

Microdifferential Equations with Non-Involutory Characteristics.

防衛大 打越 敬祐

(Keisuke Uchikoshi).

要旨 従来, Fuchsian 双曲型作用素と呼ばれていたものについて, Levi 条件のない一般的な状況で 右(左)パラメトリクスを構成する.

§0. 主要結果

$(x, \xi) \in \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^n$ とし, $\xi^* = (0, 0, \dots, 0, \sqrt{-1}) \in \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^n$ とする. $P \in \mathcal{E}_{\xi^*}$ が

$$(1) \quad P(x, D) = (x, D_1)^m + \sum_{j=0}^{m-1} P^{(j)}(x, D) (x, D_1)^j$$

という形になっているとする. ここで, $(x, D_1)^j = (x, D_1) \cdots (x, D_1)$ とし,

$$(2) \quad \text{ord } P^{(j)} (= P^{(j)} \text{ の階数}) \leq m-j-1, \quad 0 \leq j \leq m-1$$

とする。以下, l 階作用素 $X \in E_{\lambda}^*$ に対し, X の完全素象 (resp. 主要素象) $\in \sigma(X)$ (resp. $\sigma_e(X)$) と記す. (1), (2) より $\sigma_m(P) = (x_1, \xi_1)^m$ である. $k \in \mathbb{Q}$ ($k < 1$) $\in$,

$$(3) \quad k = \max_{0 \leq j \leq m-1} (\text{ord } P^{(j)} / m - j)$$

とする. $k \leq 0$ のとき, P は Levi 条件を満たすという.

従来は, Levi 条件を仮定したとき $Pu = 0$ の解 u の特異性の伝播に関する多くの研究がなされた. 以下, Levi 条件がなくてもほとんど同様の結果が成立することを示す.

$d \subset \{0, \dots, m-1\} \in$,

$$(4) \quad d = \{0 \leq j \leq m-1; \text{ord } P^{(j)} = k(m-j)\}$$

と定める.

$$(5) \quad \lambda^m + \sum_{j \in d} \sigma_{k(m-j)}(P^{(j)}) \lambda^j = 0$$

の根 $\lambda = \lambda_j(x, \xi)$, $0 \leq j \leq m-1$ とする (λ_j を特性根と呼ぶ).

$$\text{例. } P = (x_1 D_1) \partial' + P^{(0)}(x', D') \quad (x' = (x_2, \dots, x_m))$$

とする ($\text{ord } P^{(0)} \leq m-1$). $k = \text{ord } P^{(0)} / m$ であり,

Levi 条件とは $\text{ord } P^{(0)} \leq 0$ のことである. また, $0 \leq j \leq m-1$ に対して

$\lambda_j(\alpha, \xi) = \exp\left(\frac{1}{m}(2j+1)\pi\sqrt{-1}\right) \cdot (\sigma_{m-1}(P^{10}))^{1/m}$,
となる.

$\mathfrak{L}^*$ を通る系の陪特性帯を $\mathcal{C}(\mathfrak{L}^*)$ とする:

$$\mathcal{C}(\mathfrak{L}^*) = \{(\alpha_1, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \sqrt{-1}) \in \sqrt{-1}S^*M\}.$$

従来よく知られている結果を記す:

定理0. $k \leq 0$, $\lambda_j \notin \{-1, -2, \dots\}$, $0 \leq j \leq m-1$ とすると,

$$(6) \quad u \in \mathcal{C}_{\mathfrak{L}^*}, \quad Pu = 0, \quad \mathcal{C}(\mathfrak{L}^*) \cap \text{supp } u = \emptyset$$

から $u = 0$ at $\mathfrak{L}^*$ である.

以下, 常 $k > 0$ (< 1) とする. 本稿の主要結果を記す:

定理1. $0 < k < 1$, $\lambda_j \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, $0 \leq j \leq m-1$,

(13/13) $|(0, \dots, 0, \sqrt{-1})| \ll 1$ とすると, b) のとき

$u = 0$ at $\mathfrak{L}^*$ である.

注意. $\lambda_j \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ という条件について説明する.

各 λ_j は ξ について k 次有次だから,

$$\lambda_j \notin \{0, -1, -2, \dots\}, \quad 0 \leq j \leq m-1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_j \cdot \xi_n^{-k} \neq k \xi_n^{-k}, \quad k = 0, -1, \dots$$

$$0 \leq j \leq m-1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_j \neq 0, \quad \arg \lambda_j \neq (2l+1)\pi,$$

$$l \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq j \leq m-1$$

となる。

§ 1. パラトリクス

(1), (2) をみたす $P(x, D)$ を 1 階作用素の行列に直す。

$$L = x, D, I_m + \begin{pmatrix} 0 & & -1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 0 & & -1 \\ P^{(0)} & \cdots & & & P^{(m-1)} \end{pmatrix} \quad (m, m)\text{行列}$$

とする。 $u, f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*$ に対し、

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ x, D, u \\ \vdots \\ (x, D)^{m-1} u \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \quad m\text{-次元ベクトル}$$

として、 $Pu = f \Leftrightarrow L\vec{u} = \vec{f}$ なので L を考えればよい。

L の右 (左) パラトリクスを考えるため、次の準備を行おう。

定義 2. ① $k(x, y) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$ として、

$$\text{supp}' k = \{(x, y, \xi, \eta); (x, y, \xi, -\eta) \in \text{supp } k\}.$$

② $A \subset \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$, $B \subset \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus \mathbb{R}^{2n}$ に対し

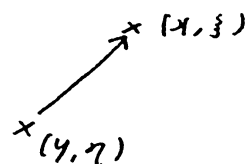
$$B \circ A = \{(x, \xi) \in \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n; \exists (y, \eta) \in A, \\ (x, y, \xi, \eta) \in B\}.$$

注意. ① において、 $\text{supp } k$ (resp. $\text{supp}' k$) を核関数の台 (resp. 作用素の台) という。

② k について, $(x, y, \xi, \eta) \in B$ のとき, 点 (y, η) から点 (x, ξ) に向かうベクトルを考える.

$(y, \eta) \in A$ なら $(x, \xi) \in B \circ A$

である. つまり, 右図であ



発点 $\in A$, 矢印 $\in B$ としたとき, $B \circ A$ は終点全体を表す.

(defined at $(\tilde{x}^*, -\tilde{\eta}^*)$)

さて, $k(x, y) \in C_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$ が, 次の条件 (7) の (7)' みたすとする ($C > 0$ は十分大):

(7) $\text{supp}' k \subset H = \{(x, y, \xi, \eta) \in \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus \mathbb{R}^{2n};$

$$\textcircled{1} \quad x_j = y_j, \quad \xi_j = \eta_j, \quad 2 \leq j \leq n,$$

$$\textcircled{2} \quad x_1, y_1 \geq 0, \quad |x_1| \geq |y_1|,$$

$$\textcircled{3} \quad \sum \xi_1 \cdot \sum \eta_1 \geq 0, \quad |\sum \xi_1| \leq |\sum \eta_1|,$$

$$\textcircled{4} \quad \sum \xi_n \geq C |\sum \xi_j|, |\sum \eta_j|, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

(7)' $\text{supp}' k \subset H' = \{(x, y, \xi, \eta); (y, x, \eta, \xi) \in H\}.$

注意. (7) の意味は以下の通り. ω を $\tilde{x}^*$ の小近傍とし,

$f \in C_{\mathbb{R}^n}$, $\text{supp } f \subset \omega$ とすると, (7) のとき, $\int k(x, y) f(y) dy$

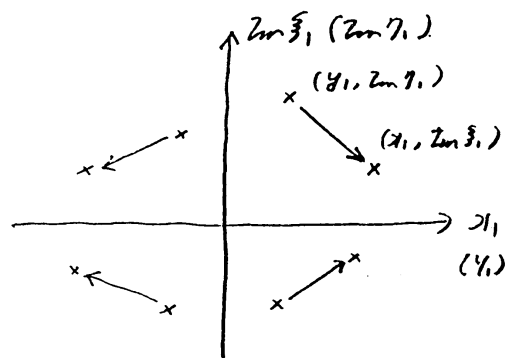
$\in C_{\tilde{x}^*}$ は well-def で, $\text{supp}(\int k f dy) \subset H \circ \text{supp } f$

となる. 上に述べた通り, $(y, \eta) \in \text{supp } f$, $(x, y, \xi, \eta) \in H$

のとき, (y, η) から (x, ξ) へ向かうベクトルを全て書き尽せ

ば, $\text{supp} \int k f dy$ を上から評価できる. そこでこのベクトル

の性質を調べればよい. (x_1, ξ_1) を時間 (に属する文字),
 $(x_2, \dots, x_n, \xi_2, \dots, \xi_n)$ を空間 (に属する文字) と考えて, このベ
クトルは (i) の ① により, 空間方向には 0 ベクトルである.
つまり, この積分作用素は空間方向に *microlocal property*
をもつ (*singularity* をふやさない). 一方, 時間方向の
 $(y_1, 2m\xi_1)$ と $(x_1, 2m\xi_1)$ を同一
の平面に書き込むと右図の様
になる (i) の ②, ④ より). つまり
この二点は同一象限上にあり,
このベクトルは横軸 (*resp.* 縦軸)
方向に遠心的 (*resp.* 求心的) である. (i) をみたす $K(x, y)$ の定
める積分作用素は, こういうベクトルに沿って *singularity*
を伝播させる (i)' の場合は逆向きに伝播させる).



以上の議論は *Flanges* の論法である. さて, L について次
の結果を得る:

定理 3. ① 定理 1 の仮定のもとで, (i) をみたす積分核
 $K(x, y)$ ($m \times m$ 行列) が存在し, K の定める積分作用素 $\mathcal{K}$ は
 $\mathcal{K}L(x, D) = Id.$ ($a \neq 0$) をみたす.

② P の特性根 $\lambda_j(x, \xi)$ が $\lambda_j \neq 0, 1, 2, \dots, l$ をみたすとき,
(i)' をみたす積分核 $K'(x, y)$ ($m \times m$ 行列) が存在し, K' の定め

3 積分作用素 S' は $L S' = Z d$. ($d f \dot{x}^*$) を満たす.

定理 1. は 定理 3. ① から出てくる. 定理 3. ① は ② (の
バリエーション) から出てくる. そこで 定理 3. の ② について,
以下証明の概略を述べる.

§ 2. シンボリッククラス.

以下常に $1 \ll C_1 \ll C_2 \ll C_3$ という 3 つの定数を固定する.
 $\sqrt{t} T^* \mathbb{R}^n \subset T^* \mathbb{C}^n$ と考えて, $T^* \mathbb{C}^n$ の変数をも (x, ξ) と書く.
 $i = 0, 1, 2, \dots$ に対し,

$$\Omega_i = \{ C_1 |\operatorname{Re} x_j|, C_1 |\operatorname{Im} x_j| < 1, \quad 1 \leq j \leq n, \\$$

$$\operatorname{Im} \xi_n > C_2 (i+1), \\$$

$$\operatorname{Im} \xi_n > C_2 |\operatorname{Im} \xi_j|, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\$$

$$\operatorname{Im} \xi_n > C_3 |\operatorname{Re} \xi_j|, \quad 1 \leq j \leq n-1. \\$$

C_1, C_2, C_3 が目ざかりであるが, $\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots$ は
いずれも $\dot{x}^*$ 方向の錐を表す. $\Omega_0 = \{ \Omega_0, \Omega_1, \dots \}$ とする.

定義 4. $\mathcal{S}_+(\Omega_0)$ は次の条件を満たす形식의 $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \xi)$
全体を表す: 各 T_i は Ω_i で正則で, $\exists C \gg 1, \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0,$

$$|T_i(x, \xi)| \leq C_\varepsilon C^{-i} \exp \{ (-\operatorname{Re}(x, \xi))_+ + \varepsilon \operatorname{Im} \xi_n \}$$

on Ω_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ ($t_+ = \max(0, t)$, $t \in \mathbb{R}$).

例 $T_i = c^{-i} \exp(\int_0^x -t \xi_i dt)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ なら $\sum T_i \in \mathcal{S}_+$.

$\Delta_i = \{\xi \in \mathcal{FIR}^n; \sum m \xi_n > C_2(i+1), \sum m \xi_n > C_2 |\sum m \xi_n|\}$,
 $1 \leq i \leq n-1$ として, $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \xi) \in \mathcal{S}_+^{\sim}(\Omega.)$ に対し,

$$\check{T}(x, y) = (\lambda \sqrt{1})^{-n} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Delta_i} e^{(x-y)\xi} T_i(x, \xi) d\xi$$

とする. $\check{T}(x, y)$ は適当な複素領域で正則となり, $\check{T}(x, y)$ はあるマイクロ函数 $\sigma(A)$ と $\check{T}(x, y)$ を与え, $\sigma(A)$ は条件 (A) を満たすことがわかる. $\check{T}(x, y)$ を積分核とする作用素を象徴的に $T(x, D) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, D)$ と書き, このとき $\sigma(T) \sim \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \xi)$ と記す. このとき, 次のことがわかる.

命題 5 $A(x, D) \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}^*}$ を $\ell (< \infty)$ 階の microdifferential operator とし, $\sigma(A) \sim \sum_{i=0}^{\infty} A_i(x, \xi)$ ($A_i(x, \xi)$ は ξ について $(\ell - i)$ 次斉次) とする. $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \xi) \in \mathcal{S}_+^{\sim}(\Omega.)$ に対し,

$$T'_i(x, \xi) = \sum_{j+\ell+|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} A_j \partial_x^{\alpha} T_{\ell}$$

とすると, $\sum_{i=0}^{\infty} T'_i(x, \xi) \in \mathcal{S}_+^{\sim}(\Omega.)$ であり,

$$\sigma(A(x, D) T(x, D)) \sim \sum_{i=0}^{\infty} T'_i(x, \xi).$$

となる.

$T_i(\alpha, \xi) = \delta_{i0}$, $i=0, 1, 2, \dots$ なら, $\tilde{T}(\alpha, D) = Id$ である. そして, 定理3 の②の条件のもとで,

$$\sigma(L(\alpha, D) T(\alpha, D)) \sim I_m + 0 + 0 + \dots$$

となるような $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(\alpha, \xi) \in \tilde{\mathcal{S}}_+(\Omega)$ を求めることが可能なのである. そこで定理3 の②が成立する.

上述の $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(\alpha, \xi)$ を求める計算は省略するが, 最も簡単な例だけをあげておく ($\alpha \in \mathbb{C}$):

$$L = \alpha, D, I_m + \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & -1 \\ \alpha D_n^{m-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \alpha, D, I_m + L'$$

とする. 漸近展開の番号を少しずらして(ずらしてもよい).

$$(8) \quad (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \alpha_1) \psi + L'(\xi_n) \psi = I_m$$

を解く.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \xi_n^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_n^{(m-1)k} \end{pmatrix}$$

として, (8)の左から Λ^{-1} , 右から Λ^{+1} をかけて,

$$(9) \quad (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \alpha_1) \Lambda^{-1} \psi \Lambda + \Lambda^{-1} L' \Lambda \cdot \Lambda^{-1} \psi \Lambda = I_m$$

を解く.

$$\Lambda^{-1} L' \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_n^k & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & -\xi_n^k \\ \alpha \xi_n^k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

となり, $\Lambda^{-1}L'\Lambda$ の固有値は, $\lambda_j = \exp\left(\frac{1}{m}(2j+1)\pi\sqrt{-1}\right)\alpha^{1/m}\xi_n^k$,
 $0 \leq j \leq m-1$ となる. $\Lambda^{-1}L'\Lambda = M'$, $\Lambda^{-1}V\Lambda = V$ とい
 て,

$$(10) \quad (x_1 \xi_1 + x_1 \partial_{x_1}) V + M' V = 0$$

とする. 問題を少しかえて, M' の固有値が

$$\lambda_j = \mu_j \cdot \xi_n^k, \quad 0 \leq j \leq m-1$$

とする. ここで, μ_j は実数で, $(\arg \mu_j) + \frac{k}{m}\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
 $0 \leq j \leq m-1$, とする (本当は $(\arg \mu_j) \neq (2l+1-\frac{k}{m})\pi$, $l \in \mathbb{Z}$,
 $0 \leq j \leq m-1$ でよいが, このときは計算は複雑になる). 更に,
 M' が対角行列の場合を考えることにする. このとき, (10) の
 解として,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{x_1} \exp\left(-x_1 \xi_1 I_m - M' \log x_1\right. \\ &\quad \left.+ t \xi_1 I_m + M' \log t\right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 \exp\left(-(1-s)x_1 \xi_1 I_m + (M' - I_m) \log s\right) ds \end{aligned}$$

をとると, $V + 0 + 0 + \dots \in \mathcal{S}_+(\Omega.)$ となる.

文献 §1 の議論は

[1]. N. Hanges, Parametrixes and propagations of singularities for operators with non-involutory characteristics, Indiana Univ. Math. J., 28(1979),

87-97

による、

$P(x, D)$ が Levi 条件をみたす場合の研究は夥しい。

hyperfunction 関係のものだけ挙げておく。

[2]. S. Nakane, Propagation of singularities and uniqueness in the Cauchy problem at a class of doubly characteristic points, Comm. Partial Differential Equations, 6(1981), 917-927.

[3]. T. Ôaku, A canonical form of a system of microdifferential equations with non-involuntary characteristics and branching of singularities, Invent. Math., 65(1982), 491-525.

[4] H. Takara, Fuchsian type equations and hyperbolic equations, Japan J. Math., 5(1979), 245-347.