

超離散ソリトン方程式のパーマメント形式の解について

早稲田大学 (Waseda University) 高橋大輔 (Daisuke Takahashi)

広田良吾 (Ryogo Hirota)

1 ソリトン方程式の多ソリトン解

微分・差分のソリトン方程式では, 多ソリトン解と行列式・パフィアンの恒等式が密接な関係にある [1, 2]. たとえば微分ソリトン方程式の Kadomtsev–Petviashvili (KP) 方程式

$$(4u_t - 12uu_x - u_{xxx})_x - 3u_{yy} = 0 \quad (1)$$

では, $u = (\log f)_{xx}$ という変数変換を通じて双線形方程式

$$f \frac{1}{12} (f_{4x} - 4f_{xt} + 3f_{yy}) - f_x \frac{1}{3} (f_{3x} - f_t) + \frac{1}{2} (f_{xx} + f_y) \frac{1}{2} (f_{xx} - f_y) = 0 \quad (2)$$

が得られ, 解は

$$f = \begin{vmatrix} f_1 & f'_1 & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ f_2 & f'_2 & \cdots & f_2^{(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_N & f'_N & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \quad f_j = f_j(x, y, t), \quad \frac{\partial f_j}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f_j}{\partial t} = \frac{\partial^3 f_j}{\partial x^3} \quad (3)$$

という Wronski 行列式で与えられ, 多ソリトン解もこの中に含まれる.

また, たとえば差分 Korteweg–de Vries (KdV) 方程式

$$\frac{1}{u_{n+1}^{m+1}} - \frac{1}{u_n^m} = \delta(u_{n+1}^m - u_n^{m+1}) \quad (4)$$

では,

$$u_n^m = \frac{f_{n+1}^m f_n^{m+1}}{f_n^m f_{n+1}^{m+1}} \quad (5)$$

という変数変換を通じて双線形方程式

$$f_{n+1}^{m+1} f_n^{m-1} = (1 - \delta) f_{n+1}^m f_n^m + \delta f_{n+1}^{m-1} f_n^{m+1} \quad (6)$$

が得られ、多ソリトン解は

$$f_n^m = \begin{vmatrix} s_1(m, n) & s_1(m+2, n) & \cdots & s_1(m+2(N-1), n) \\ s_2(m, n) & s_2(m+2, n) & \cdots & s_2(m+2(N-1), n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_N(m, n) & s_N(m+2, n) & \cdots & s_N(m+2(N-1), n) \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$$s_i(m, n) = a_i k_i^m \omega_i^n + b_i k_i^{-m} \omega_i^{-n}, \quad \omega_i^2 = \frac{1 + \delta k_i^2}{\delta + k_i^2}$$

という Casorati 行列式で与えられる [3].

以上のような行列式表現が解になることの証明は、Plücker 関係式や Jacobi の恒等式など行列式の展開公式が重要となる。著名な例は上述の KP 方程式を頂点とする KP ヒエラルキーに含まれる一群のソリトン方程式であり、Plücker 関係式によって双線形方程式と解がセットで提示される。また、Pfaffian およびその恒等式が解および解の証明となる一群のソリトン方程式も存在する。

一方、このような形式の発見よりもずっと早くに、種々のソリトン方程式に対して半ば発見的に双線形方程式が与えられ、摂動形式の多ソリトン解というものが提示されていた [4, 5]. たとえば上述の差分 KdV 方程式の双線形方程式 (6) では

$$f_n^m = \sum_{\mu_i=0,1} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \mu_i \tilde{s}_i(m, n) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j a_{ij} \right), \quad (8)$$

$$\tilde{s}_i(m, n) = c_i k_i^{2m} \omega_i^{2n}, \quad \omega_i^2 = \frac{1 + \delta k_i^2}{\delta + k_i^2}, \quad a_{ij} = \left(\frac{k_i^2 - k_j^2}{1 - k_i^2 k_j^2} \right)^2$$

となる。(7) と (8) は直接的には等価ではない表現であるが、(5) の u_n^m に戻してみると等価であることが少し計算するとわかる。

2 超離散化

統計力学における低温極限の公式に類似した公式

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log(e^{A/\epsilon} + e^{B/\epsilon} + \cdots) = \max(A, B, \cdots) \quad (9)$$

を考える. A, B は ε によらない定数とする. この公式を利用すると, 以下のように x_n に関する四則演算で構成された差分方程式が X_n に関する区分線形型の差分方程式に変換される.

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \frac{1+x_n}{x_{n-1}} \\
 \downarrow \quad x_n &= e^{X_n/\varepsilon} \\
 X_{n+1} &= \varepsilon \log(1 + e^{X_n/\varepsilon}) - X_{n-1} \\
 \downarrow \quad \varepsilon &\rightarrow +0 \\
 X_{n+1} &= \max(0, X_n) - X_{n-1}
 \end{aligned} \tag{10}$$

このような方程式の変換を超離散化という [6]. なお, x_n, X_n のどちらも任意の初期値に対して周期 5 の周期解になる.

$$\begin{aligned}
 x_n &= a, b, \frac{1+b}{a}, \frac{1+a+b}{ab}, \frac{1+a}{b}, a, b, \dots, \\
 X_n &= A, B, \max(0, B) - A, \max(0, A, B) - A - B, \\
 &\quad \max(0, A) - B, A, B, \dots
 \end{aligned} \tag{11}$$

ところが超離散化には「負の問題」と呼ばれる問題がつきまとう. たとえば

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} - e^{B/\varepsilon}) \tag{12}$$

という極限を考えると, $A > B$ なら A になるが, $A = B$ のときは定義できず, $A < B$ のときは

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} - e^{B/\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (B + i(2k+1)\pi\varepsilon) = B \tag{13}$$

と考えるべきか否か微妙なところである. たとえば (10) を

$$x_{n+1} = \frac{-1+x_n}{x_{n-1}} \tag{14}$$

と変更し, (10) と同様の変換・極限をほどこし, 上に述べた極限を利用すると, 右辺が 0 にならない解については (10) と同じ周期 5 の X_n の差分方程式が得られる. しかしながら (14) の解のパターンは

$$\begin{aligned}
 x_n &= a, b, \frac{-1+b}{a}, \frac{-1-a+b}{ab}, \frac{-1-a+b-ab}{b(-1+b)}, \frac{a(1+a-2b+ab+b^2)}{(-1+b)(1+a-b)}, \\
 &\quad \frac{b(1+2a+a^2-2b-3ab+a^2b+b^2+ab^2)}{(-1-a+b)(1+a-b+ab)}, \dots
 \end{aligned} \tag{15}$$

となり、周期5の性質を持っていない。

このような事情に対し、超離散化を行うと極限によって情報が落ちるのでそれで構わないと考える立場もある。しかしその一方で、極限をとることによって方程式と解がつぶれ無意味なものになってしまう例もたくさんある。少し極端であるが、単振動の方程式の差分化

$$m \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{(\Delta t)^2} = -kx_n \quad (16)$$

を

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = -(\Delta t)^2 \frac{k}{m} x_n \quad (17)$$

と整理し、 $\Delta t \rightarrow 0$ として

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0 \quad (18)$$

を得るような場合、その極限はほとんど意味をなさない。ここまで単純ではないが、超離散化の負の問題も何を得たいかによって対処法が変わる微妙な問題である。

3 箱玉系

負の問題をうまく回避して(4)を超離散化すると箱玉系と呼ばれるセルオートマトンが得られる[7, 8]。(4)を適切な境界条件のもとで式変形すると

$$u_{n+1}^{m+1} = 1 / \left(\delta u_{n+1}^m + (1 - \delta) \prod_{k=-\infty}^n \frac{u_k^{m+1}}{u_k^m} \right) \quad (19)$$

となる。さらに

$$u_n^m = e^{U_n^m / \epsilon}, \quad \delta = e^{-1/\epsilon} \quad (20)$$

と変換して $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を取ると

$$U_{n+1}^{m+1} = \min \left(1 - U_{n+1}^m, \sum_{k=-\infty}^n (U_k^m - U_k^{m+1}) \right) \quad (21)$$

が得られる。この方程式は箱の容量が1の最も簡単な場合の箱玉系の時間発展ルールを表しており、 U_n^m は時刻 m で左から n 番目の箱に入っている玉の個数(0か1)である。以下に箱玉系の時間発展の例を図1に示す。この図は3ソリトン解を表している。

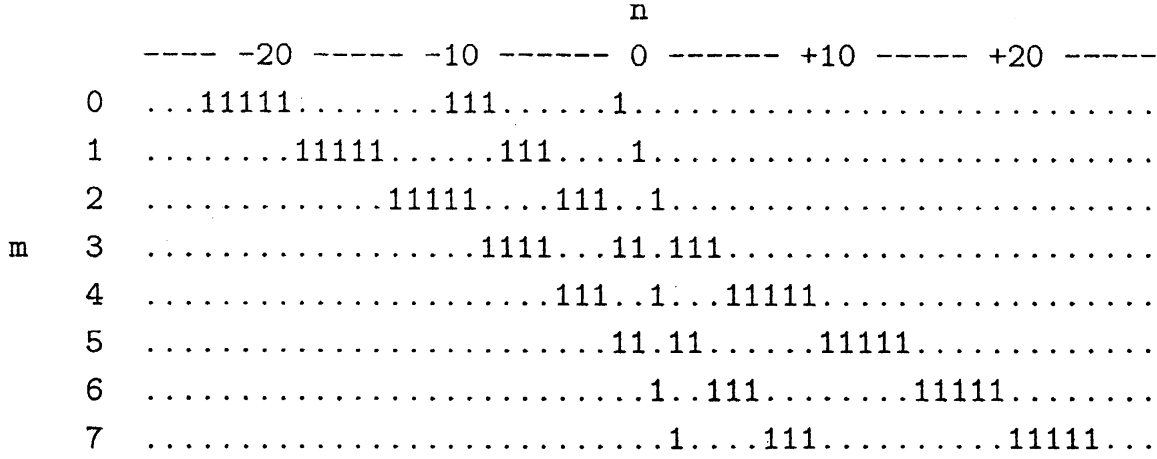


図 1: 箱玉系のソリトン解の例

(21) の双線形方程式は (6) の超離散化によって得られる.

$$f_n^m = e^{F_n^m/\varepsilon}, \quad \delta = e^{-1/\varepsilon} \quad (22)$$

とし, $\varepsilon \rightarrow +0$ とすると, (6) から

$$F_{n+1}^{m+1} + F_n^{m-1} = \max(F_{n+1}^m + F_n^m, F_{n+1}^{m-1} + F_n^{m+1} - 1) \quad (23)$$

となる. 以上をまとめると差分 KdV 方程式に関して以下のような図式が得られる.

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_{n+1}^{m+1} + F_n^{m-1} = \max(F_{n+1}^m + F_n^m, F_{n+1}^{m-1} + F_n^{m+1} - 1) & \text{(双線形形式)} \\ \downarrow U_n^m = F_{n+1}^m + F_n^{m+1} - F_n^m - F_{n+1}^{m+1} & \text{(変数変換)} \\ U_{n+1}^{m+1} = \min\left(1 - U_{n+1}^m, \sum_{k=-\infty}^n (U_k^m - U_k^{m+1})\right) & \text{(箱玉系)} \end{array} \right. \quad (24)$$

ソリトン解は差分 KdV 方程式の摂動形式解を超離散化したものが既に知られている. (8) のパラメータをそれぞれ

$$k_i^2 = e^{K_i/\varepsilon}, \quad \omega_i^2 = e^{\Omega_i/\varepsilon}, \quad c_i = e^{C_i/\varepsilon} \quad (25)$$

と変換し, $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとると次式となる.

$$\begin{aligned} F_n^m &= \max_{\mu_i=0,1} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \mu_i S_i(m, n) - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j A_{ij} \right), \\ S_i(m, n) &= K_i m - \Omega_i n + C_i, \\ \Omega_i &= \frac{1}{2}(|K_i + 1| - |K_i - 1|), \\ A_{ij} &= |K_i + K_j| - |K_i - K_j| \end{aligned} \quad (26)$$

図 1 の場合, $N = 3$, $(K_1, K_2, K_3, C_1, C_2, C_3) = (1, 3, 5, -1, -8, -15)$ で再現できる.

4 パーマネントの超離散化によるソリトン解

前節で摂動形式の超離散化を説明したが、ソリトン解のもうひとつの表現の行列式形式の超離散化は負の問題のために難しい。そこで、行列式の定義

$$\det[a_{ij}] = \sum_{\pi_i} \text{sign}(\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_N) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{N\pi_N} \quad (27)$$

から符号 sign を取り除いたパーマネント

$$\text{perm}[a_{ij}] = \sum_{\pi_i} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{N\pi_N} \quad (28)$$

を考える。成分 a_{ij} を $e^{A_{ij}/\varepsilon}$ と変換し、 $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限を取ると

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(\text{perm}[a_{ij}]) = \max_{\pi_i} (A_{1\pi_1} + A_{2\pi_2} + \cdots + A_{N\pi_N}) \equiv \max[A_{ij}] \quad (29)$$

となる。たとえば2次のパーマネントの超離散化は

$$\max[A_{ij}] = \max \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \max(A_{11} + A_{22}, A_{12} + A_{21}) \quad (30)$$

である。

箱玉系のソリトン解は

$$\tilde{F}_n^m = \frac{1}{2} \max \begin{bmatrix} |S_1(m, n)| & |S_1(m+2, n)| & \cdots & |S_1(m+2(N-1), n)| \\ |S_2(m, n)| & |S_2(m+2, n)| & \cdots & |S_2(m+2(N-1), n)| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ |S_N(m, n)| & |S_N(m+2, n)| & \cdots & |S_N(m+2(N-1), n)| \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$S_i(m, n) = K_i m - \Omega_i n + C_i,$$

$$\Omega_i = \frac{1}{2}(|K_i + 1| - |K_i - 1|) \quad (\text{摂動形式と同じ})$$

で与えられる。たとえば図 1 の解は $(K_1, K_2, K_3, C_1, C_2, C_3) = (1, 3, 5, -5, -18, -29)$ で再現される。以降では上の形式の解をパーマネント形式と呼ぶことにする。

ただし、解が解であることの証明は、本来ならばパーマネントに関する Plücker 関係式（に対応するもの）を用いてなされるべきであるが、それについては未だ不明である。したがって解の証明は別に与える必要がある。そこで、(31) が摂動形式の解 (26) と等価であることを示し、摂動形式の解の証明を行う。

5 摂動形式への変換

(31) と (26) の等価性は、次式の $\max$ に関する一般公式を通じて示すことができる。

$$\begin{aligned} & \max \begin{bmatrix} |x_1 + y_1| & |x_1 + 2y_1| & \cdots & |x_1 + Ny_1| \\ |x_2 + y_2| & |x_2 + 2y_2| & \cdots & |x_2 + Ny_2| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ |x_N + y_N| & |x_N + 2y_N| & \cdots & |x_N + Ny_N| \end{bmatrix} \\ &= \max_{\sigma_i = \pm 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i x_i + \sum_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{1 + \sigma_i}{2} i + \sigma_i \sum_{i \leq j \leq N} \frac{1 - \sigma_j}{2} \right) y_i \right), \end{aligned} \quad (32)$$

ただし $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_N$ とする。

まずこの公式を証明する。左辺に含まれる項 $|x_i + ky_i|$ は以下のように書き換えられる。

$$|x_i + ky_i| = \max(x_i + ky_i, -x_i - ky_i), \quad (33)$$

すると (32) の左辺は

$$\max_{\substack{\sigma_i = \pm 1 \\ \pi_i}} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i (x_i + \pi_i y_i) \right) = \max_{\sigma_i = \pm 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i x_i + \max_{\pi_i} \sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i \pi_i y_i \right). \quad (34)$$

となる。したがって

$$\max_{\pi_i} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i \pi_i y_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{1 + \sigma_i}{2} i + \sigma_i \sum_{i \leq j \leq N} \frac{1 - \sigma_j}{2} \right) y_i, \quad (35)$$

を証明できれば元の公式 (32) も証明できたことになる。そこで (35) を数学的帰納法によって証明する。まず $N = 1$ の場合、(35) の左右辺は以下のようになり $\sigma_1 = \pm 1$ なので等しい。

$$\sigma_1 y_1 = \left(\frac{1 + \sigma_1}{2} + \sigma_1 \frac{1 - \sigma_1}{2} \right) y_1 \quad (36)$$

次に (35) がある N で成立するとする。 $N + 1$ の場合の (35) の左辺

$$L = \max_{\pi_i} \left(\sum_{1 \leq i \leq N+1} \sigma_i \pi_i y_i \right). \quad (37)$$

について、 $\sigma_{N+1} = +1$ のとき $0 \leq y_k \leq y_{N+1}$ ($1 \leq k \leq N$) が仮定されているので次式を得る。

$$L = \max_{\pi_i} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i \pi_i y_i \right) + (N + 1) y_{N+1}, \quad (38)$$

$\sigma_{N+1} = -1$ のときは同様にして

$$L = \max_{\pi_i} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i (\pi_i + 1) y_i \right) - y_{N+1} = \max_{\pi_i} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i \pi_i y_i \right) + \sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i y_i - y_{N+1}. \quad (39)$$

を得る. これらをまとめると $\sigma_{N+1} = \pm 1$ に対して以下が成り立つ.

$$L = \max_{\pi_i} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i \pi_i y_i \right) + \frac{1 + \sigma_{N+1}}{2} (N + 1) y_{N+1} + \frac{1 - \sigma_{N+1}}{2} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i y_i - y_{N+1} \right). \quad (40)$$

帰納法の仮定を用いると

$$\begin{aligned} L &= \sum_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{1 + \sigma_i}{2} i + \sigma_i \sum_{i \leq j \leq N} \frac{1 - \sigma_j}{2} \right) y_i \\ &\quad + \frac{1 + \sigma_{N+1}}{2} (N + 1) y_{N+1} + \frac{1 - \sigma_{N+1}}{2} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i y_i - y_{N+1} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq N+1} \left(\frac{1 + \sigma_i}{2} i + \sigma_i \sum_{i \leq j \leq N+1} \frac{1 - \sigma_j}{2} \right) y_i. \end{aligned} \quad (41)$$

となり, これは $N + 1$ の場合の (35) の右辺に等しい. よって帰納法が成立し (35) そして (32) が成り立った.

次に, 一般性を失わずに $0 \leq K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_N$ を仮定してこの公式を (31) に適用すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n^m &= \frac{1}{2} \max_{\sigma_i = \pm 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i (S_i - 2K_i) + 2 \sum_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{1 + \sigma_i}{2} i + \sigma_i \sum_{i \leq j \leq N} \frac{1 - \sigma_j}{2} \right) K_i \right) \\ &\doteq \max_{\sigma_i = \pm 1} \sum_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{1 + \sigma_i}{2} S_i + \left(\frac{1 + \sigma_i}{2} i - \sigma_i + \sigma_i \sum_{i \leq j \leq N} \frac{1 - \sigma_j}{2} \right) K_i \right) \\ &= \max_{\mu_i = 0, 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \mu_i (S_i + (2N - i - 2)K_i + \sum_{1 \leq j \leq i} K_j) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j K_i \right) \end{aligned} \quad (42)$$

ここで $\doteq$ は $U_n^m = F_{n+1}^m + F_n^{m+1} - F_n^m - F_{n+1}^{m+1}$ に対して同じ結果を与えることを意味する. さらに上式の下線部より自由パラメータ C_i を改めて次式のように変更すると (26) と同じ式になり, 摂動形式の解 (26) とパーマメント形式の解 (31) が等価であることがわかる.

$$C_i + (2N - i - 2)K_i + \sum_{1 \leq j \leq i} K_j \rightarrow C_i \quad (43)$$

6 超離散方程式で閉じた解の証明

前節によりパーマネント形式と摂動形式の等価性が示されたので、解の証明はどちらかで行えばよい。そこで、摂動形式の解の証明を行う。なお、差分双線形方程式 (6) の摂動形式の差分解 (8) の証明は既知であるので、超離散化して得られた双線形方程式 (23) に対して (26) が解であることは、ほぼ自明である。しかしながら、解の証明は超離散側で閉じて行うことも可能であり、そういう成果の蓄積が超離散の提供する数理の発展につながるであろう。

証明の概略は以下の通りである。まず、記号の整理のため (23) の n を $1/2$ ずらした次式を考える。

$$\underbrace{F_{n+1/2}^{m+1} + F_{n-1/2}^{m-1}}_{(a)} = \max \left(\underbrace{F_{n+1/2}^m + F_{n-1/2}^m}_{(b)}, \underbrace{F_{n+1/2}^{m-1} + F_{n-1/2}^{m+1} - 1}_{(c)} \right) \quad (44)$$

項 (a)~(c) はどれも $F_{n+1/2}^{m+\alpha} + F_{n-1/2}^{m-\alpha}$ ((a) $\alpha = 1$, (b) $\alpha = 0$, (c) $\alpha = -1$) という形をしている。解 (26) を代入すると

$$\begin{aligned} F_{n+1/2}^{m+\alpha} + F_{n-1/2}^{m-\alpha} = \max_{\mu_i, \nu_i=0,1} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} ((\mu_i + \nu_i)S_i + (\mu_i - \nu_i)(\alpha K_i - \frac{1}{2}\Omega_i)) \right. \\ \left. - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\mu_i \mu_j + \nu_i \nu_j) K_j \right) \end{aligned} \quad (45)$$

となる。さらに (44) の左右辺を比較して、

$$g(1) = \max(g(0), g(-1) - 1) \quad (46)$$

が成立すれば (44) の等号が成り立つことがわかる。ただし、 $g(\alpha)$ は

$$g(\alpha) = \max_{\sigma_i=\pm 1} \left(\sum_{1 \leq i \leq N} \sigma_i (\alpha K_i - \frac{1}{2}\Omega_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j K_j \right) \quad (47)$$

である。一般性を失わずに $0 \leq K_N \leq K_{N-1} \leq \dots \leq K_1$ を仮定すると $g(0)$, $g(\pm 1)$ を具体的に計算でき、

$$\begin{cases} g(0) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq N} \left((-1)^{i-1} q_i + (1 + (-1)^i) p_i \right), \\ g(1) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq N} \left((-1)^i q_i + (1 - (-1)^i) p_i \right), \\ g(-1) = g(1) + q_1 \end{cases} \quad (48)$$

となる。これを用いれば (46) が成立することは容易に示せる。

7 慣れない演算

超離散方程式の演算は max-plus 代数が基礎にある. すなわち和を max, 積を +, 商を - とみなして演算を行えばよい. ところが, 何らかの等式を証明しようとすると, 微分演算や四則演算で培った蓄積が使えず苦勞することが多い. その原因は先述の負の問題に通じており, 和の逆演算が well-defined でないことにある. 通常の $\pm$ 演算との比較を以下に示す.

$$\begin{array}{ccc}
 a + b = c & & \max(A, B) = C \\
 \downarrow & \iff & \downarrow \\
 a = c - b & & A \begin{cases} = C & (B < C) \\ \leq B & (B = C) \\ \text{解なし} & (B > C) \end{cases}
 \end{array} \quad (49)$$

たとえば 1 ソリトン解

$$F_n^m = \frac{1}{2}|S(m, n)|, \quad S(m, n) = Km - \Omega n + C \quad (50)$$

を双線形方程式 (23) に代入し, 等号が成り立つように分散関係 (Ω と K の関係) を定めることを考える. 微分や差分のソリトン方程式では, 1 ソリトン解を方程式に代入すればたちどころに分散関係が定まる. そこで実際に上の解を代入してみると,

$$|S + K - \Omega| + |S - K| = \max(|S - \Omega| + |S|, |S - K - \Omega| + |S + K| - 2) \quad (51)$$

が得られる. 任意の S に対してこの等号が成り立つためには

$$|2K - \Omega| = \max(|\Omega|, |2K + \Omega| - 2) \quad (52)$$

が必要であり, これを解くと $K \neq 0$ で

$$\Omega = \frac{1}{2}(|K + 1| - |K - 1|) \quad (53)$$

が得られ, これが分散関係となる. 結果だけを書くと簡単に見えるが, 興味のある方は実際に上の導出を試みてみられたい. 式変形に相当の工夫が必要であることをおわかりいただけたらと思う.

8 超離散戸田方程式のパーマネント形式のソリトン解

超離散戸田方程式についてもパーマネント形式のソリトン解の予想を得ている。解の証明にはまだ成功していないが、簡単な場合に正しいことを確認している。

まず方程式および双線形方程式は L を定数として以下で与えられる [9].

$$\begin{aligned}
 U_n^{m+1} - 2U_n^m + U_n^{m-1} \\
 &= \max(0, U_{n+1}^m - L) - 2\max(0, U_n^m - L) + \max(0, U_{n-1}^m - L) \\
 \downarrow \quad U_n^m &= F_{n+1}^m - 2F_n^m + F_{n-1}^m \\
 F_n^{m+1} + F_n^{m-1} &= \max(2F_n^m, F_{n+1}^m + F_{n-1}^m - L)
 \end{aligned} \tag{54}$$

このときたとえば3ソリトン解は次式となる。

$$\begin{aligned}
 F_n^m &= \frac{1}{2} \max \begin{bmatrix} |S_1(n, m)|E_n E_m^{\sigma_1} & |S_1(n, m)|E_n E_m^{\sigma_1} & |S_1(n, m)|E_n E_m^{\sigma_1} \\ |S_2(n, m)|E_n E_m^{\sigma_2} & |S_2(n, m)|E_n E_m^{\sigma_2} & |S_2(n, m)|E_n E_m^{\sigma_2} \\ |S_3(n, m)|E_n E_m^{\sigma_3} & |S_3(n, m)|E_n E_m^{\sigma_3} & |S_3(n, m)|E_n E_m^{\sigma_3} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \max(|S_1(n, m)| + |S_2(n+1, m+\sigma_1)| + |S_3(n+2, m+\sigma_1+\sigma_2)|, \\
 &\quad |S_1(n, m)| + |S_3(n+1, m+\sigma_1)| + |S_2(n+2, m+\sigma_1+\sigma_3)|, \tag{55} \\
 &\quad |S_2(n, m)| + |S_1(n+1, m+\sigma_2)| + |S_3(n+2, m+\sigma_2+\sigma_1)|, \\
 &\quad |S_2(n, m)| + |S_3(n+1, m+\sigma_2)| + |S_1(n+2, m+\sigma_2+\sigma_3)|, \\
 &\quad |S_3(n, m)| + |S_1(n+1, m+\sigma_3)| + |S_2(n+2, m+\sigma_3+\sigma_1)|, \\
 &\quad |S_3(n, m)| + |S_2(n+1, m+\sigma_3)| + |S_1(n+2, m+\sigma_3+\sigma_2)|)
 \end{aligned}$$

ただし, E_n, E_m は

$$E_n = e^{\partial/\partial n}, \quad E_m = e^{\partial/\partial m} \tag{56}$$

で定義されるずらし演算子であり, S_i は

$$\begin{aligned}
 S_i(n, m) &= K_i n + \Omega_i m + C_i, \\
 \Omega_i &= \sigma_i (\max(0, K_i - L) - \max(0, -K_i - L)), \\
 \sigma_i &= +1 \text{ or } -1
 \end{aligned} \tag{57}$$

で与えられる。たとえば (55) の $\max[\]$ 中の対角成分は

$$|S_1(n, m)|E_n E_m^{\sigma_1} + |S_2(n, m)|E_n E_m^{\sigma_2} + |S_3(n, m)|E_n E_m^{\sigma_3} \tag{58}$$

であり, 3つの項の和の形をしている. このとき, ずらし演算子は後ろの項に作用し, 3つの項の順序は入れ替えないとすると, 上式は

$$|S_1(n, m)| + |S_2(n+1, m+\sigma_1)| + |S_3(n+2, m+\sigma_1+\sigma_2)| \quad (59)$$

となる. 他の項についても同様である. このようにずらし演算子の導入にともなって項の交換の禁止という条件が新たに必要となるが, 解になっていることは確認済みである.

参考文献

- [1] Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi and T. Tokihiro, “An Elementary Introduction to Sato Theory”, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.94 (1988) 210–241.
- [2] 広田良吾, “直接法によるソリトンの数理”, 岩波書店 (1992).
- [3] 中村佳正編, “可積分系の応用数理”, 裳華房 (2000).
- [4] アプロビッツ・シーガー著 (薩摩・及川訳), “ソリトンと逆散乱変換”, 日本評論社 (1991).
- [5] R. Hirota, “Nonlinear Partial Difference Equations. I. A Difference Analogue of the Korteweg-de Vries Equation”, J. Phys. Soc. Jpn. **43** (1977) 1424.
- [6] 広田良吾・高橋大輔, “差分と超離散”, 共立出版 (2003).
- [7] D. Takahashi and J. Satsuma, “A Soliton Cellular Automaton”, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514–3519.
- [8] S. Tsujimoto and R. Hirota, “Ultradiscrete KdV Equation”, J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998) 1809–1810.
- [9] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii, “Toda-type Cellular Automaton and its N-soliton solution”, Phys. Lett. A **225** (1997) 287–295.