる。又離心率

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

と書く事が出来るから、 a を無限大とすると、 e は一になる。故に吾々の目的に適する曲線上に任意

あることから進むのである。拋物線の話は是でやめる。

解析幾何學に依れば以上見る様な曲線間の差別が一層うすらぐのであつて、一つの曲線の性質を他の曲線に宛てはめる事は大變容易になるのである。

一五、結論として尙ほ少しく御話する。橢圓(第一圖)に於て $OM=x$, $PM=y$ と書く。

$$\frac{y}{OM} = \frac{b}{a}, \quad OM^2 = a^2 - x^2,$$

より

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots (1)$$

なる關係を得。此結果は双曲線の時($OM=x$, $PM=y$)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots (2)$$

となる。更に拋物線に於て $AM=x$, $PM=y$ とかくと

$$y^2 = 4mx \quad \dots\dots (3)$$

なる關係を得る。如何となれば

$$PF = PE = DM = DA + AM = m + x,$$

$$PM^2 = PF^2 - FM^2 = (m+x)^2 - (x-m)^2 = 4mx = y^2$$

扱て點 O より(拋物線の時 A) 右に x 尺、其れより上に y 尺行けば點 P が確定する。即ち點は (x, y) の一對の數値を以て表す事が出来る。然るに橢圓上の點に對する (x, y) は(1)式を満足する。即ち(1)式を満足する總ての (x, y) を點として畫けば橢圓が出来るのである。依つて式(1)を橢圓の方程式と云ふ。同様に(2)は双曲線、(3)は拋物線の方程式である。斯の考へを擴張せば、曲線の議論を代數式で爲すことが出来る。之の方法に依る幾何學を解析幾何學と云ふ。誠に有力な數學であることは言を俟たぬ。解析幾何學に依ると、一般なる二次方程式

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + I = 0$$

は橢圓か双曲線か拋物線かの何れかであることがわかる。それで此の三つの曲線を二次曲線と呼ぶの

である。例へば金星の軌道は先づ橢圓であるから上の如き式であたへられる。其精しい形を知ろうと思へば此の方程式の五個の係数を確定せねばならぬ。其の爲には(さ)に五組の値を取らせて五つの聯立方程式を立てたらよい。(き)に五組の値を取らせることは、遊星の五つの異つた位置を知る事である。其れに依つて軌道が定るのである。拋物線の時には或る條件の爲めに四個の點を知ればよい。

終 (十年七月)

行水の後

炒りつける様なひるまの苦熱を、行水に洗ひ落して人は皆、楽しい夕涼みに餘念もございません。工博のサーチライトが涼しい光をなげつけて居ります。

やうやく怠つた病の身を東の窓近くよこたえて、私はなくなつた子供の事等を思ひつゝぼんやりと空

を眺めて居りました。

つと、目をかすめて森の木の上のところを、青白い球が尾を引いて北から南に飛びました。人魂?

然しそれは珍らしく大きな流星でございました。時は八月十一日午後十時二十分場所はペガススと白鳥座の中ほどから鷲座の方向へ——
尾は五秒位で消えました。

六七歳の頃田舎家の廣い庭へ大きな涼み臺を持ち出して、祖父母や弟達と、天火をみた私をなつかしくしのびました。

天火とは天にすむ人が、大きな吊りランプをさげて通るのであらう。その人は雷さんの様でもあり、もう少し地上の子供にとつてはおぢさん位のしたしみのある人の様にも思つて居りました。(英子)