

Reesによる一般元の定義と基本定理

名大 理 渡辺純三 (Junzo Watanabe)

Reesの定義した一般元に関する1つの初等的な(また、最も基本的と思われる)結果を紹介する。

「加群の長さ=重複度」と言う直感に訴えるなら、この結果そのものは全く当然であり、一見、自明とも思えるのだが、証明は意外にも難しく、ある種の工夫が必要である。Rees自身、これは決して自明でないと言っていた。以下に述べる定理2の証明はReesのアイディアによるものだが相当の補足を加えてある。

以下、 $(R, \mathcal{M}, k)$ をネーター的局所環とする。 $\mathcal{M}$ の元 $m_1, m_2, \dots, m_t$ に対して、 t 個の独立変数 $X_1, \dots, X_t$ を導入し、 R の忠実平坦拡大 $R \rightarrow R_1 = R(X_1, \dots, X_t)$ を考える。即ち、 R_1 は多項式環 $R[X_1, \dots, X_t]$ の $\mathcal{M}R[X_1, \dots, X_t]$ での局所化である。

今、 $Y = X_1 m_1 + X_2 m_2 + \dots + X_t m_t$ とおく。このとき、任意の $y \in (m_1, \dots, m_t)$ (即ち、 $y = x_1 m_1 + \dots + x_t m_t, x_i \in R$) と任意の $\mathcal{M}$ -準素イデアル $\mathcal{Q}$ に対して、次の不等号が成立する。(定理1. ℓ は長さを表わす。)

定理 1.
$$\ell(R/\mathcal{Q} + yR) \geq \ell_{R_1}(R/\mathcal{Q}R_1 + YR_1).$$

証明. R をアルチン環とし、 $\mathcal{Q} = 0$ として十分である。更に、 $R(X_1, \dots, X_t) = R(X_1, \dots, X_{t-1})(X_t)$ だから、 t に関する帰納法を使えば、次の補題に帰着する。

補題. $(R, \mathcal{M}, k)$ をアルチン環とし、 $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ とする。 X を1つの変数とすれば、任意の $x \in R$ について、

$$\ell_R(R/xm_1 + m_2) \geq \ell_{R_1}(R/(xm_1 + m_2)).$$

証明.

$$A = R[X]/(xm_1 + m_2)R[X]$$

$$B = R(X)/(xm_1 + m_2)R(X)$$

$\varphi: A \rightarrow B$ を自然な写像とする。

今、 $B = J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n$ を B の組成列とし、 $\varphi^{-1}(J_i) = I_i$ とすれば、 A のイデアル列、

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \text{ を得る。}$$

$X - x$ は B で単元だから、 $I_i : (X - x) = I_i$, $\forall i$ である。従って、 $A \rightarrow A \otimes_{R[X]} R[X]/(X - x)$

$(X - x) \simeq R$ による I_i の自然な像を $\bar{I}_i$ とすれば、 R のイデアル列 $\bar{I}_0 \supset \bar{I}_1 \supset \bar{I}_2 \supset \cdots$

$\supset \bar{I}_n$ を得る。

これで、目標の不等号が示された。

注意. 簡単にわかる事だが、定理1で言う $\ell_R(R/\mathcal{O}R_1 + YR_1)$ は $m_1, \dots, m_t$ が生成する

イデアルにのみ依存し、生成系の取り方にはよらない。

定義. $\mathcal{M} = (m_1, \dots, m_t)$, $Y = X_{m_1} + \cdots + X_{m_t}$ とする。 $\mathcal{O}$ を R の $\mathcal{M}$ -準素イデアルと

するとき、 $y \in \mathcal{M}$ が $\mathcal{O}$ に対する一般元であるとは、

$$\ell_R(R/\mathcal{O} + yR) = \ell_R(R/\mathcal{O}R_1 + YR_1)$$

とする事を言う。

定理2. $k = R/\mathcal{M}$ が無限体であれば、任意の $\mathcal{M}$ -準素イデアル $\mathcal{U}$ につき、 $\mathcal{U}$ に対する一般元は稠密に存在する。従って有限個の $\mathcal{M}$ -準素イデアルに対して、共通の一般元が取れる。

証明. 前と同様、 R をアルチン環とし、 $\mathcal{U} = 0$ としてよい。 $\mathcal{M} = (m_1, \dots, m_t)$ として、 $S = R[X_1, X_2, \dots, X_t]$ とおく。今、 S のイデアル列、

$$S = I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n = (Y) \text{ で、}$$

$$I_i/I_{i+1} \cong S/P_i, P_i \in \text{Spec } S$$

となるものを1つ固定する。 S の素イデアルは $\mathcal{M}S$ を含むから

$$S/P_i \cong \frac{k[X_1, \dots, X_t]}{\mathfrak{p}_i}, \quad \mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(k[X_1, \dots, X_t])$$

である。

さて、上のイデアル列を局所化することで、 R_1 と YR_1 の間のイデアル列を得るわけだが、

$$S/P_i \otimes_{S_1} R_1 \cong \begin{cases} k(X_1, \dots, X_t), & \mathfrak{p}_i = 0 \\ 0, & \mathfrak{p}_i \neq 0 \end{cases}$$

である。従って、

$$(1) \quad \ell_{R_1}(R_1/YR_1) = \#\{i \mid \mathfrak{p}_i = 0\}$$

となる。

次に $x_1, x_2, \dots, x_t \in R$ を任意に取り、 $M = (X_1 - x_1, \dots, X_t - x_t)S$ とし、特殊化 $\varphi: S \rightarrow S/M \simeq R$ を考える。

$$R = \varphi(I_0) \supset \varphi(I_1) \supset \dots \supset \varphi(I_n) = yR$$

だが、完全列

$$0 \rightarrow I_i/I_{i+1} \xrightarrow{f_i} S/I_{i+1} \rightarrow S/I_i \rightarrow 0$$

$$\parallel$$

$$S/P_i$$

より、

$$\varphi(I_i)/\varphi(I_{i+1}) \simeq \begin{cases} k, & S/P_i \otimes S/M \neq 0 \text{ かつ} \\ & f_i \otimes S/M \neq 0 \\ 0, & \text{上記以外の場合} \end{cases}$$

となる。従って

$$(2) \quad \ell_R(R/yR) = \# \left\{ i \left| \begin{array}{l} \text{イ. } \mathfrak{p}_i \subset (X_1 - \bar{x}_1, \dots, X_t - \bar{x}_t) \\ \text{ロ. } f_i \otimes S/M \neq 0 \end{array} \right. \right\}$$

がわかった。但し、 $\bar{x}_i$ は、 $x_i \in R$ の R/M における剰余類である。今、 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$ のうち、 $\mathfrak{p}_i \neq 0$ なるものの共通部分を $\mathfrak{c}$ とおく。即ち、 $\mathfrak{c} = \bigcap_{\mathfrak{p}_i \neq 0} \mathfrak{p}_i$ 。

$x_1, x_2, \dots, x_t \in R$ が、 $(X_1 - \bar{x}_1, \dots, X_t - \bar{x}_t) \nmid \mathfrak{c}$ を満たせば、(2)の右辺の条件 イ を

満たすイデアルは $ht = 0$ のものだけである。

よって、(1)の右辺は(2)の右辺を含む。即ち、

$$\ell_{R_1}(R_1/YR_1) \geq \ell_R(R/yR)$$

である。逆向きの不等号は定理1で示したから、結局、 $(X_1 - \bar{x}_1, \dots, X_t - \bar{x}_t)$ ~~は~~ である限り

$$y = x_{11}m_1 + \dots + x_{tt}m_t$$

が $\mathcal{O}$ に対する一般元である。

証明終り。

注意2. $\mathcal{M} = (m_1, m_2, \dots, m_t)$ のとき $Y = X_{11}m_1 + \dots + X_{tt}m_t$ は一般的1次形式とも言うべき

ものだろう。 $\mathcal{M}^n$ の生成系を $m_1, \dots, m_t$ とすれば、「一般的 n 次形式」が定義できる。

この様な形式を同時に考える場合は、無限個の独立変数 $X_1, X_2, \dots$ を導入して

$R_1 = R(X_1, X_2, \dots)$ の中で議論すればよい。(この R_1 もネ-タ-的である。)

Reesの元の定義はその様になっている。(D. Rees, General elements of ideals in local rings., 数理研講究録484, 1983.)