

CUBIC EQUIVALENCE と COHOMOLOGY

名大・理 青藤 博

代数体長上の非特異射影代数多様体 V を考えよう。 V の次元を m , $p+r=m$ とする。 V の r -cycle のつくる Chow 群、即ち、 V の r -cycle の有理同値類群を $CH_r(V) = CH^p(V)$ とする。

$$CH(V) = \bigoplus_{0 \leq p \leq m} CH^p(V) = \bigoplus_{0 \leq r \leq m} CH_r(V)$$

は、余次元 p を次数にもつ commutative graded ring となり、 V の Chow ring と呼んだ。 Chow 群については、 $CH^0(V) = \mathbb{Z}[V] \cong \mathbb{Z}$ であり (特にこのことをなければ多様体は既約とする)、 $CH^1(V)$ は、 V の Picard 群で、 "良く知られている"。 $CH^p(V)$ ($p > 1$) については余り解っていない。 1930年代から、 Severi によって、主として曲面の場合に、その上の 0-cycle が調べられているが、厳密でなく、又理解が難しい所も多い。(例えは [Se]).

然し、Mumford は Severi の technic を使い次の定理

2

を示した。

定理 [M] $k = \mathbb{C}$ とする。 $\dim V = 2$, $H^0(V, \Omega_V^2) \neq 0$
ならば、どんな $d > 0$ に対しても

$$S^d V \times S^d V \longrightarrow \mathrm{CH}_0(V)_{\deg 0}$$

は全射でない。ここで、 $S^d V$ は V の d 次対称積で、 V 上の次数 d の正の 0 -cycle 全体と同一視され、 $\mathrm{CH}_0(V)_{\deg 0}$ は $\mathrm{CH}_0(V)$ の中で次数 0 のもののなる部分群、写像は、 $(X, Y) \mapsto (X - Y)$ の類である。

直観的には、この定理は $\mathrm{CH}_0(V)_{\deg 0}$ に多様体の構造が入らないことを示している。

§1. Roitman の結果。

Roitman [R1, R2] は上の定理を $\dim V > 2$ の場合に拡張・精密化した。我々はこの一部を復習し、その一般化を考える。 $k = \mathbb{C}$ とする。(実は $\mathrm{char} k = 0$, $\mathrm{card} k > 4$ ならばよい)。

定理 (1.1) $\{(X, Y) \in S^d V \times S^d V; X \text{ と } Y \text{ は } V \text{ 上の } 0\text{-cycle として有理同値}\}$
は、 $S^d V \times S^d V$ の可算個の閉集合の合併となる。

この系として、次の "Homotopy 定理" がいえる。

3

定理(1.2) S を非特異多様体(完備でなくてもよい) とする。 $f, g: S \rightarrow S^d V$ が morphism で 各 $s \in S$ (閉点) に対して, $f(s)$ と $g(s)$ は V 上の 0-cycle として有理同値とする。
 γ の時, 非特異多様体 T , dominant morphism $e: T \rightarrow S$ 整数 $d', d'' > 0$ と morphism $H: T \times \mathbb{P}^1 \rightarrow S^{d'} V \times S^{d''} V$ があリ,

$$f \circ e + \text{pr}_1^*(H|_{T \times 0}) + \text{pr}_2^*(H|_{T \times \infty}) = g \circ e + \text{pr}_1^*(H|_{T \times \infty}) + \text{pr}_2^*(H|_{T \times 0})$$
が成立する。 pr_i は $S^{d'} V \times S^{d''} V$ から $\mathbb{P}^1$ の成分への射影で 等号は T から $S^{d'+d''} V$ への morphism としてある。

この定理の仮定で $s \in S$ が閉点であることに注意。 $f(s)$ と $g(s)$ を "結び" $\mathbb{P}^1 \times V$ 上の cycle が s について "連続的" と思ってよいというのが定理の主張である。

$\omega \in H^0(V, \Omega_V^g)$ とする。 $\pi_i: V^d \rightarrow V$ を $\mathbb{P}^1$ の成分への射影とする時,

$$\sum_{i=1}^d \pi_i^* \omega \in H^0(V^d, \Omega_{V^d}^g)$$

は, "対称" 故, $S^d V$ 上の g -form ω_d の標準射影 $V^d \rightarrow S^d V$ による引き戻しである。(ω_d は Severi が考えている。)

$f: S \rightarrow S^d V$ が morphism の時, $f^* \omega_d \in H^0(S, \Omega_S^g)$ となる。

従って f に対し, ω に $f^* \omega_d$ を対応させて写像

$$f^\# : H^0(V, \Omega_V^g) \longrightarrow H^0(S, \Omega_S^g)$$

が得られる。

定理 (1.3) (1.2) と同じ仮定の下で,

$$f^\# = g^\# : H^0(V, \Omega_V^q) \longrightarrow H^0(S, \Omega_S^q).$$

この定理を使い易い形に述べる為 0 -cycle 族が正則という概念を定義する。

S を非特異多様体とする。(集合論的)写像

$\kappa : S \rightarrow \text{CH}_0(V)$ が 正則 とは, 可換な図式

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & S^{d_1}V \times S^{d_2}V \\ f \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{\kappa} & \text{CH}_0(V) \end{array}$$

が存在し, T は非特異多様体, g は morphism, f は (separable) proper surjective morphism, π は $\pi(X, Y) = (X - Y)$ の類と存在することである。

系 (1.4). 正則写像 $\kappa : S \rightarrow \text{CH}_0(V)$ に対して,

$$\kappa^\# : H^0(V, \Omega_V^q) \longrightarrow H^0(S, \Omega_S^q).$$

を, 上の記号で, $\kappa^\#(\omega) = \text{Tr}((\text{pr}_1 \circ g)^\# \omega - (\text{pr}_2 \circ g)^\# \omega)$ で定義すると well-defined, 即ち, " κ の上にある図式" によらない。

以下では, (1) 上の Roitman の結果を r -cycle ($r \geq 0$) に一般化する。(2) 有理同値は adequate equivalence

5

relation (= cycle の "順像・逆像" 及び "積" と両立する同値関係) の中で最も細かいものであった。(1.3) は, " $f_1(\omega)$ と $g_1(\omega)$ が有理同値しか違わなければ, $f^\#$ と $g^\#$ は同じ", 即ち $f^\#$ は有理同値の違いを区別しない。それでは, より粗い同値関係 (の違い) を区別する, 或いはしないかという問題を考える。

§2. r -cycle の場合.

Roitman の結果を r -cycle に拡張するには, 標語的には, " SdV を V の Chow scheme に置き換える" ことにより為される。 V の射影空間 $\mathbb{P}^N$ への埋め込み $V \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を一つ固定する。 V 上の r -cycle に対して, この埋め込みに関する次数を考える。 V 上の次数 d の正の r -cycle 全体は projective scheme $C_r(V)_d$ の閉点全体と 1-1 に対応する。更に, 非特異多様体 S に対して, S から $C_r(V)_d$ への morphism 全体と,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma; \quad S \times V \text{ 上の余次元 } (\dim V - r) \text{ の cycle で } \forall s \in S \text{ に対し} \\ V \text{ 上の cycle } Z(s) \text{ が定義され, その次数は } d \end{array} \right\}$$

は 1-1 に対応する (今 $\text{char} k = 0$ である)。ここで $Z(s)$ は $\Sigma \cdot s \times V = s \times Z(s)$ で定義される cycle である。

$r=0$ の時は $S^d V = C_0(V)_d$ である。§1の(1.1), (1.2)は $S^d V$ を $C_r(V)_d$ に置き換えて、そのまま成り立つ。

定理(2.1) $\{(X, Y) \in C_r(V)_d \times C_r(V)_d; X \text{ と } Y \text{ は } V \text{ 上の cycle として有理同値}\}$ は $C_r(V)_d \times C_r(V)_d$ の可算個の閉集合の合併である。

定理(2.2) 非特異多様体 S から $C_r(V)_d$ の morphism f, g が, " $x_0 \in S$ に対し, $f|_{x_0}$ と $g|_{x_0}$ は V 上の r -cycle として有理同値" を充すとする。非特異多様体 T , dominant morphism $e: T \rightarrow S$, 整数 $d', d'' > 0$, として morphism

$$H: T \times \mathbb{P}^1 \rightarrow C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''}$$

があり、

$$f \circ e + \text{pr}_1^*(H|_{T \times x_0}) + \text{pr}_2^*(H|_{T \times x_0}) = g \circ e + \text{pr}_1^*(H|_{T \times x_0}) + \text{pr}_2^*(H|_{T \times x_0}).$$

証明は Roitman [R1] と同様である。 X と Y が有理同値なれば, $\mathbb{P}^1 \times V$ 上の cycle Z があり, $Z(a)$ ($a \in \mathbb{P}^1$) が全て定義でき $Y = Z(\infty)$, $X = Z(0)$. $Z = Z^+ - Z^-$ と正・負の部分に分け(必要なら同じ cycle を足して $Z^+, Z^- \neq 0$ とする), 上で注意した様に

$$f: \mathbb{P}^1 \rightarrow C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''}, \quad a \mapsto (Z^+(a), Z^-(a))$$

(morphism) が得られる。 $Y = Z(\infty)$, $X = Z(0)$ より

7

$$X + pr_1 \circ f(0) + pr_2 \circ f(\infty) = Y + pr_1 \circ f(\infty) + pr_2 \circ f(0).$$

逆にこの様に書ければ X と Y は有理同値である。

$\text{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''})$ を $\mathbb{P}^1$ から $C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''}$ への次数 p の morphism のつくる射影幾何学的 scheme とし, morphism

$$\begin{aligned} \Phi_{d', d''}^p : C_r(V)_d \times C_r(V)_d \times \text{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''}) &\longrightarrow C_r(V)_{d+d'+d''} \times C_r(V)_{d+d'+d''} \\ \downarrow &\downarrow \\ (X, Y, f) &\longmapsto (X + pr_2 \circ f(0) + pr_1 \circ f(\infty), Y + pr_1 \circ f(\infty) + pr_2 \circ f(0)) \end{aligned}$$

を考える。 $\pi_{d', d''}^p$ を射影幾何

$$C_r(V)_d \times C_r(V)_d \times \text{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''}) \longrightarrow C_r(V)_d \times C_r(V)_d$$

と $(C_r(V)_{d+d'+d''} \times C_r(V)_{d+d'+d''})$ の diagonal を $\Delta_{d+d'+d''}$ とする。

$$E := \{(X, Y) \in C_r(V)_d \times C_r(V)_d, X \sim Y \text{ は有理同値}\} = \bigcup_{d', d'', p} \pi_{d', d''}^p(\Phi_{d', d''}^{p-1}(\Delta_{d+d'+d''}))$$

となり, E は可算個の部分集合の合併である。Constructible

set $\pi_{d', d''}^p(\Phi_{d', d''}^{p-1}(\Delta_{d+d'+d''}))$ の閉包が E に含まれる。(2.1) は示

される。それには, $\pi_{d', d''}^p(\Phi_{d', d''}^{p-1}(\Delta_{d+d'+d''}))$ 内の curve C^0 (非特異完備化) (完備化は必ずしも必要でない)

の閉包が E に含まれる。 $C' \subset \Phi_{d', d''}^{p-1}(\Delta_{d+d'+d''})$ を, C^0 を支面とする

curve, $\bar{C}$ を C' の非特異完備化, $C \subset \bar{C}$ を C' に落ちる点のつくる

curve とする。 $C \rightarrow C' \rightarrow C^0 \subset C_r(V)_d \times C_r(V)_d$ は $\bar{C}$ からの morphism ψ に引き返

できる。 $\psi(\bar{C}) \in E$ であり, $\omega \in \bar{C}$ に対し $\psi(\omega) \in E$ を示せばよい。

$$\text{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''}) \longrightarrow C_r(V)_{d'}, f \mapsto pr_1 \circ f(0) \text{ と } C \rightarrow C' \xrightarrow{pr_2}$$

$\text{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''})$ の合成は $\varphi_1^{(0)}: \bar{C} \rightarrow C_r(V)_{d'}$ に引き返

ける。同様に $\varphi_2^{(0)}: \bar{C} \rightarrow C_r(V)_{d''}$ と $\varphi_1^{(0)}: \bar{C} \rightarrow C_r(V)_{d'}$, $\varphi_2^{(0)}: \bar{C} \rightarrow C_r(V)_{d''}$

" ∞ " の値) が得られる。 $C' \subset \Phi_{d', d''}^p(\Delta_{d+d'+d''})$ から。 $w \in \bar{C}$ に対し

$$pr_1 \circ \psi(w) + \varphi_1^{(0)}(w) + \varphi_2^{(\infty)}(w) = pr_2 \circ \psi(w) + \varphi_1^{(\infty)}(w) + \varphi_2^{(0)}(w).$$

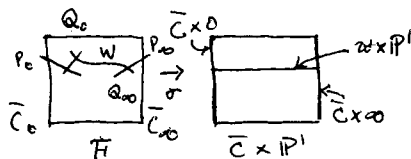
従って $\psi(w) \in E$ となるには, $\varphi_1^{(0)}(w) \neq \varphi_1^{(\infty)}(w)$, $\varphi_2^{(0)}(w) \neq \varphi_2^{(\infty)}(w)$ が必要で、
有理同値であることが示せば充分。

$$C \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \text{Hom}^p(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'} \times_{C_r(V)_{d''}} \mathbb{P}^1) \longrightarrow C_r(V)_{d'} \\ (f, a) \longmapsto pr_1(a)$$

12 有理写像 $h: \bar{C} \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow C_r(V)_{d'}$ に決める, $\varphi_1^{(0)} = h|_{\bar{C} \times 0}$, $\varphi_1^{(\infty)} = h|_{\bar{C} \times \infty}$.

$\bar{C} \times \mathbb{P}^1$ は blow-up して, h は morphism になる。

$$\begin{array}{ccc} \bar{C} & \xrightarrow{\sigma} & \bar{C} \times \mathbb{P}^1 \\ \bar{h} \searrow & & \downarrow h \\ & & C_r(V)_{d'} \end{array}$$



$\bar{C} \times 0$, $\bar{C} \times \infty$, $w \times \mathbb{P}^1$ の proper transform を $\bar{C}_0$, $\bar{C}_\infty$, W とする。

$$P_0 = \sigma^{-1}(w \times 0) \cap \bar{C}_0, \quad Q_0 = \sigma^{-1}(w \times 0) \cap W, \quad P_\infty = \sigma^{-1}(w \times \infty) \cap \bar{C}_\infty, \quad Q_\infty = \sigma^{-1}(w \times \infty) \cap W$$

とすると, $\varphi_1^{(0)}(w) = \bar{h}(P_0)$, $\varphi_1^{(\infty)}(w) = \bar{h}(P_\infty)$. $W \cong \mathbb{P}^1$ 故 $\bar{h}(Q_0)$ と $\bar{h}(Q_\infty)$

は有理同値, 又 $P_0 \sim Q_0$, $P_\infty \sim Q_\infty$ 故 $\mathbb{P}^1$ 上の点から $\bar{h}(P_0)$ と $\bar{h}(Q_0)$, $\bar{h}(P_\infty)$ と $\bar{h}(Q_\infty)$ は有理同値。故に $\varphi_1^{(0)}(w)$ と $\varphi_1^{(\infty)}(w)$ は有理同値。

(2.2) については, $(f, g): S \rightarrow C_r(V)_d \times C_r(V)_d$ を考える。仮定より

$\text{Im}(f, g) \subset E$. $k = \mathbb{C}$ 故, 適当な d', d'', p に対し, $\text{Im}(f, g)$ の中で

$\text{Im}(f, g) \cap \pi_{d', d''}^p(\Phi_{d', d''}^p(\Delta_{d+d'+d''}))$ は dense となる。Fibre 積

$$\begin{array}{ccc} T' & \longrightarrow & \Phi_{d', d''}^p(\Delta_{d+d'+d''}) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_{d', d''}^p \\ S & \xrightarrow{(f, g)} & C_r(V)_d \times C_r(V)_d \end{array}$$

とすると T' の適当な subscheme T をとると, T は非特異で

$e: T \subset T' \rightarrow S$ は dominant となる。 T' の π^{-1} から,

$$T \subset T' \rightarrow \mathbb{P}_{d', d''}^{d, d'}(4d + d' + d'') \xrightarrow{p_1} \text{Hom}^1(\mathbb{P}^1, C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''})$$

は, $H: T \times \mathbb{P}^1 \rightarrow C_r(V)_{d'} \times C_r(V)_{d''}$ を決め, 要求された性質を持つ。

次に $f^\#: H^0(U, \Omega_U^1) \rightarrow H^0(S, \Omega_S^1)$ の対応物を定義する。 S 及び S' に

非特異 (準射影的) 多様体 S に対し, 通常のように

$$H^{p,q}(S) = H^p(S, \Omega_S^q)$$

と置く。 $H^*(S) = \bigoplus_{p,q} H^{p,q}(S)$ は anticommutative bigraded ring になる。

Morphism $f: S \rightarrow T$ に対し, $f^*: H^{p,q}(T) \rightarrow H^{p,q}(S)$ は 環準同型

$f^*: H^*(T) \rightarrow H^*(S)$ を引き起こす。 f が proper な時には, 群の準同型

$$f_*: H^{p,q}(S) \rightarrow H^{p-d, q-d}(T), \quad d = \dim S - \dim T$$

が定義でき, projection formula が成り立つ。

更に, S との余次元 p の cycle Z に対し, q の fundamental class $\{Z\} \in H^{p,p}(S)$ が定義される。 Morphism $f: T \rightarrow S$ に

対して, cycle f^*Z が定義されるのは $\{f^*Z\} = f^*\{Z\}$ 。

順像・積についても同様の性質が成り立つ。

$l \geq 0$ とする。 $f: S \rightarrow C_r(V)_d$ に対し

$$f^\#: H^{r,l,r}(V) \rightarrow H^{l,0}(S)$$

を次のように定義する。

$$f^\#: H^{r,l,r}(V) \xrightarrow{p_1^*} H^{r,l,r}(S \times V) \xrightarrow{\{Z\}} H^{m+l,m}(S \times V) \xrightarrow{p_{S*}} H^{l,0}(S)$$

ここで, γ_f は f に対応する $S \times V$ 上の cycle γ の fundamental class である。0-cycle に対しては, これは前の定義と一致する。

$S = \text{point} = \text{point}$, $\ell = 0$ の時には, $f^\# : H^{r,r}(V) \rightarrow H^{0,0}(S) = \mathbb{C}$ は cycle $f(\alpha) \in C_r(V)_{\mathbb{C}}$ の fundamental class $\{f(\alpha)\} \in H^{r,r}(V)$ の決める linear form である。(1.3) に対応して,

定理 (2.3) (2.2) と同じ仮定の下で, 各 $\ell \geq 0$ について

$$f^\# = g^\# : H^{r+\ell,r}(V) \rightarrow H^{\ell,0}(S)$$

これは $f^\#$ の "f についての線型性", (2.2), 4.12. 次のように
 いくつかの自明な性質から従う: $\omega \in H^{\ell,0}(S \times \mathbb{P}^1)$ とする。
 $a \in \mathbb{P}^1$ に対し $i_a : S \simeq S \times a \subset S \times \mathbb{P}^1$ と書くとき, $i_a^* \omega = i_a^* \omega$ 。

定義 写像 $\kappa : S \rightarrow CH_r(V)$ を 正則 とは, 非特異多様体 T , (separable) proper surjective morphism $f : T \rightarrow S$, morphism $g : T \rightarrow C_r(V)_{\mathbb{C}} \times C_r(V)_{\mathbb{C}}$ があり, 図式

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{g} & C_r(V)_{\mathbb{C}} \times C_r(V)_{\mathbb{C}} & \ni (X, Y) \\ f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\kappa} & CH_r(V) & \ni \text{cycle } (X-Y) \text{ の類} \end{array}$$

が可換となることである。

例. S を射影的とする。 $Z \in CH^p(S \times V)$ ($p+r=m=\dim V$) に対し、写像

$$\kappa: S \longrightarrow CH_r(V), \quad \sigma \longmapsto Z(\sigma)$$

は正則である。実際 Z の代表元 $Z = \sum_i Z_i$ (Z_i : 既約) とする。 Z をとり変えて (κ は変えられ), 射影 $Z_i \rightarrow S$ は全て全射にできる。この時, S のある開集合 S_0 があり $\sigma \in S_0$ に対し, $Z(\sigma)$ が定義される。 Z を正・負の部分に分ける: $Z = Z^+ - Z^-$. $Z^+(\sigma), Z^-(\sigma)$ ($\sigma \in S_0$) も定義され, γ の次数を d_+, d_- とすると, morphism

$$: S_0 \longrightarrow Gr(V)_{d_+} \times Gr(V)_{d_-}, \quad \sigma \longmapsto (Z^+(\sigma), Z^-(\sigma))$$

が得られる。これを S からの有理写像 g_0 とみて, γ の不確定点の解消 g を考える。図式

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & Gr(V)_{d_+} \times Gr(V)_{d_-} \\ f \downarrow & \dashrightarrow g_0 & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\kappa} & CH_r(V) \end{array}$$

は可換で f は proper birational 故 κ は正則。

系 (2.4) 正則写像 $\kappa: S \rightarrow CH_r(V)$ に対し ("定義" の記号 τ),

$$\kappa^*: H^{p,q}(V) \longrightarrow H^{p,q}(S), \quad \omega \longmapsto f_*((pr_1 \circ g)^* \omega - (pr_2 \circ g)^* \omega)$$

は well-defined.

12

さて $\kappa: S \rightarrow CH_r(V)$ は χ の例の χ の子。

κ の像は $CH_r(V)$ の中で 0 と代数的に同値な cycle 全体 $F^1(CH_r(V))$ に含まれていると仮定しよう。 $J_r(V)$ を p -th intermediate Jacobian ($\cong H^{r-1}(V, \mathbb{R})/H^{r-1}(V, \mathbb{Z})$) の algebraic part とする。標準全射 $F^1(CH_r(V)) \rightarrow J_r(V)$ があり、

$h: S \xrightarrow{\kappa} F^1(CH_r(V)) \rightarrow J_r(V)$ は morphism となる。 h は、

$h: S \rightarrow \text{Alb } S \xrightarrow{\bar{h}} J_r(V)$ と分解される。 $J_r(V)$ の接空間は、自然に $H^{r-1,p}(V)$ の部分空間となり、

$$\begin{aligned} d\bar{h}: \text{Alb } S \text{ の接空間} &\rightarrow J_r(V) \text{ の接空間} \subset H^{r-1,p}(V) \\ &\parallel \\ &H^{n-1,n}(S) \quad (\dim S = n) \end{aligned}$$

の dual が $\kappa^\#: H^{r+1,r}(V) \rightarrow H^{1,0}(S)$ である。

一般に 正則写像 $\kappa_i: S \rightarrow CH_r(V)$ ($i=1, 2$) に対して、 $\kappa_1 + \kappa_2: S \rightarrow CH_r(V)$ も正則であり

$$(\kappa_1 + \kappa_2)^\# = \kappa_1^\# + \kappa_2^\#: H^{r+1,r}(V) \rightarrow H^{1,0}(S).$$

又 $\kappa: S \rightarrow CH_r(V)$ が正則写像、 $f: T \rightarrow S$ が morphism とし、 $\varphi: CH_r(V) \rightarrow CH_s(W)$ (W は非特異射影多様体) があり、 $\varphi(x) = y(x)$, $y \in CH^{n-s+r}(V \times W)$ ($\dim W = n$) の形の写像の時、

$$\varphi \circ \kappa \circ f: T \rightarrow CH_s(W)$$

も正則であり、

13

$$(\varphi \circ \kappa \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ \kappa^{\#} \circ \gamma\gamma : H^{s+l, s}(W) \longrightarrow H^{l, 0}(T)$$

が成立する。但し $\gamma\gamma : H^{s+l, s}(W) \longrightarrow H^{r+l, r}(V)$ は

$\gamma\gamma(\gamma) = pr_{V*}(pr_W^* \gamma \wedge \gamma\gamma)$, $\gamma\gamma$ は γ の (代表の) fundamental class $\in H^{r-s+l, r-s+l}(V \times W)$ である。

§3. Cubic equivalence.

この § では、断るない限り $\mathbb{C}$ は任意標数の代数体とする。 l -cubic equivalence は Samuel [Sa] により定義された。

定義: $l \geq 1$ を整数とする。 V 上の余次元 p の cycle X, Y が l -cube equivalent であるとは、 l 個の curve $C_1, \dots, C_l$, 各 C_j 上の l 点 $a_j^{(0)}, a_j^{(1)}$, 及 u .

$C_1 \times \dots \times C_l \times V$ 上の余次元 p の cycle Z があリ。

(i) 全ての $i_1, \dots, i_l = 0 \sim 1$ に対し $Z(a_1^{(i_1)}, \dots, a_l^{(i_l)})$ が定義され、

$$(ii) \quad X - Y = \sum_{i_1, \dots, i_l = 0, 1} (-1)^{i_1 + \dots + i_l} Z(a_1^{(i_1)}, \dots, a_l^{(i_l)})$$

が成り立つことである。

例. $l=1$ の時、curve C と u 上の点 $a^{(0)}, a^{(1)}$ 及 u .

$C \times V$ 上の cycle Z があリ $X - Y = Z(a^{(0)}) - Z(a^{(1)})$ としう

条件であリ。これは代数同値に他ならない。

14

$Z(a^{(0)}) - Z(a^{(1)})$ は "関数 $a \mapsto Z(a)$ " の階差 と み ら れ る こ
と に 注 意 し ま う。

(ii) $\lambda = 2$ の 時. 上 の (i) の 右 辺 は.

$$\begin{aligned} & Z(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) - Z(a_1^{(1)}, a_2^{(0)}) - Z(a_1^{(0)}, a_2^{(1)}) + Z(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}) \\ &= \{Z(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) - Z(a_1^{(1)}, a_2^{(0)})\} - \{Z(a_1^{(0)}, a_2^{(1)}) - Z(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})\} \end{aligned}$$

と 書 け る。オーの $\{ \}$ は "関数 $a_1 \mapsto Z(a_1, a_2^{(0)})$ " の階差,
オ=の $\{ \}$ は, "関数 $a_1 \mapsto Z(a_1, a_2^{(1)})$ " の階差である。
従って (ii) の 右 辺 は " $(a_1, a_2) \mapsto Z(a_1, a_2)$ " の 2 階の階差であ
る。これを square equivalence という。所謂、

Theorem of square は. divisor については square equivalence
と 有 理 同 値 が 一 致 す る と い う 定 理 で あ る。

同様に X と Y が ℓ -cube equivalent とは $X - Y$ が 適 当
な " $(a_1, \dots, a_\ell) \mapsto Z(a_1, \dots, a_\ell)$ " の ℓ 階の階差に書けること
である。

注意. 一般には. 定義の中で. 全ての $(a_1, \dots, a_\ell) \in G \times \dots \times G_\ell$
に対し $Z(a_1, \dots, a_\ell)$ が 定義できるとは限らない。

便宜上 全ての cycle は 0-cube equivalent とする。

命題 [S4]. (i) l -cubic equivalence は adequate equivalence relation である。特に全ての l に対し、有理同値は l -cubic equivalence より細かい。

(ii) $(l+1)$ -cubic equivalence は l -cubic equivalence より細かい。

(iii) V の cycle X が 0 と l -cube equivalent なら、 W の cycle Y が 0 と l' -cube equivalent ならば、 $V \times W$ の cycle $X \times Y$ は 0 と $(l+l')$ -cube equivalent である。

$F^l CH^p(V) = \{V \text{ の } 0 \text{ と } l\text{-cube equivalent な } p\text{-次元 cycle}\} \text{ mod rational equivalence}$
と置く。また $F^l CH_r(V) = F^l(CH^p(V))$ ($p+r=\dim V$),

$F^l CH^*(V) = \bigoplus_p F^l CH^p(V)$ と置く。命題の (ii) より

$$CH^p(V) = F^0 CH^p(V) \supset F^1 CH^p(V) \supset \dots \supset F^l CH^p(V) \supset F^{l+1} CH^p(V) \supset \dots$$

即ち、 $CH^p(V)$ に $F^* CH^p(V)$ による filtration が入る。

又 (i) から $F^l CH^*(V)$ は $CH^*(V)$ の ideal であり $f: V \rightarrow W$

に対し、 $f_* F^l CH_r(V) \subset F^l CH_r(W)$,

$$f^* F^l CH^p(W) \subset F^l CH^p(V)$$

が成立する。

$$gr^l CH^p(V) = gr^l CH_r(V) = F^l CH^p(V) / F^{l+1} CH^p(V),$$

$$gr^* CH^*(V) = \bigoplus_{l, p} gr^l CH^p(V)$$

と置く。命題の (iii) より $gr^* CH^*(V)$ には自然に bigraded

16

ring の構造 が 入 る。 Morphism $f: V \rightarrow W$ に 対 し、

$$f^*: g^p(H^q(W)) \longrightarrow g^p(H^q(V))$$

は, bigraded ring の 準同型 と な る。 更 に、

$$f_*: g^p(H^q(V)) \longrightarrow g^p(H^q(W))$$

も 定 義 さ れ る。

例 (i) $p=0$ なら ば " も ち ろ ん $F^0(H^0(V)) \cong \mathbb{Z}$ $F^1(H^0(V))=0$.

(ii) $p=1$ なら ば " 上 に 述 べ た 様 に $F^2(H^1(V))=0$.

従 っ て、 $0 \rightarrow g^1(H^1(V)) \rightarrow H^1(V) \rightarrow g^0(H^1(V)) \rightarrow 0$

は 完 全 系 列 で、 $g^1(H^1(V))$ は V の Picard 多 様 体、
 $g^0(H^1(V))$ は V の Néron-Severi 群 で "有限生成 abel 群" である。

(iii) $h: F^1CH^p(V) \rightarrow A$ が abel 多 様 体 A の 群 の 準同型
とし、 次 の 性 質 を も っ て す る: 任 意 の W ,

$u \in CH^p(W \times V)$, $w_0 \in W$ に 対 し て、

$$W \rightarrow F^1CH^p(V) \xrightarrow{h} A$$

は morphism, 但 し $W \rightarrow F^1CH^p(V)$ は $w \mapsto u(w) - (w_0)$.

h の 時、 $h(F^2CH^p(V))=0$ である。 従 っ て $F^2CH^p(V) \neq 0$
な る 17" $F^1CH^p(V)$ に "よい abel 多 様 体 の 構 造" は 入 ら ない。

(iv) V が (smooth complete) curve $C_1, \dots, C_m$ の 積 と す る:

7

$V = C_1 \times \cdots \times C_m$. $h: F^1\mathrm{CH}_0(V) \longrightarrow \mathrm{Alb} V$ を標準的写像とすると, h は (iii) の性質を持ち, $h(F^2\mathrm{CH}_0(V))=0$, 故に

$$\bar{h}: \mathrm{gr}^1\mathrm{CH}_0(V) \longrightarrow \mathrm{Alb} V$$

が定義できる。 V が上の形の時, これは同型となる。

ℓ -cubic equivalence の定義において, C_i ($1 \leq i \leq \ell$) を ℓ 個の非特異多様体としても同じ同値関係が得られる。或いは C_i は Jacobi 多様体としてもよい。このことから $F^\ell\mathrm{CH}^p(V)$ は次のようにも書ける:

A を abel 多様体とし, $I_A = F^1\mathrm{CH}_0(A)$ とおく。

$\mu: A \times A \longrightarrow A$ を A の和とし,

$$\begin{aligned} * : \mathrm{CH}(A) \times \mathrm{CH}(A) &\longrightarrow \mathrm{CH}(A) \\ (x, y) &\longmapsto \mu_*(x \times y) =: x * y \end{aligned}$$

を Pontryagin 積 とする。

$$\underbrace{I_A \times \cdots \times I_A}_{\ell \text{ 個}} \longrightarrow \mathrm{CH}_0(A), (x_1, \dots, x_\ell) \longmapsto x_1 * \cdots * x_\ell$$

の像により生成された $\mathrm{CH}_0(A)$ の部分群を $I_A^{*\ell}$ とする。 $I_A^{*\ell}$ は Bloch [B] により調べられていて, $I_A^{*(\ell+1)} = 0$, ($\ell = \dim A$) である。

任意の ℓ に対し, $\alpha \in I_A^{*\ell} \subset F^\ell\mathrm{CH}_0(A)$, $u \in \mathrm{CH}^p(A \times V)$ ならば $u(\alpha) \in F^\ell\mathrm{CH}^p(V)$ であるが, "逆" もいえる。

12

$H^2(CH^p(V)) \Rightarrow x \in CH^p(V)$; abel 多様体 $A, u \in CH^p(A \times V), a \in I_A^{*l}$ があり $x = u(a)$.
 別の言い方をすれば, 全ての I_A^{*l} (A : abel 多様体) を
 "含む" 最小の adequate equivalence relation が l -cubic
 equivalence である。

Swan によつて, $k = \overline{\mathbb{F}}_q$ ならば $I_A^{*2} = 0$ である [B].
 従つて次の定理が成立する。

定理 $k = \overline{\mathbb{F}}_q$ ならば 任意 (余) 次元の cycle に対
 して square の定理 $H^2(CH^p(V)) = 0$ が成り立つ。もと
 explicit にば, V, W_1, W_2 を $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上の 非特異射影多様体,
 Z を $W_1 \times W_2 \times V$ 上の 余次元 p の cycle, $a_i^{(0)}, a_i^{(1)} \in W_i$
 (閉点) とする。その時 cycle

$$Z(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) - Z(a_1^{(1)}, a_2^{(0)}) - Z(a_1^{(0)}, a_2^{(1)}) + Z(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$$

が 定義されれば, これは 0 と有理同値である。

§4. Cubic equivalence と Hodge cohomology.

この § では, §2 の結果 を cubic equivalence の 場合に
 拡張する。再び $k = \mathbb{C}$ とし, $V \subset \mathbb{P}^N$ と $l \geq 0$ を固定
 する。

定理 (4.1)

$\{(X, Y) \in Cr(V)_d \times Cr(V)_d; X \text{ と } Y \text{ は } V \text{ 上の cycle として } l\text{-cube equivalent}\}$

は $Cr(V)_d \times Cr(V)_d$ の可算個の閉集合の合併である。

"Homotopy 定理" も成立するが、かなり複雑になる。

定理 (4.2) $f, g: S \rightarrow Cr(V)_d$ は morphism と 各 $s \in S$ に対して, $f(s)$ と $g(s)$ は d -cube equivalent と なる。この時、非特異多様体 T , dominant morphism $e: T \rightarrow S$, T 上の曲線族 $\mathcal{C}_i$ ($i=1, \dots, l$) (即ち smooth proper な $\pi_i: \mathcal{C}_i \rightarrow T$ が有り fibre の次元は 1 且つ $\pi_{i*}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i}) = \mathcal{O}_T$), 各 $\mathcal{C}_i$ に対して $\mathcal{C}_i/T$ の section $s_i^{(1)}, s_i^{(2)}: T \rightarrow \mathcal{C}_i$, 及び 有理写像

$$H: \mathcal{C}_1 \times_T \dots \times_T \mathcal{C}_l \dashrightarrow Cr(V)_{d_1} \times Cr(V)_{d_2}$$

があり、次の (i), (ii) を充す:

(i) 全ての $i_1, \dots, i_l = 0$ or 1 に対して $Im(s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_l^{(i_l)})$ は H の定義域に含まれる。但し

$$s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_l^{(i_l)}: T = T \times_T \dots \times_T T \rightarrow \mathcal{C}_1 \times_T \dots \times_T \mathcal{C}_l$$

は $s_1^{(i_1)}, \dots, s_l^{(i_l)}$ の積である。

(ii) T から $Cr(V)_{d+2^{l-1}(d_1+d_2)}$ への morphism と して,

$$\begin{aligned} f \circ e + \sum_{i_1+\dots+i_l=0} p_{V=0} H \circ (s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_l^{(i_l)}) \\ + \sum_{i_1+\dots+i_l=1} p_{V=0} H \circ (s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_l^{(i_l)}) = \end{aligned}$$

= 0

$$= g \circ e + \sum_{i_1 + \dots + i_\ell = 1} \cdot pr_1 \circ Ho(s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_\ell^{(i_\ell)}) \\ + \sum_{i_1 + \dots + i_\ell = 0} pr_2 \circ Ho(s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_\ell^{(i_\ell)}),$$

ここで和 $\sum_{i_1 + \dots + i_\ell = 0}$ は、 $i_1, \dots, i_\ell = 0$ or 1 で、 $i_1 + \dots + i_\ell \equiv 0 \pmod{2}$ となる組全部に渡る。 $\sum_{i_1 + \dots + i_\ell = 1}$ も同様である (ii) により morphism $Ho(s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_\ell^{(i_\ell)}): T \rightarrow C_v(V)_{d_1} \times C_v(V)_{d_2}$ は定義できる。

証明の基本的 idea は、(2.1), (2.2) と同じであるが、記号が煩雑になることを別にして次の様な理由で、技術的に難しくなる。

(i) ℓ -cubic equivalence の定義も (2.1) の証明のようになら、写像の形にいい直るのであるが、§3 で注意したように $Z(a_1, \dots, a_\ell)$ が全ての $(a_1, \dots, a_\ell)$ で定義できないので、有理写像を扱かわなくてはならず、有理写像のつくる scheme を考えなくてはならない。

(ii) 有理同値の場合、cycle の parameter space は $\mathbb{P}^1$ だったが、今の場合、curve (の種) であり、moduli もつので、parameter space も“重く”。これに応じて、有理写像のつくる scheme は、“curve の moduli (又は family)” 上の有理写像の族のつくる scheme にする必要がある。

21

(iii) $\mathbb{P}^1$ との (相異なる) 2 点は等値性により 0 と ∞ に標準化できるが genus ≥ 1 の curve では 4 点でない限り curve 上の全ての点を尊重する必要がある。従って curve の積上の 2^l 個の点と, curve の種から Chow scheme への有理写像の系且で, その 2^l 個の点で有理写像が定義されているものを 考える scheme と考えなくてはならない。

以上のことも考慮すれば (2.1), (2.2) と "parallel" に証明できる。詳細は [H] をみて下さい。

さて (4.2) から (2.3) の類似が導かれる。

定理 (4.3). $\kappa: S \rightarrow \text{CH}_r(V)$ を正則写像とし, $\text{Im } \kappa \subset F^l(\text{CH}_r(V))$ とする。 $0 \leq l' < l$ に対して,

$$0 = \kappa^\# : H^{r+l', r}(V) \longrightarrow H^{l', 0}(S)$$

これは l' 次関数の l 階階差が 0 であることに対応する。

証明は、先の次の主張に帰着される:

"(4.2) の記号と仮定の下で, $l' < l$ ならば"

$$f^\# = g^\# : H^{r+l', r}(V) \longrightarrow H^{l', 0}(S). "$$

[H] では, (4.2) において, $\mathcal{E}_i$ を abel 多様体の族に置き換えたものが成り立つことにより解析的な方法でこれを示したが, 次のように代数的にも示せる。(4.2) を使い

(2.3) でしたおりに次に帰着される。

補題 S は非特異多様体, $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_\ell$ は S 上の曲線系族, $s_i^{(0)}, s_i^{(1)} : S \rightarrow \mathcal{C}_i \in \mathcal{C}_i/S$ の section とする, $i=1, \dots, \ell$.

$i_1, \dots, i_\ell = 0 \sim 1$ に対応して $s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_\ell^{(i_\ell)} : S \rightarrow \mathcal{C}_1 \times_S \dots \times_S \mathcal{C}_\ell$ による引き戻し $(s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_\ell^{(i_\ell)})^* : H^0(\mathcal{C}_1 \times_S \dots \times_S \mathcal{C}_\ell, \Omega^{\ell'}) \rightarrow H^0(S, \Omega^{\ell'})$ とする。 $\ell' < \ell$ ならば

$$0 = \sum_{i_1, i_\ell = 0, 1} (-1)^{i_1 + \dots + i_\ell} (s_1^{(i_1)} \times \dots \times s_\ell^{(i_\ell)})^* : H^0(\mathcal{C}_1 \times_S \dots \times_S \mathcal{C}_\ell, \Omega^{\ell'}) \rightarrow H^0(S, \Omega^{\ell'}).$$

補題の証明の爲、一般論を思い出そう: $f : X \rightarrow S$ は非特異多様体の間の smooth morphism とする。完全系列

$$0 \rightarrow f^* \Omega_S^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0$$

がある。これから、

$$F^p \Omega_X^{\ell'} = \text{Im} (\Omega_X^{\ell'-p} \otimes f^* \Omega_S^p \rightarrow \Omega_X^{\ell'})$$

により $\Omega_X^{\ell'}$ に filtration

$$\Omega_X^{\ell'} = F^0 \Omega_X^{\ell'} > F^1 \Omega_X^{\ell'} > \dots > F^p \Omega_X^{\ell'} > F^{p+1} \Omega_X^{\ell'} > \dots$$

を代入, $\text{Gr}_F^p \Omega_X^{\ell'} = F^p \Omega_X^{\ell'} / F^{p+1} \Omega_X^{\ell'} \simeq \Omega_{X/S}^{\ell'-p} \otimes f^* \Omega_S^p$. 4.12 次の spectral sequence がある:

$$(E_f) \quad E_1^{p,q} = R^{p+q} f_* \text{Gr}_F^p \Omega_X^{\ell'} \Rightarrow R^{p+q} f_* \Omega_X^{\ell'}.$$

Y は非特異多様体, $g : Y \rightarrow S$ は smooth morphism ならば同様により, g により $\Omega_Y^{\ell'}$ に filtration $\{F^p \Omega_Y^{\ell'}\}$ を代入し, $\text{Gr}_F^p \Omega_Y^{\ell'} = \Omega_{Y/S}^{\ell'-p} \otimes g^* \Omega_S^p$.

25

Y 上 spectral seq. (E_g) $E_1^{p,q} = R^{p+q}g_* Gr_F^p \Omega_Y^{q,1} \Rightarrow R^{p+q}g_* \Omega_Y^{q,1}$ を得る.

$h: Y \rightarrow X$ が S -morphism ならば $h^*: h^* \Omega_X^{q,1} \rightarrow \Omega_Y^{q,1}$ により $h^* \Omega_X^{q,1}$ は $h^* \Omega_Y^{q,1}$ に写るから $h^*: h^* Gr_F^p \Omega_X^{q,1} \rightarrow Gr_F^p \Omega_Y^{q,1}$ が定義できる。更に $h^*: H^n(X, \Omega_X^{q,1}) \rightarrow H^n(Y, \Omega_Y^{q,1})$ を S について localize することにより

$h^*: R^n f_* \Omega_X^{q,1} \rightarrow R^n g_* \Omega_Y^{q,1}$ が得られ, spectral seq (E_g) 及び

(E_g) 上の (spectral seq として) morphism が得られる。Y の E₁-term は

$h^*: h^* Gr_F^p \Omega_X^{q,1} \rightarrow Gr_F^p \Omega_Y^{q,1}$ から導かれる。これを先づ次の状況

に適用する。 $g: Y \rightarrow S$ を smooth morphism, $e \in S$ の曲線族

とし, $X = Y \times_S e$, $f: X \rightarrow e$ とする。

$$\begin{array}{ccc} X = Y \times_S e & \xrightarrow{g'} & e \\ \pi' \downarrow & \searrow f & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

従って 2つの spectral seq

$$(1) \quad R^{p+q} f_* Gr_F^p \Omega_X^{q,1} \Rightarrow R^{p+q} f_* \Omega_X^{q,1}$$

$$(2) \quad R^{p+q} g_* Gr_F^p \Omega_Y^{q,1} \Rightarrow R^{p+q} g_* \Omega_Y^{q,1}$$

が得られる。 e/S 上の 2つの section $s_i: S \rightarrow e$ ($i=1,2$) を取るとしよう。

各 $s_i: S \rightarrow e$ は, S -morphism

$$\bar{s}_i = \text{id}_Y \times_S s_i: Y = Y \times_S S \rightarrow Y \times_S e = X$$

を引き起し, $\bar{s}_i$ は spectral seq. (1) から (2) への morphism $\bar{s}_i^*$ を導く。

その時 $\Delta = \bar{s}_1^* - \bar{s}_2^*$ は (1) から (2) への morphism τ である。

$FP^{p+q} f_* \Omega_X^{q,1}$, $FP^{p+q} g_* \Omega_Y^{q,1}$ は (1), (2) の abutment の filtration とする。

Claim $\Delta (FP^{p+q} f_* \Omega_X^{q,1}) \subset FP^{p+q} R^n g_* \Omega_Y^{q,1}$.

Δ は E₁-term と zero τ であることとを示す, 与えられる。E₀-term

でも そうでもない claim が 得られる。

$$R^u f_* G_{VF}^p \Omega_X^{\ell^1} = (R^u f_* \Omega_{X/S}^{\ell^1-p}) \otimes \Omega_S^p, \quad R^u g_* G_{VF}^p \Omega_Y^{\ell^1} = (R^u g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1-p}) \otimes \Omega_S^p \quad \text{である}$$

$$\begin{aligned} \Delta: R^u f_* G_{VF}^p \Omega_X^{\ell^1} &\longrightarrow R^u g_* G_{VF}^p \Omega_Y^{\ell^1} \\ \parallel &\quad \parallel \\ R^u f_* \Omega_{X/S}^{\ell^1-p} \otimes \Omega_S^p &\xrightarrow{\Delta' \otimes \text{id}} R^u g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1-p} \otimes \Omega_S^p \end{aligned}$$

ここで, $\Delta': R^u f_* \Omega_{X/S}^{\ell^1-p} \longrightarrow R^u g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1-p}$ は $\bar{\gamma}_i: Y \rightarrow X$ から引き起こす $\bar{\gamma}_i^*$ の差である。従って $\Delta' = 0$ を示せばいい。 ℓ^1-p を改めて ℓ^1 と書く。 $\Omega_{X/S}^{\ell^1} = \Omega_{Y/S}^{\ell^1} \otimes \mathcal{O}_e \oplus \Omega_{Y/S}^{\ell^1-1} \otimes \Omega_{e/S}^1$ と Kummer formula より

$$R^u f_* \Omega_{X/S}^{\ell^1} = \bigoplus_{n_1+n_2=n} (R^{n_1} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1} \otimes R^{n_2} \pi_* \mathcal{O}_e \oplus R^{n_1} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1-1} \otimes R^{n_2} \pi_* \Omega_{e/S}^1)$$

である。 $R^{n_1} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1} \otimes R^{n_2} \pi_* \mathcal{O}_e$ 上, $\bar{\gamma}_i^*: R^u f_* \Omega_{X/S}^{\ell^1} \longrightarrow R^u g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1}$ は

$$R^{n_1} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1} \otimes R^{n_2} \pi_* \mathcal{O}_e \xrightarrow{\text{id} \otimes \bar{\gamma}_i^*} R^{n_1} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1} \otimes R^{n_2} (\text{id}_S)_* \mathcal{O}_S \longrightarrow R^{n_1+n_2} (g_S \times \text{id}_S)_* (\Omega_{Y/S}^{\ell^1} \otimes \mathcal{O}_S) = R^{n_1+n_2} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1}$$

故に $n_2 > 0$ ならば零, $n_2 = 0$ ならば $\pi_* \mathcal{O}_e = \mathcal{O}_S$ から恒等写像, 従って,

$\Delta' = 0$. $R^{n_1} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1-1} \otimes R^{n_2} \pi_* \Omega_{e/S}^1$ 上, $\bar{\gamma}_i^*: R^u f_* \Omega_{X/S}^{\ell^1} \longrightarrow R^u g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1}$ は

$$\begin{aligned} R^{n_1} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1-1} \otimes R^{n_2} \pi_* \Omega_{e/S}^1 &\xrightarrow{\text{id} \otimes \bar{\gamma}_i^*} R^{n_1} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1-1} \otimes R^{n_2} (\text{id}_S)_* \Omega_{e/S}^1 \longrightarrow \\ &\longrightarrow R^{n_1+n_2} (g_S \times \text{id}_S)_* (\Omega_{Y/S}^{\ell^1-1} \otimes \Omega_{e/S}^1) \xrightarrow{\text{id} \otimes g^*} R^{n_1+n_2} g_* (\Omega_{Y/S}^{\ell^1-1} \otimes \Omega_{Y/S}^1) \xrightarrow{\wedge} R^{n_1+n_2} g_* \Omega_{Y/S}^{\ell^1} \end{aligned}$$

で, $\Omega_{e/S}^1 = 0$ 故に $\bar{\gamma}_i^* = 0$, $\therefore \Delta' = 0$ である。 (claim は示された。

以上の準備の下で 補題を証明しよう。

$X_0 = S$, $X_i = X_{i-1} \times_{\mathbb{A}^1} \mathbb{A}^1$, $f_0 = \text{id}_S$, $f_i: X_i \longrightarrow S$ ($i=1, \dots, \ell$) とする

$$\begin{array}{ccc} X_i = X_{i-1} \times_{\mathbb{A}^1} \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ \downarrow & \searrow f_i & \downarrow \\ X_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & S \end{array}$$

$\ell' < \ell$ の時, 引き戻し $(s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)})^* : f_{\ell*}(\Omega_{X_\ell}^{\ell'}) \rightarrow \Omega_S^{\ell'}$ による

$$0 = \sum_{i_1, \dots, i_\ell=0,1} (-1)^{i_1+\dots+i_\ell} (s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)})^* : f_{\ell*}(\Omega_{X_\ell}^{\ell'}) \rightarrow \Omega_S^{\ell'}$$

を示せば十分である。 $i=1, \dots, \ell, j=0, 1$ に対し,

$$\bar{s}_i^{(j)} = \text{id} \times s_i^{(j)} : X_{i-1} = X_{i-1} \times_S S \rightarrow X_{i-1} \times_S \mathbb{C} = X_i$$

は, $\bar{s}_i^{(j)*} : f_{i*}(\Omega_{X_i}^{\ell'}) \rightarrow f_{i-1*}(\Omega_{X_{i-1}}^{\ell'})$ を定める。

$$\Delta_i = \bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}_i^{(1)} : f_{i*}(\Omega_{X_i}^{\ell'}) \rightarrow f_{i-1*}(\Omega_{X_{i-1}}^{\ell'})$$

と置く。

$$\Delta_1 \circ \cdots \circ \Delta_\ell = \sum_{i_1, \dots, i_\ell=0,1} (-1)^{i_1+\dots+i_\ell} (s_1^{(i_1)} \times \cdots \times s_\ell^{(i_\ell)})^* : f_{\ell*}(\Omega_{X_\ell}^{\ell'}) \rightarrow \Omega_S^{\ell'}$$

である。 $\text{Fp } f_{i*} \Omega_{X_i}^{\ell'}$ と f_i に付する spectral seq. (E_{f_i}) によって決まる $f_{i*} \Omega_{X_i}^{\ell'}$

上の filtration とする。Claim とする $X = X_{i-1}, \mathbb{C} = \mathbb{C}_i, s_j = s_i^{(j)}$ に適用して。

$$\Delta_i(\text{Fp } f_{i*} \Omega_{X_i}^{\ell'}) \subset \text{Fp}^{p+1} f_{i-1*} \Omega_{X_{i-1}}^{\ell'} \quad (i \geq 1).$$

$f_* \Omega_{X_\ell}^{\ell'} = \text{Fp}^0 f_* \Omega_{X_\ell}^{\ell'}$ 故に, 帰納的に

$$\Delta_1 \circ \cdots \circ \Delta_\ell (f_{\ell*} \Omega_{X_\ell}^{\ell'}) \subset \text{Fp}^\ell f_{0*} \Omega_{X_0}^{\ell'} = \text{Fp}^\ell \Omega_S^{\ell'}.$$

$\ell' < \ell$ の時 $\text{Fp}^\ell \Omega_S^{\ell'} = \text{Im}(\Omega_S^{\ell'-\ell} \otimes \Omega_S^\ell \rightarrow \Omega_S^{\ell'}) = 0$, 補題は示された。

(4.3) で $\ell = \ell'$ の時には, $\kappa^\# = 0$ とは限らない。

反例 $V = C_1 \times \cdots \times C_\ell$ を曲線の積とする。各 i について

$a_i \in C_i$ とする。 $S = V \subset \mathbb{C}^2$ $\kappa : S \rightarrow (H_0(V))$ と

$$\kappa(x_1, \dots, x_\ell) = ((x_1) - (a_1)) \times \cdots \times ((x_\ell) - (a_\ell))$$

で定義すると $\kappa^\# : H^{\ell',0}(V) \rightarrow H^{\ell',0}(S)$ は $\ell' < \ell$ ならば

25

で あるが $\ell = \ell'$ ならば "恒等写像" である。従って $H^0(H_0(V)) \neq 0$ 。

$S = V$ を abel 曲面とする。 $0 \neq a \in V$ に対して, $\kappa: S \rightarrow (H_0(V))$ を

$$\kappa(x) = (x+a) - (x)$$

で 定義する。 $\kappa^#: H^{\ell,0}(V) \rightarrow H^{\ell,0}(S)$ は $\ell' = 0, 1, 2$ に対して "零" であるが, $\text{Im } \kappa \not\subset H^2(H_0(V))$, 従って (4.3) の逆は云えない (cf. [Se]).

$\kappa^# = 0$, $\ell' = 0, 1, 2$ は "逆" の仮定より強いことに注意。

$\Omega^p(V)$ を V の余次元 p の cycle の fundamental class 全体で生成された $H^{p,p}(V)$ の部分空間とする。 $H^{0,1}(V)$ の元の i 個の積で生成された $H^{0,i}(V)$ の部分空間を $(H^{0,1}(V))^{\cdot i}$ と書く。

$p \leq q$ に対し $u(x)$ ($u \in \Omega^{p, \dim W}(W \times V)$, $x \in (H^{0,1}(W))^{\cdot (q-p)}$, W は 3F 特異射影的) の形の元で (右) 生成された $H^{p,q}(V)$ の部分空間を $\#H^{p,q}(V)$ とする。 $p > q$ の時は $\#H^{p,q}(V) = 0$ とする。 $\#H^{\cdot,\cdot}(V) = \bigoplus_{p,q} \#H^{p,q}(V) \subset H^{\cdot,\cdot}(V)$ とおく。

$\#H^{\cdot,\cdot}(V)$ は $H^{\cdot,\cdot}(V)$ の部分環で, morphism $f: V \rightarrow W$ に対し $f^*: H^{\cdot,\cdot}(W) \rightarrow H^{\cdot,\cdot}(V)$ は (環準同型) $f^*: \#H^{\cdot,\cdot}(W) \rightarrow \#H^{\cdot,\cdot}(V)$ を引き起こし, $f_*: H^{p,q}(V) \rightarrow H^{p-d, q-d}(W)$ ($d = \dim V - \dim W$) は $f_*: \#H^{p,q}(V) \rightarrow \#H^{p-d, q-d}(W)$ を定義する。 Rough に云えば, $\#H^{\cdot,\cdot}(?)$ は $\Omega^{\cdot,\cdot}(?)$ と $H^{0,1}(?)$ で生成される。

27

命題 $\dim \#H^{0,2}(V)$ は V の文又有理不変量である。

例 (i) $\#H^{0,1}(V) = H^{0,1}(V)$, $\#H^{p,p}(V) = \mathcal{O}^p(V)$ である。

(ii) $\#H^{p-1,p}(V)$ は V の p th intermediate Jacobian の代数的部分の接空間と同一視される。

(iii) 一般に $\#H^{p,q}(V)$ の計算は難しい。 V が abel 多様体, 又は curve の種ならば

$$\#H^{p,q}(V) \neq 0, \quad 0 \leq p \leq q \leq \dim V.$$

W が abel 多様体 V に伴う Kummer 多様体 とすれば

$$\#H^{p,q}(W) \neq 0, \quad 0 \leq p \leq q \leq \dim W, \quad p+q \equiv 0 \pmod{2}$$

である。

との反例と (4.3) から

定理 (4.4) $\#H^{p-2,p}(V) \neq 0$ ならば $gr^l CH^p(V) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$ 。

例 V が abel 多様体ならば $gr^l CH^p(V) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$, $0 \leq l \leq p \leq \dim V$

である。 W が V に伴う Kummer 多様体ならば

$$gr^l CH^p(W) \otimes \mathbb{Q} \neq 0, \quad l \equiv 0 \pmod{2}, \quad 0 \leq l \leq p \leq \dim W.$$

である。

REFERENCES.

- [B] Bloch, S.: Some elementary theorems about algebraic cycles on abelian varieties, *Invent. Math.* 37 (1975), p. 215.
- [M] Mumford, D.: Rational equivalence of 0-cycles on surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* 9 (1969), p. 195.
- [R1] Rostman, A.A.: T -equivalence of zero-dimensional cycles, *Mat. Sb. Tom 86(128) (1971) = Math. USSR Sb.* 15 (1971), p. 555.
- [R2] ——— : Rational equivalence of zero-cycles, *Mat. Sb. Tom 86 (131) (1972) = Math. USSR, Sb.* 18 (1972), p. 571.
- [Sa] Samuel, P.: Relations d'équivalence en géométrie algébrique, *Proc. Int. Congress Math.* 1958.
- [Se] Severi, F.: Ulteriori sviluppi della teoria delle serie di equivalenza sulle superficie algebriche, *Comm. Pont. Acc. Sci.*, 0 in Geometria dei sistemi algebrici ..., III.
- [H] Saito, H.: The Hodge cohomology and cubic equivalences, preprint.