

He₃-He₄ 系の Phase-Separation

沢田 克郎 (東教大理)

(2月1日受理)

He₃-He₄ の混合は極低温でも ~7% の He₃ 迄は一様に溶けることが実験的に示されている。この様な Bose-Fermi の混合形の phase-separation の条件を mixed state の density fluctuation の不安定性という形でぎろんしてみよう。

Bose 系のハミルトニアンを H_B , Fermi 系を H_F として、相互作用としては普通の形

$$H_{FB} = \sum_q v_q \rho_q^B \rho_{-q}^F \quad (1)$$

をとる。但し、 v_q は He₃-He₄ 系の様に hard-core のある時には effective なポテンシャルと考えておこう。全然モデルとして v_q が特異でない様なものを考えた方がはつきりするが、頭の中には He₃-He₄ 系を入れておく事にする。

H_B だけを解くと周知のフォノンがあらわれ、又、 H_F だけを解くと、zero-sound や one-pair の励起が主なものとしてあらわれる。之等は何れも密度のゆらぎ ρ_q よりきているので、之等のもの (及び他にあればそれも含めて) を含めて、ハミルトニアンを次の形に書いてモデル化する。注)

$$H_F = \sum_{\mu, q} \omega_{\mu}^q a_{\mu}^{*q} a_{\mu}^q \quad (2)$$

$$H_B = \sum_{\lambda, q} W_{\lambda}^q b_{\lambda}^{*q} b_{\lambda}^q \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_q^B &= \sum_{\lambda} (B_{\lambda}^{*q} b_{\lambda}^{*q} + B_{\lambda}^q b_{\lambda}^{-q}) \\ \rho_q^F &= \sum_{\mu} (A_{\mu}^{*q} a_{\mu}^{*q} + A_{\mu}^{-q} a_{\mu}^{-q}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$H_{FB} = \sum_q v_q \sum_\lambda (B_\lambda^{*q} b_\lambda^{*q} + B_\lambda^{-q} b_\lambda^{-q}) \cdot \sum_\mu (A_\mu^{*-q} a_\mu^{*-q} + A_\mu^q a_\mu^q)$$

但し、 q は運動量、 μ, λ はフォノン、zero-sound... の異なる形の excitation を示し、 B, A は ρ の展開係数である。 $\rho_q = \rho_{-q}^*$ を考慮に入れてある。
中性の Fermi 及び Bose 系が夫々一様で isotropic な流体とすると、次の sum rule が成立つ。

$$\sum_n \frac{|\rho_q^*|_{n0}^2}{(E_n - E_0)} \Big|_{q \rightarrow 0} = \frac{N}{2ms^2} \quad (5)$$

但し s : 音速

之は compressibility sum rule と呼ばれるものである。後でこれを使う
 中で、Bose, Fermi 系について、夫々 ρ に(4)を代入して

$$\sum_\lambda \frac{|B_\lambda^q|^2}{\omega_\lambda^q} \Big|_{q \rightarrow 0} = \frac{N^B}{2m_B S_B^2} ; S_B^2 \doteq \frac{\alpha N^B}{m_B} \quad (6)$$

(α は pseudo-potential 又は t-matrix)

$$\sum_\mu \frac{|A_\mu^q|^2}{\omega_\mu^q} \Big|_{q \rightarrow 0} = \frac{N^F}{2m_F S_F^2} ; S_F^2 \doteq \left(\frac{p_F}{m_F}\right)^2 \times \frac{1}{3} \quad (7)$$

(p_F : フェルミ運動量、この S_F^2 は (1st sound) で weak-coupling の形)
 但し等方性より $\omega_\lambda^q = \omega_\lambda^{-q}$, $B_\lambda^q = B_\lambda^{-q}$, $\omega_\mu^q = \omega_\mu^{-q}$, $A_\mu^q = A_\mu^{-q}$ を使った。

道具は之位にして、Equation of motion を書いて、Bose-Fermi 系の
 場合で密度のゆらぎがフォノン・zero-sound・one-pair 等からどの様に変
 化するかをしらべて安定性をみてみよう。

$$\begin{aligned} -i \frac{d}{dt} a_\mu^{*q} &= \omega_\mu^q a_\mu^{*q} + v_q \sum_\lambda (B_\lambda^{*q} b_\lambda^{*q} + B_\lambda^{-q} b_\lambda^{-q}) \cdot A_\mu^q \\ -i \frac{d}{dt} a_\mu^{-q} &= -\omega_\mu^{-q} a_\mu^{-q} - v_q \sum_\lambda (B_\lambda^{*q} b_\lambda^{*q} + B_\lambda^{-q} b_\lambda^{-q}) \cdot A_\mu^{-q} \end{aligned}$$

故に、 $\omega_\mu^q = \omega_\mu^{-q}$ と $|A_\mu^q|^2 = |A_\mu^{-q}|^2$ を使つて

$$\left. \begin{aligned}
 -i \frac{d}{dt} (A_{\mu}^{q*} a_{\mu}^{q*} + A_{\mu}^{-q} a_{\mu}^{-q}) &= \omega_{\mu}^q (A_{\mu}^{q*} a_{\mu}^{q*} - A_{\mu}^{-q} a_{\mu}^{-q}) \\
 -i \frac{d}{dt} (A_{\mu}^{q*} a_{\mu}^{q*} - A_{\mu}^{-q} a_{\mu}^{-q}) &= \omega_{\mu}^q (A_{\mu}^{q*} a_{\mu}^{q*} + A_{\mu}^{-q} a_{\mu}^{-q})
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$+ 2v_q \sum_{\lambda} (B_{\lambda}^{q*} b_{\lambda}^{q*} + B_{\lambda}^{-q} b_{\lambda}^{-q}) \cdot |A_{\mu}^q|^2$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{従つて } A_{\mu}^{q*} a_{\mu}^{q*} + A_{\mu}^{-q} a_{\mu}^{-q} &= \rho_{\mu}^q : F \\
 B_{\lambda}^{q*} b_{\lambda}^{q*} + B_{\lambda}^{-q} b_{\lambda}^{-q} &= \rho_{\lambda}^q : B
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

とすると

$$-\frac{d^2}{dt^2} \rho_{\mu}^q : F - (\omega_{\mu}^q)^2 \rho_{\mu}^q : F = 2\omega_{\mu}^q v_q \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}^q : B |A_{\mu}^q|^2 \quad (10)$$

同様にして

$$-\frac{d^2}{dt^2} \rho_{\lambda}^q : B - (W_{\lambda}^q)^2 \rho_{\lambda}^q : B = 2W_{\lambda}^q v_q \sum_{\mu} \rho_{\mu}^q : F |B_{\lambda}^q|^2 \quad (11)$$

ここで $\rho \propto e^{i\omega t}$ とおいて

$$\left. \begin{aligned}
 (\omega^2 - (\omega_{\mu}^q)^2) \rho_{\mu}^q : F &= 2\omega_{\mu}^q |A_{\mu}^q|^2 v_q \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}^q : B \\
 (\omega^2 - (W_{\lambda}^q)^2) \rho_{\lambda}^q : B &= 2W_{\lambda}^q |B_{\lambda}^q|^2 v_q \sum_{\mu} \rho_{\mu}^q : F
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

之から ω^2 を決める式を作ると：

$$g(\omega^2) = 1 - v_q \sum_{\mu} \frac{2\omega_{\mu}^q |A_{\mu}^q|^2}{\omega^2 - (\omega_{\mu}^q)^2} \cdot v_q \sum_{\lambda} \frac{2W_{\lambda}^q |B_{\lambda}^q|^2}{\omega^2 - (W_{\lambda}^q)^2} = 0 \quad (13)$$

となる。之が $\omega^2 < 0$ の根をもてば不安定になるから、安定な所は $q \rightarrow 0$ のみに注目して

$$1 > g(\omega^2) \Big|_{\omega^2 < 0} > g(0)$$

を考えに入れると $g(0) > 0$ ならば $\omega^2 < 0$ の所には $g(\omega^2) = 0$ になる根はない故

$$1 > v_q \sum_{\mu} \frac{2|A_{\mu}^q|^2}{\omega_{\mu}^q} v_q \sum_{\lambda} \frac{2|B_{\lambda}^q|^2}{\omega_{\lambda}^q} \quad (\text{安定領域}) \quad (14)$$

ここに(6)(7)を入れると

$$1 > \frac{v_q N^F}{m_F s_F^2} \frac{v_q N^B}{m_B s_B^2} \quad (\text{安定領域}) \quad (15)$$

s_F^2, s_B^2 を入れると

$$(N^F/\Omega)^{1/3} < \frac{m_F m_B \left\{ \frac{s_F^2}{(N^F/\Omega)^{2/3}} \cdot \frac{s_B^2}{(N^B/\Omega)} \right\}}{(v_q \Omega)^2} \quad (16)$$

ならば Coupled density fluctuation は安定である。ここで()の中の量は密度に殆ど関係しないと考えられるから、右辺は密度について constant に近い。

(16) から言える事は、之を導くのに compressibility sum rule を使ったので、中性の Bose 系と Fermi 系が同一体積を 一様に 占めている時には、Fermi 系の密度は (16) 式を満たさねばならない。若し、Fermi 系の密度が (16) より上であると、(16) 式の密度のゆらぎが不安定になつて 一様に 同一体積を占められなくなる。

以上の考えを直接に $\text{He}_3\text{-He}_4$ 系にあてはめるのは危険かもしれないが、先づ、 He_3 の少量が He_4 に 一様に 溶けたとして、^{*}(2)(3)(4)のモデルの形に density oscillation がかけると仮定する。(この場合、 H_F, H_B の各々スペクトルには相手方の影響が中間状態にはいつてくる。) その上で、 He_3 の量をまじえてゆくと、(16) 式を満たさない密度になると phase-separation の様な事が起りそうだと言えよう。実験値を使えば $(v_q \Omega)$ が (16) からきめられよう。

(註)

Fermi 系の方のモデルハミルトニアンには、Wentzel(P.R. 108 1593 (57))の論文の形で、(正準変換をした後の) collective-oscillation (zero sound) と one-pair excitation も入っている。

* (前頁の脚注) He₃ の液滴を He₄ に入れると Normal な He₃ の密度では (16) が破れて、密度のゆらぎの成長により He₃ の密度が下つていつて (16) を満す所迄下り、これ以下にもなつて一樣になるとする。これ以下になる時の Mechanism はも早、密度のゆらぎは (16) より安定だから、density fluctuation の不安定性によるものではない。(Thermal agitation? 実験は 0°K ではなされていない!?)。