

動的グラフ上のランダムウォークの到達時間と全訪問時間 Hitting time and cover time on dynamic graphs

木場 孝輔 山内 由紀子 来嶋 秀治 山下 雅史
Kosuke Koba Yukiko Yamauchi Shuji Kijima Masafumi Yamashita

九州大学
Kyushu University

1 はじめに

グラフ上のランダムウォークとは、トークンがグラフの頂点をランダムに遷移していく確率モデルである。グラフ上のランダムウォークは、インターネットクローラーやネットワークの探索などに応用されている。静的なネットワーク上でのランダムウォークに関しては、多くの従来研究が存在する。しかし、インターネットなどの現実のネットワークは時不変ではなく、故障やエラーなどによって時間と共に変化する動的なネットワークであることが多い。そこで、本発表ではこのような動的ネットワークを対象とする。

動的グラフ上でのランダムウォークについての先行研究としては、辺集合のみが変化するグラフ [1, 2, 3] や、頂点が追加されていくグラフを扱ったもの [2] がある。

本発表ではまず、辺集合が変化するグラフとして、各時刻においてグラフの各辺が独立に確率 q で消えるとしたモデルを考える。このモデルに対し、定常分布を任意に設定できるという特徴を持つメトロポリスウォーク [4] を元に、動的グラフ上でのランダムウォークの戦略を提案する。そして、その到達時間と全訪問時間、定常分布を解析する。さらに、ベルヌイグラフ上で、定常分布を任意に設定できるランダムウォークの戦略を提案、解析する。

次に、より一般的なグラフモデルとして、グラフ

の各辺が Markov 連鎖として変化するモデルも扱う。そのグラフ上の単純ランダムウォークについて、グラフをパスに限定した場合の到達時間の上界を求める。

2 準備

2.1 ランダムウォーク

グラフ $G = (V, E)$ について、ある頂点 $u \in V$ に隣接する頂点の集合を $N(u)$ で表し、 u の次数を $\deg(u)$ と書く。グラフ G 上のランダムウォークとは、グラフ上の頂点をトークンが遷移確率行列 $P = (P(u, v))(u, v \in V)$ に従って確率的に遷移していくモデルである。

すべての隣接頂点に対して等確率で遷移するランダムウォークを単純ランダムウォークという。

任意の正のベクトル $\mu = (\mu_u)(u \in V, \mu_u > 0)$ が与えられたとき、メトロポリスウォークは以下の遷移確率行列 R_μ によって定義される。

$$R_\mu(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(u)} \min \left\{ 1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u} \right\} & v \in N(u), \\ 1 - \sum_{w \in N(u)} R_\mu(u, w) & v = u, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2.2 定常分布

$\forall u \in V, \pi(u) = \sum_{v \in V} \pi(v)P(v, u)$ を満たす確率分布 $\pi = (\pi(u))(u \in V)$ を定常分布と呼ぶ。メトロ

ポリスウォークの定常分布は $\pi \propto \mu$ である [4].

2.3 到達時間と全訪問時間

グラフ $G = (V, E)$ 上の遷移確率行列 P に従うランダムウォークがあるとする. このとき頂点 $u \in V$ にあるトークンが, 頂点 $v \in V$ に到達するまでの遷移数の期待値を, u から v への到達時間 (Hitting time) と定義し $H_{u,v}^P$ で記述する. その最大値を $H^P := \max_{u,v} H_{u,v}^P$ と定義する.

また, 頂点 $u \in V$ にあるトークンが, グラフ上のすべての頂点を訪れるまでの遷移数の期待値を, u からの全訪問時間 (Cover time) と定義し C_u^P で記述する. その最大値を $C^P := \max_u C_u^P$ と定義する.

3 ベルヌーイグラフ上のランダムウォーク

3.1 ベルヌーイグラフ

辺集合が変化するグラフとして, 以下のモデルを扱う.

モデル 3.1 与えられるグラフ $G = (V, E)$ は単純無向連結とする. 時刻 $t \in \mathbb{N}$ におけるグラフ $G_t = (V_t, E_t)$ は, $V_t = V$, E_t は E の各辺を独立に確率 $1 - q$ で選んでできる辺の集合とし, 以下を満たす.

$$\forall t \in \mathbb{N}, e \in E \quad \Pr(E_t \ni e) = 1 - q.$$

このモデルは, 各時刻において, 元となるグラフ G の各辺が独立に確率 q で消え, 確率 $1 - q$ で残っているというものである.

以下で用いる記号を定義する. $n = |V|$, $m = |E|$ とする. 元となるグラフ G における u の隣接頂点の集合を $N(u)$ で表し, u に接続する辺の数を $\deg(u)$ とする. 時刻 t のグラフ G_t における u の隣接頂点の集合を $N_t(u)$ とし, u に接続する辺の数を $\deg_t(u)$ とする. 明らかに, $N_t(u) \subseteq N(u)$ が成り立つ. グラフ G の最小次数を δ , 最大次数を Δ とする.

3.2 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォーク

任意の正のベクトル $\mu = (\mu_u) (u \in V, \mu_u > 0)$ が与えられているとする. 各時刻 t において, トークンが頂点 $u \in V$ にいるとき, 以下のように動く.

1. もし, G_t 上で隣接頂点が 1 つも無いならば現在の頂点にとどまる.
2. そうでなければ, G_t での隣接頂点 $N_t(u)$ から, 等確率に 1 つ選び v とする.
3. 確率 $\min \left\{ 1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u} \right\}$ で v へ移動する.

命題 3.2 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの遷移確率行列 P_μ は, 変化のないグラフ G 上で μ を与えたときのメトロポリスウォークの遷移確率行列 R_μ を用いて, 以下のように表せる.

$$P_\mu(u, v) = \begin{cases} (1 - q^{\deg(u)}) R_\mu(u, v) & v \in N(u), \\ q^{\deg(u)} + (1 - q^{\deg(u)}) R_\mu(u, u) & u = v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3.3 到達時間と全訪問時間の解析

本節では, ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間について, 静的なグラフ上のランダムウォークの到達時間, 全訪問時間との比較を行う.

定理 3.3 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間 $H_{u,v}^{P_\mu}$ と全訪問時間 $C_u^{P_\mu}$ は以下を満たす.

$$\frac{H_{u,v}^{R_\mu}}{1 - q^\Delta} \leq H_{u,v}^{P_\mu} \leq \frac{H_{u,v}^{R_\mu}}{1 - q^\delta}, \quad \frac{C_u^{R_\mu}}{1 - q^\Delta} \leq C_u^{P_\mu} \leq \frac{C_u^{R_\mu}}{1 - q^\delta}.$$

ここで $H_{u,v}^{R_\mu}$ と $C_u^{R_\mu}$ は, 変化のないグラフ G 上で μ を与えたときのメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間である.

グラフ G の次数が大きくなるほど、ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間、全訪問時間は、変化のないグラフ G 上でのメトロポリスウォークの到達時間、全訪問時間に近づく。

補題 3.4 ある遷移確率行列 $P = (P(u, v))(u, v \in V)$ が与えられるとする。このとき、グラフ上の各頂点 u に対し、 $0 \leq q_u < 1$ である、任意の q_u が与えられ、遷移確率行列 P' が以下のように書けるとする。

$$P'(u, v) = \begin{cases} (1 - q_u)P(u, v) & v \in N(u), u \neq v, \\ q_u + (1 - q_u)P(u, u) & u = v, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき、到達時間と全訪問時間は

$$H_{u,v}^{P'} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_{u,v}^P, |w|=t+1} \left\{ \left(\prod_{i=1}^t P(w_i, w_{i+1}) \right) \sum_{j=1}^t \frac{1}{1 - q_{w_j}} \right\},$$

$$C_u^{P'} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_u^P, |w|=t+1} \left\{ \left(\prod_{i=1}^t P(w_i, w_{i+1}) \right) \sum_{j=1}^t \frac{1}{1 - q_{w_j}} \right\},$$

となる。ただし $W_{u,v}^P$ は、 G 上で P に従うランダムウォークを行ったときにとりうる u から v への道全体の集合であり、 W_u^P は、 u から全訪問するのにとりうる道全体の集合である。

道 $w \in W_{u,v}^P$ に対し、 $|w|$ で道の長さを表す。例えば w が、 $u \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_2 \rightarrow v$ という道を表すとき、 $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (u, v_1, v_2, v_2, v)$ であり、 $|w| = 5$ である。同様に $w' \in W_u^P$ についても $|w'|$ は道の長さを表す。

証明 (定理 3.3) 補題 3.4 より、ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間は

$$H_{u,v}^{P_\mu} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_{u,v}^{R_\mu}, |w|=t+1} \left\{ \left(\prod_{i=1}^t R_\mu(w_i, w_{i+1}) \right) \sum_{j=1}^t \frac{1}{1 - q^{\deg(w_j)}} \right\},$$

$$C_u^{P_\mu} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_u^{R_\mu}, |w|=t+1} \left\{ \left(\prod_{i=1}^t R_\mu(w_i, w_{i+1}) \right) \sum_{j=1}^t \frac{1}{1 - q^{\deg(w_j)}} \right\}.$$

ここで、グラフ上の頂点の最小次数 δ 、最大次数 Δ と、 G 上のメトロポリスウォークの到達時間、全訪問時間を用いると、定理 3.3 が得られる。□

3.4 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの定常分布

2.2 節で述べたとおり、静的なグラフ上では、メトロポリスウォークにより所望の定常分布が実現できる。しかし動的なグラフ上では、定常分布が所望の分布に一致しないことを示す。

定理 3.5 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの定常分布 $\pi_\mu = (\pi_\mu(u)) (u \in V)$ は以下のようになる。

$$\pi_\mu(u) \propto \frac{\mu_u}{1 - q^{\deg(u)}}.$$

証明 $\forall u \in V$, $\pi_\mu(u) = k \cdot \frac{\mu_u}{1 - q^{\deg(u)}}$ とする。 k は正規化定数であり、 $k = 1 / \sum_{w \in V} \frac{\mu_w}{1 - q^{\deg(w)}}$ である。任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して、 $\deg(u)\mu_v < \deg(v)\mu_u$ のとき、

$$\begin{aligned} & \pi_\mu(u)P_\mu(u, v) \\ &= k \cdot \frac{\mu_u}{1 - q^{\deg(u)}} \cdot \frac{1 - q^{\deg(u)}}{\deg(u)} \min \left\{ 1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u} \right\} \\ &= k \cdot \frac{\mu_v}{\deg(v)} \\ &= k \cdot \frac{\mu_v}{1 - q^{\deg(v)}} \cdot \frac{1 - q^{\deg(v)}}{\deg(v)} \min \left\{ 1, \frac{\deg(v)\mu_u}{\deg(u)\mu_v} \right\} \\ &= \pi_\mu(v)P_\mu(v, u). \end{aligned}$$

$\deg(u)\mu_v \geq \deg(v)\mu_u$ のときも同様に, $\pi_\mu(u)P(u,v) = \pi_\mu(v)P(v,u)$ となる. よって任意の2頂点 $u, v \in V$ に対して, $\pi_\mu(u)P(u,v) = \pi_\mu(v)P(v,u)$ を満たす. したがって, $\pi_\mu = \left(k \cdot \frac{\mu_u}{1-q^{\deg(u)}}\right) (u \in V)$ は, ベルヌーイグラフ上でのメトロポリスウォークの定常分布である. $\square$

定理 3.5 より, 3.2 節のメトロポリスウォークでは, 定常分布が与えた μ に比例しない. 次の節では, μ に比例する定常分布を持つランダムウォークを示す.

3.5 ベルヌーイグラフ上で, 所望の定常分布を持つメトロポリスウォーク

定理 3.5 より, 3.2 節のメトロポリスウォークに $\mu' = \mu_u (1 - q^{\deg(u)})$ を与えることで, μ に比例する定常分布を持つランダムウォークを得ることができる. このときの遷移確率行列 $P_{\mu'}$ は, 命題 3.2 から得られる. また, このランダムウォークの到達時間 $H^{P_{\mu'}}$, 全訪問時間 $C^{P_{\mu'}}$ は, 定理 3.3 によって抑えられる. ここで, $H^{R_{\mu'}} = O(f' \cdot n^2)$, $C^{R_{\mu'}} = O(f' \cdot n^2 \log n)$, $f' = \frac{\max_{u \in V} \mu'_u}{\min_{u \in V} \mu'_u}$ である [4]. よって, 以下のような上界が得られる.

$$H^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{f'}{1-q^\delta} \cdot n^2\right),$$

$$C^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{f'}{1-q^\delta} \cdot n^2 \log n\right).$$

さらに, μ が一様なのは, 以下のようになる.

$$H^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{1-q^\Delta}{(1-q^\delta)^2} \cdot n^2\right),$$

$$C^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{1-q^\Delta}{(1-q^\delta)^2} \cdot n^2 \log n\right).$$

4 Edge-Markovian グラフ上のランダムウォーク

4.1 Edge-Markovian グラフ

モデル 3.1 の拡張として, 以下のモデルを扱う.

モデル 4.1 与えられるグラフ $G = (V, E)$ は単純無向連結とする. 確率 $p, q (0 < p, q < 1)$ が与えられているとする. 時刻 t におけるグラフを $G_t = (V_t, E_t)$, $V_t = V$ とする. 各時刻 t において, 各辺 $e \in E$ が, 以下のような遷移確率に従って変化する.

	$e \in E_{t+1}$	$e \notin E_{t+1}$
$e \in E_t$	$1-p$	p
$e \notin E_t$	q	$1-q$

このモデルは $1-p = q$ のとき, モデル 3.1 と等しい. 特に, G としてパスグラフが与えられたとき ($V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$), Markovian パスと呼ぶ.

4.2 Edge-Markovian グラフ上の単純ランダムウォーク

各時刻 t において, トークンが頂点 $u \in V$ にいるとき以下のように動く.

- もし, G_t 上で隣接頂点が1つも無いならば現在の頂点にとどまる.
- そうでなければ, G_t での隣接頂点 $N_t(u)$ から等確率に1つ選び, そこへ移動する.

4.3 Markovian パス上の単純ランダムウォークの到達時間

グラフを Markovian パスに限定したときの, 単純ランダムウォークの到達時間の上界を示す.

定理 4.2 $1-p \geq q$ である Markovian パス上の, 単純ランダムウォークの到達時間 H^P は, 以下を満たす. $1-p \geq q$ である Markovian パス上の単純ラン

ダムウォークにおいて、端点からもう一方の端点までの到達時間 $H_{1,n}$ は以下を満たす。

$$H_{1,n}^P \leq \frac{b(n-1)}{p+q-1} + \frac{\left(a - \frac{b}{p+q-1}\right) \left(1 - \left(\frac{2-p-q}{p+q}\right)^{n-1}\right)}{1 - \left(\frac{2-p-q}{p+q}\right)},$$

$$a = 1 + \frac{\max\{1 - \mu_{\{1,2\}}, 1 - q\}}{q},$$

$$b = 1 + \frac{p(1-q)}{1 - (1-q)^2}.$$

ここで $\mu_{\{1,2\}}$ は、初期グラフ G_1 において辺 $\{1,2\}$ が存在する確率である。

5 おわりに

グラフ G 上の各辺が各ステップ毎に独立に確率 p で消えるモデル上でのメトロポリスウォークについて、その到達時間と全訪問時間、定常分布を解析した。定常分布を任意に設定できるランダムウォークを提案し、その到達時間と全訪問時間の上界を求めた。さらに、グラフ G の各辺が Markov 連鎖として変化するモデル上の単純ランダムウォークについて、グラフをパスに限定した場合の到達時間の上界を求めた。しかし、その上界は頂点数について指数の上界であるため、頂点数の多項式で抑えられないか考える必要がある。また、パス以外のグラフについて解析することも、今後の課題である。

参考文献

- [1] C. Avin, M. Koucky, Z. Lotker, How to explore a fast-changing world (Cover time of a simple random walk on evolving graphs), LNCS, 5125 (2008), 121–132.
- [2] C. Cooper, Random walks, Interacting particles, dynamic networks: Randomness can be helpful, LNCS, 6796 (2011), 1–14.
- [3] K. Koba, S. Kijima, M. Yamashita, Random walks on dynamic graphs, Proc. WAAC 2011, 28–35.
- [4] Y. Nonaka, H. Ono, K. Sadakane, M. Yamashita, The hitting and cover times of Metropolis walks, Theoretical Computer Science Volume 411 Issue 16–18, 2010, 1889–1894