

混合標数の2次元の特異点の例

東京農工大学 前田博信

はじめに2次元のエクセレントスキームの特異点を解消する広中の方法¹⁾を復習した後で具体的な例²⁾を述べます. これは p を素数としたとき, p 次のフェルマ曲線の素点 p における安定退化 (stable reduction) を求める時に現われた特異点です.

1. 特異点の性質

特異点の定義 スキーム X の点 x は局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ が正則局所環であるとき非特異点 (単純点) という. そうでないとき x は X の特異点 (重複点) であるという.

正則局所環の定義³⁾ 次の3つの条件をみたす環 R (環は常に単位元をもつ可換環のこととする) を正則局所環 (p -Reihenring) という.

- (1) R は約鎖律をみたす (つまりネータ環である).
- (2) R の非単元の全体 $\mathfrak{m}$ はイデアルをなす (これは唯一の極大イデアルになる).
- (3) $\mathfrak{m}$ の極小基底を1組選んで固定すると, R の各元の初項形式 (Anfangsform) が一意的に決まる. *)

初項形式の定義 (1) と (2) からクルルの共通部分定理 (Durchschnittssatz)

$$\bigcap_{\rho \geq 0} \mathfrak{m}^\rho = (0)$$

が成り立つ. $\mathfrak{m}$ の極小基底 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を1組固定する. R の0でない元 a に対して自然数

$$\nu(a) = \sup\{\rho; a \in \mathfrak{m}^\rho\}$$

¹⁾ H. Hironaka, Desingularization of excellent surfaces, Bowdoin Lecture 1967, in Lect. Notes. in Math., Vol. 1101 (1984), Springer-Verlag.

²⁾ H. Maeda, Auflösung der Flächensingularitäten und stabile Reduktion der Fermatkurve, J. of Number Theory, Vol. 65 (1997), 305-315.

³⁾ W. Krull, Dimensionstheorie in Stellenringen, J. für die reine u. angew. Math., Bd. 179 (1938), 204-226.

*) 英 initial form, 「初項形式」という用語は松村英之著「可換環論」による.

が決まる。このとき $\nu(a)$ 次の同次多項式 $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in R[x_1, \dots, x_n]$ が存在して

$$a \equiv \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \pmod{m^{\nu(a)+1}}$$

をみatus. $\nu(a)$ の定義により φ の係数がすべて m に含まれないように選べるので, φ の係数を m を法とする剰余類で置き換えた 0 でない同次式 $\bar{\varphi}(x_1, \dots, x_n)$ が得られる. $\bar{\varphi}$ は一意的とは限らないがこれを a の初項形式といい $\bar{a}$ と書く. とくに $\bar{\alpha}_i = x_i$ である. 0 の初項形式は 0 と定義する. しかし 0 でない ν 次同次式 $\varphi \in R[x_1, \dots, x_n]$ が存在して

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in m^{\nu+1}$$

となることもある. このとき $\bar{\varphi}(x_1, \dots, x_n)$ も 0 の初項形式とする. 上の (3) は 0 の初項形式が 0 しかないことと同値である.

例 $R = \mathbb{Q}[t]_{(t^2+1)}$ は 1 次元の正則局所環である. R の極大イデアルの生成元を α とし, $\bar{\alpha} = x$ とすると, 例えば $t + t^3 = \sqrt{-1} x$ となる.

注 R が (1) と (2) をみたす環のとき m の代わりに別の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対しても $\nu_{\mathfrak{p}}(a) = \sup\{\rho; a \in \mathfrak{p}^{\rho}\}$ が定義される. さらに R のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \min\{\nu_{\mathfrak{p}}(a); a \in \mathfrak{a}\}$ が定義される.

先導イデアルの定義 R が (1) と (2) をみたす環のとき R のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して

$$\bar{\mathfrak{a}} = \{\bar{a}; a \in \mathfrak{a}\}$$

は $R/m[x_1, \dots, x_n]$ の同次イデアルになる. $\bar{\mathfrak{a}}$ を $\mathfrak{a}$ の先導イデアル (Leit-ideal) という.

X は非特異スキーム Z の閉部分スキームで $x \in X$ とする. $R = \mathcal{O}_{Z,x}$ は正則局所環である. X の Z における定義イデアルを I とし, $\mathfrak{a} = I\mathcal{O}_{Z,x}$ とおくと, $\text{Proj}(R/m[x_1, \dots, x_n])$ 内の閉集合 $V_+(\bar{\mathfrak{a}})$ を X の x における接錐 (tangent cone) といい $C_x(X)$ とかく. 同次イデアルとしての $\bar{\mathfrak{a}}$ の極小基底を次数の順に並べたものを $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ とするとき, $\mathfrak{a}$ は $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ を初項形式とする R の元 $f_1, \dots, f_m$ により生成され, $(\deg \varphi_1, \dots, \deg \varphi_m)$ は $\mathfrak{a}$ のみで決まる⁴⁾ のでこれを $\nu^*(\mathfrak{a})$ 又は $\nu_x^*(V)$ と書く. ν^* は非常に良い不変量で, 正標数, 混合標数を問わず x を含む許容中心のブローアップで, 辞書式順序に関して単調非増加である.

⁴⁾ H. Hironaka, Resolution of singularities of algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math., Vol. 79 (1964), 109–326.

注 クルルが正則局所環を定義する以前は、特異点は局所環を用いなくて大域的に定義されていた。⁵⁾ ただし X が基礎体 K 上の射影空間 $Z = \mathbf{P}_K^n$ の既約で被約な閉部分集合という場合に限られていた。 X の Z における次数を d とし、 X の同伴形式 (zugeordnete Form, 英 Chow Form) を $F(u; u^{(1)}, \dots, u^{(d)})$ とする。 x を X の点とする。一般の超平面 $u^{(\nu)}$ を $v^{(\nu)}$ に特殊化して、 $v^{(\nu)}$ の共通部分が X とは x でのみ交わるようにすると、 x が X の m 重点ならば、 $F(u; v^{(1)}, \dots, v^{(d)})$ は対応する m 次の重複因子をもつ。なお、同伴形式は基礎多項式 (Grundpolynom) と同じものである。⁶⁾

例 K は標数 2 の不完全体で $a, b \in K \setminus K^2$ とする。 $Z = \mathbf{P}_K^3$ とし、 X は $p = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab}, 1) \in Z$ を生成点とする既約閉集合とする (今は $X = \{p\}$)。このとき X の基礎多項式は $Z_1^2 - (u_{11}^2 a + u_{12}^2 b + u_{13}^2 ab)$ となる。この Z_1 に $u_{11}X_1 + u_{12}X_2 + u_{13}X_3$ を代入して u_{ij} に関して整理したときの係数全体の生成するイデアル $(X_1^2 - a, X_2^2 - b, X_3^2 - ab)$ は X の定義イデアルとは一致しないが、その極小素因子 $(X_1^2 - a, X_2^2 - b, X_3 - X_1X_2)$ が X の定義イデアルになる。 p を 2 重点とする 2 次の超曲面 F で、 p を通る直線を 1 つも含まないものがある。⁷⁾ 点 x における接錐がこの F になるような (3 次元以上の) 代数的スキームは x を中心とするブローアップで、特異性が、 τ 不変量が減少するという意味で、悪くなる。これは正標数の特異点解消が難しい原因の 1 つである。

ここから X は局所ネータ的で被約なスキームとする。このとき、

$$\text{Sing}(X) = \{x \in X; x \text{ は } X \text{ の特異点}\}$$

とおき、 $\text{Reg}(X) = X \setminus \text{Sing}(X)$ とする。

基本問題 $\text{Sing}(X)$ を求めよ。

これは非常に難しい問題で、 $\text{Sing}(X)$ が閉集合にならない例⁸⁾もある。また X が具体的に与えられても $\text{Sing}(X)$ を具体的に計算することは難しい。

⁵⁾ B. L. van der Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Springer-Verlag (1939).

⁶⁾ W. Krull, Parameterspezialisierung in Polynomringen. Das Grundpolynom., Archiv d. Math., Bd.1 (1948), 129-137.

⁷⁾ H. Hironaka, Additive groups associated with points of a projective space, Ann. of Math., vol. 92 (1970), 327-334.

⁸⁾ M. Nagata, On the closedness of singular loci, Publications Math. IHES, t. 2 (1959), 29-36.

例 $Z = \text{Proj}(\mathbb{Z}[x, y, z])$, $X = V_+(x^5 + y^5 + z^5)$ とすると, $\text{Sing}(X)$ は $\mathbb{Z}[x, y, z]$ の次の4つの同次極大イデアルからなる. $\mathfrak{m}_1 = (5, x, y + z)$, $\mathfrak{m}_2 = (5, y, z + x)$, $\mathfrak{m}_3 = (5, z, x + y)$, $\mathfrak{m}_0 = (5, x + y + z, x^2 + xz + z^2)$. これらはすべて X の2重点である, すなわち $\nu_{\mathfrak{m}_i}(X) = 2$ となる.

例 p は奇素数とし, $R = \mathbb{Z}_p[[x]][y]/(y^2 + xy + p)$, $X = V(p)$ とおくと, R は正則局所環で $\text{Sing}(X) = \{\mathfrak{m}\}$ (R の極大イデアル) である.

特異点解消の定義 X は被約な局所ネータ的スキームとする. X の特異点解消とは, 非特異なスキーム Y から X への双有理で固有的な射 $Y \xrightarrow{\varphi} X$ であって $\varphi^{-1}(\text{Reg}(X)) \simeq \text{Reg}(X)$ をみたすものをいう.

注 一般の局所ネータ的スキームは, たとえ1次元であっても特異点解消ができるとは限らない. 1次元の局所ネータ的スキームはジャバニーズ⁹⁾ なら特異点解消が存在する. 体 K の上に有限生成なデデキント環 A は常にジャバニーズである¹⁰⁾ が, $X = \text{Spec}(A)$ の非特異モデルは必ずしも K 上なめらか (smooth) になるとは限らない. X のなめらかな非特異モデルが存在するための必要十分条件は, 文献¹⁰⁾ で与えられた正規基底 (Normalbasis, これは Gröbner 基底の一種で, 岩沢健吉著「代数関数論」では標準基底とよばれている) を用いて定義される X の種数が基礎体の拡大で不変になることである.¹¹⁾

注 一般に特異点解消のできるスキームでは $\text{Sing}(X)$ はいたるところ稠密でない閉集合の部分集合であるが, ジャバニーズであっても $\text{Sing}(X)$ が閉集合にならない例¹²⁾ がある. 強い意味で, すなわち強鎖状なスキーム X が, X だけでなく X 上有限な既約かつ被約な任意のスキームもすべて特異点解消できるためには, X はエクセレント (excellent) でなければならない.⁹⁾ そこで

エクセレントスキームの定義¹⁾ 次の条件 (1), (2), (3) をみたすスキーム X をエクセレントスキームという. $\text{Spec}(A)$ がエクセレントスキームのとき A をエクセレント環という.

⁹⁾ A. Grothendieck et J. Dieudonné, EGA IV, §7. Relations entre un anneaux local noethérien et son complété. Anneaux excellents.

¹⁰⁾ F. K. Schmidt, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen mit beliebigem Konstatntenkörper, Math. Z., Bd. 41 (1936), 415-438.

¹¹⁾ R. Mallol, Über die Existenz eines singularitätenfreien Modells einer algebraischen Kurve, Math. Ann., Bd. 140 (1960), 344-350.

¹²⁾ Ch. Rotthaus, Universell japanische Ringe mit nicht offenem regulärem Ort, Nagoya Math. J., Vol. 74 (1979), 123-135.

- (1) X はネータ的である.
- (2) $X' \rightarrow X$ が有限生成射であるとき $\text{Sing}(X')$ は閉集合である.
- (3) $X'' \rightarrow X' \rightarrow X$ が有限生成射の合成で, $x \in X'$ における $\mathcal{O}_{X',x}$ の m 進完備化を $\widehat{R}$ とするとき, 基底変換

$$h: \widetilde{X''} = \text{Spec} \widehat{R} \times_{X'} X'' \rightarrow X''$$

により特異点が保たれる, すなわち $h^{-1}(\text{Sing}(X'')) = \text{Sing}(\widetilde{X''})$ である.

ここでエクセレント環に関する簡単な歴史を紹介する. ただし単位元の生成する部分環が $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に同型のとき標数 p の環ということにする.

- 1926 年 (E. Artin, B. L. van der Waerden) R が正標数 p のデデキント環のとき, $R^{1/p}$ が R 加群として有限生成なら R はエクセレントである. ¹³⁾
- 1935 年 (秋月康夫) 1 次元の局所ネータ環 R でエクセレントでないものが構成できる. ¹⁴⁾
- 1936 年 (F. K. Schmidt) 1 次元のネータ環 R でエクセレントでないものが構成できる. しかも R の素イデアルの個数として, 1 個から可算無限個まで自由に選べる. ¹⁵⁾
- 1960 年 (永田雅宜, A. Grothendieck) 完備局所環 (特に体も) はエクセレントである. 有理整数環はエクセレントであり, エクセレント環の局所化や, 有限生成拡大環はまたエクセレントになる. ⁹⁾
- 1976 年 (E. Kunz) R が正標数 p のネータ環のとき, $R^{1/p}$ が R 加群として有限生成なら R はエクセレントである. ¹⁶⁾

注 正則局所環で複素数体を含んでいてもエクセレントでないものが存在する. 正則局所環でヘンゼル環であってもエクセレントでないものが存在する.

¹³⁾ Die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen, Nachr. Ges. d. Wiss., Göttingen (1926), 23–27.

¹⁴⁾ Einige Bemerkungen über primäre Integritätsbereiche mit Teilerkettensatz, Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan, Vol. 17 (1935), 327–336.

¹⁵⁾ Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen, Math. Zeitschr., Bd. 41 (1936), 443–450.

¹⁶⁾ On noetherian rings of characteristic p , Amer. Math. J., Vol. 98 (1976), 999–1013.

2. 広中の方法

2次元のエクセレントスキーム X の特異点を解消する広中の方法¹⁾を復習する. 一般に, 任意のエクセレントスキームの特異点解消の存在を示すには, $X = \text{Spec}(A)$, A は完備ネータ局所整域, の場合に示せば十分である. ¹⁷⁾ 完備局所環の構造定理から X は非特異なエクセレントスキーム Z の閉部分集合としてよい.

特異点を解消する広中の方法は $\text{Sing}(X)$ の中の適当な閉集合 D を選び, X を D を中心としてブローアップし, これを有限回繰り返すものである. 途中で正規化 (Normalization) を必要とする Abhyankar や Lipman の方法に比べて計算しやすく, 高次元への拡張に優れ, かつ高速解消アルゴリズム¹⁸⁾の開発などの発展性がある.

ブローアップの定義 D は Z 上の連接イデアル層 $\mathcal{I}$ で定義される閉部分スキームとする. このとき, 次の自然な写像

$$h: Z' = \text{Proj}\left(\bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{I}^{\nu}\right) \rightarrow Z$$

を Z の D , あるいは $\mathcal{I}$, を中心とするブローアップ (blowing up) という. このときイデアル層としての $\mathcal{I}$ の引き戻し $\mathcal{I}\mathcal{O}_{Z'}$ は可逆層で, D の逆像 $E = h^{-1}(D)$ は $\text{Proj}\left(\bigoplus_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{I}^{\nu}/\mathcal{I}^{\nu+1}\right)$ に同型である. E を h の例外集合という.

ここでは以下のような特別な条件をみたすブローアップのみを考える.

法平坦の定義⁴⁾ $x \in D \subset X$ を Z の閉点とする. ここでは Z と D は非特異とし, D は既約^{*)}を仮定する. $\mathcal{I}$ を $\mathcal{O}_{Z,x}$ における X の定義イデアルとし, $\mathfrak{p}$ を D の定義イデアルとする. $\mathfrak{p}$ は仮定により正則な素イデアルである. X が x において D に沿って法平坦 (normally flat) であるとは, 次の2つの条件をみたす $\mathcal{I}$ の生成元 $f_1, \dots, f_m$ が存在することである.

- (1) $f_1, \dots, f_m$ の初項形式が $\mathcal{I}$ の先導イデアルの極小基底をなす.
- (2) 各 i について $\nu_{\mathfrak{m}}(f_i) = \nu_{\mathfrak{p}}(f_i)$ が成り立つ. ただし $\mathfrak{m}$ は $\mathcal{O}_{Z,x}$ の極大イデアルを表す.

¹⁷⁾ E. Kunz, Algebraische Geometrie IV., Regensburg 大学講義ノート.

¹⁸⁾ O. Villamayor, Introduction to the algorithm of resolution, Progress of Math., Vol. 134 (1996), Birkhäuser Verlag.

*) 群の作用もこめた同変特異点解消を考えると, ブローアップの中心は複数の既約成分からなる, とした方がよい.

注 D の各点において D が X に沿って法平坦であり, $D \subset \text{Sing}(X)$ となるき, D は X に関して許容中心 (permissible center) であるという.

注 X が 2 次元で超曲面のときは, D が閉点 (0 次元) なら無条件で法平坦, 非特異曲線 (1 次元) のときはこの曲線に沿って $\nu_x(X)$ が定数, つまり等重複度なら各点において D は X に沿って法平坦になる.

強変換 $D \subset X$ は非特異なエクセレントスキーム Z の閉部分集合で, D は既約かつ非特異で, X は D に沿って法平坦とする. D を中心とする Z のブローアップを $h: Z' \rightarrow Z$ とする. D が X の開集合を含まないとき, Z' 内における $h^{-1}(X \setminus D)$ の閉包 X' を h による X の強変換 (strict transform) という.

X' の Z' における定義イデアルは局所的に次のように表せる. $x' \in X'$ を閉点とし, $x = h(x')$ とする. $R = \mathcal{O}_{Z,x}$, $\mathfrak{m}$ は R の極大イデアル, $\mathfrak{a}$ は R における X の定義イデアルとし, $\mathfrak{p}$ を R における D の定義イデアルとする. $\{f_1, \dots, f_m\}$ を法平坦の定義の (1) と (2) をみたす $\mathfrak{a}$ の生成元とする. Z' も非特異なエクセレントスキームで $R' = \mathcal{O}_{Z',x'}$ は正則局所環である. $\eta: R \rightarrow R'$ を h できまる局所準同型とすると, $\eta(\mathfrak{p})R'$ は単項イデアル $\varphi R'$ となる. このとき $\nu(f_i) = \nu_{\mathfrak{p}}(f_i)$ と書いて

$$\mathfrak{a}' = (\varphi^{-\nu(f_1)}f_1, \dots, \varphi^{-\nu(f_m)}f_m) = \bigcup_{\nu \geq 0} \varphi^{-\nu}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}^{\nu})R'$$

が R' における X' の定義イデアルになる.

なお

$$\mathfrak{a}_1 = \varphi^{-\nu(\mathfrak{a})}\mathfrak{a}R'$$

をイデアル $\mathfrak{a}$ の弱変換 (weak transform) という. たとえ D が局所的に単項イデアルで定義される余次元 1 の閉部分スキームであって, したがって h が恒等写像であっても $\mathfrak{a}$ の弱変換は自明でない変換を受ける. その意味ではブローアップは代数的な操作であると考えられる.

特異点の不変量のうちブローアップと関係するものを復習する.

τ 不変量の定義 $x \in X \subset Z$ は上の通りとする. 正則局所環 $R = \mathcal{O}_{Z,x}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の極小基底 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を 1 組固定しておく. R の剰余体 $R/\mathfrak{m}$ を K と表す. R における X の定義イデアルを $\mathfrak{a}$ とする. このとき X の x における接錐 $C_x(X)$ は $\text{Spec}(K[x_1, \dots, x_n]/\bar{\mathfrak{a}})$ に同型になる. ここで先導イデアル $\bar{\mathfrak{a}}$ を生成するような 1 次形式が最低何個必要か考える. $K[x_1, \dots, x_n]$ の K 線形部分空間で $x_1, \dots, x_n$ で生成されるものを $\mathcal{V}$ と表すとき

$$E(\mathfrak{a}) = \{\mathcal{V} \text{ の } K \text{ 線形部分空間 } T; \bar{\mathfrak{a}} = (\bar{\mathfrak{a}} \cap K[T])K[x_1, \dots, x_n]\}$$

とおき自然数

$$\tau(\alpha) = \text{Min}\{\dim_K T; T \in E(\bar{\alpha})\}$$

を定義する. これは m の極小基底の選び方によらずに決まるのでこれを $\tau_x(X)$ と書き X の x における τ 不変量という.⁴⁾

強接空間の定義 $\tau(\alpha) = \dim_K W$ をみたす $W \in E(\bar{\alpha})$ が唯1つある. $K[x_1, \dots, x_n]$ において W の生成する同次イデアルを $I(W)$ と書くとき $\text{Spec}(K[x_1, \dots, x_n])$ の閉部分集合 $V(I(W))$ は K 線形部分空間の構造をもつ. これを $T_x(X)$ と書いて X の x における強接空間 (strict tangent space) という. $T_x(X)$ の次元 $n - \dim_K(W)$ を $e_x(X)$ と表す. $I(W) \cap \bar{\alpha}$ であるから $T_x(X)$ は $C_x(X) = V_+(\bar{\alpha})$ の部分集合になる.

ブローアップによる不変量の変化 $X \subset Z$ は上の記号のままとし, $D \subset X$ は X に関する許容中心とする. $h: Z' \rightarrow Z$ を D を中心とするブローアップとし, $h: X' \rightarrow X$ を X の強変換とする. $x' \in X'$ を閉点とし, $x = h(x')$ とする. D は非特異かつ既約を仮定しているので $\mathcal{O}_{Z,x}$ における D を定義するイデアル $\mathfrak{p}$ は m の極小基底 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ の一部 $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $r = \text{codim}_Z(D)$, で生成される素イデアルとしてよい. $\alpha \in \mathfrak{p}$ であるから $W \subset K\bar{\alpha}_1 + \dots + K\bar{\alpha}_r$ となる. したがって D の x における接空間 $T_x(D) = m/m^2 + \mathfrak{p} \simeq K\bar{\alpha}_{r+1} + \dots + K\bar{\alpha}_n$ は $T_x(X)$ に含まれることに注意する. このとき次がなりたつ.

広中のアイデア A 記号は上の通りとする. X が2次元のとき

- (1) 常に $\nu_{x'}^*(X') \leq \nu_x^*(X)$ が成り立つ.
- (2) $\nu_{x'}^*(X') = \nu_x^*(X)$ のとき, つまり x' が x に無限に近い特異点のときは, $x' \in P(T_x(X)/T_x(D))$ となる.

広中の定理 X は非特異エクセレントスキーム Z の既約かつ被約な2次元の閉部分スキームとする. このとき下の条件 (1) と (2) をみたすブローアップの有限列

$$X_N \xrightarrow{f_N} X_{N-1} \xrightarrow{f_{N-1}} \dots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 = X$$

が存在する.

- (1) f_i は適当な $D_i \subset \text{Sing}(X_i)$ を許容中心とするブローアップである.
- (2) X_N は非特異なスキームである.

注 特異点 x の剰余体 $\mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}$ が不完全体のときは Cossart の論文¹⁹⁾ を参照. 実際には各ブローアップの中心をどのように選ぶかが問題であ

¹⁹⁾ V. Cossart, Desingularization of embedded excellent surfaces, Tôhoku Math. J., Vol. 33 (1981), 25-33.

る。 X が標数ゼロのスキーム，すなわち各点 x の局所環の剰余環が標数ゼロのときは，群の作用がある場合でも，群作用と可換な中心の自然な選び方が知られている。¹⁸⁾ ただし D_i の選び方はブローアップの歴史，すなわち f_{i-1} までのブローアップの例外集合にも依存する。

3. 特異点解消の具体例

注 この節では $\overline{}$ は初項形式ではなく，極大イデアルを法とする剰余類を表すものとする。

ここで考える例は p を奇素数としたときの p 次フェルマ曲線 $x^p + y^p + z^p = 0$ である。この曲線は有理数整数環上で定義されているが，素点 p 上では p 重直線に退化する。しかし基礎体を $K = \mathbb{Q}(\sqrt{1-\zeta}, \sqrt[p]{\beta_1}, \dots, \sqrt[p]{\beta_{p-2}})$ まで拡大すれば p 上の素点で安定退化が得られることが知られている。この K は式を計算するだけで初等的に決定できる。²⁰⁾ ただし ζ は 1 の原始 p 乗根の 1 つを， β_s は有理数 $s^s/(s+1)^{s+1}$ を表す。 β_s は $\mathbb{Q}_p$ 内では整数である。

そこで K の整数環を A とするとき 3 次元の非特異エクセレントスキーム $Z = \mathbb{P}_A^2$ 内の超曲面 $X = V_+(x^p + y^p + z^p)$ の特異点を解消し，必要なら例外集合のなかの第 1 種例外曲線をつぶして極小モデルを作ればフェルマ曲線の半安定退化 (semistable reduction) を，さらに必要なら A, D, E 型の例外曲線をつぶして高々有理 2 重点をもつモデルを作れば，安定退化 (stable reduction) を具体的に，つまり退化した曲線の定義方程式を計算することができる。

最初に X の特異点がどこにあるかを知る必要がある。

自然な射影 $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ のファイバーのうち p を割らない素点 q ， $q \nmid p$ ， p 上のファイバーは $\operatorname{Spec}(A/q)$ 上なめらかであるから $\operatorname{Sing}(X)$ は高々 p を割る素点 p 上のファイバーに含まれる。そこで A を p で完備化したものを R とすると，エクセレントスキームの性質から $X \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ を $X \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(R) \rightarrow \operatorname{Spec}(R) \rightarrow \operatorname{Spec}(R)$ へ基底変換をしても特異点は変らない。そこで最初から A は局所体 $\hat{K} = \mathbb{Q}_p(\sqrt{1-\zeta}, \sqrt[p]{\beta_1}, \dots, \sqrt[p]{\beta_{p-2}})$ の整数環としてよい。 A は完備な離散付値環である。

$\operatorname{Sing}(X)$ を具体的に記述するには

- (1) $\overline{X} = X \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{m})$ の特異点を記述すること (完全体上の代数多様体 V の重複度 $\geq \nu$ となる点は， V の定義イデアル I_V に微分作用素を $\nu-1$ 回作用させたもの $\Delta^{\nu-1}(I_V)$ の零点になるから計算可能である)，と

²⁰⁾ H. Maeda, *Stabile Reduktion der Fermatkurve über einem Zahlkörper*, Manuscripta Math., Vol. 56 (1986), 333-346.

(2) 上の (1) で求めた特異点 (素イデアル) を A 上の素イデアルに持ち上げる事, つまり拡張ヘンゼルの補題,²¹⁾ が必要になる.

$\hat{K}$ の構造 局所体 $\hat{K}$ は $\mathbf{Q}_p$ 上の $e = 2(p-1)p$ 次の完全分岐拡大体である. これをみるため $\mathbf{Z}$ 係数の多項式

$$\phi(X, Y) = \frac{(X+Y)^p - X^p - Y^p}{p}$$

と $\phi(X) = \phi(X, 1)$ を導入する. また $s = 1, \dots, p-2$ に対して $\gamma_s = (\beta_s^p - \beta_s)/p$ とおく. このとき β_s が p 乗根をもつための条件は:

$$\beta_s \in \mathbf{Z}_p^p \Leftrightarrow \gamma_s \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \phi(s) \equiv 0 \pmod{p}$$

となる. そこで

定義 p は奇素数とする. $s = 1, \dots, p-2$ のうちで β_s が $\mathbf{Z}_p$ で p 乗根をもつものを従順な (zahm) β_s といい, そうでないものを野性的な (wild) β_s という.

また $\phi(X)$ を X で微分すると

$$\phi'(X) \equiv -\prod (X - \bar{\alpha}) \pmod{p}$$

が成り立つ. ここで $\bar{\alpha}$ は $\mathbf{F}_p - \{0, -1\}$ の元を丁度 1 回走る. したがってヘンゼルの補題により $\bar{\alpha}$ を $\phi'(\alpha) = 0$ をみたす p 進整数 α に持ち上げることが出来る. そこで $\bar{\alpha} = \bar{s}$ ($s = 1, \dots, p-2$) のとき s の代わりに α を添え字に用いることもある. $s \equiv \alpha \pmod{p}$ のとき $\phi(s) \equiv \phi(\alpha) \pmod{p}$ であるから

$$\beta_s \text{ が従順} \Leftrightarrow \beta_\alpha \text{ が従順} \Leftrightarrow \phi(\alpha) \equiv 0 \pmod{p}$$

となる.

補題 $p > 3$ のとき野性的な α は少なくとも 2 つ存在する. $p = 3$ のときは β_1 が唯 1 つ野性的である.

注 フェルマの小定理により $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ であるが

$$\beta_1 \text{ が従順である} \Leftrightarrow 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

²¹⁾ B. L. van der Waerden, Über einfache Punkte von algebraischen Mannigfaltigkeiten, Math. Z., Bd. 51 (1948), 497-501.

となる. どのような p がこれをみたすかよくわかっていない.

ヘンゼルの補題を用いると, 2つの異なる野性的な $\beta_{\alpha'}$ と $\beta_{\alpha''}$ の比は $\mathbf{Q}_p$ において p 乗根をもつことがわかる. したがって

補題 p を奇素数とするとき, 野性的な β_{α} を 1 つ用いて

$$\hat{K} = \mathbf{Q}_p(\sqrt{\pi}, \sqrt[p]{\beta_{\alpha}})$$

となる. ここで π は局所円分体 $\mathbf{Q}_p(\zeta)$ の一意化元 $1 - \zeta$ を表す. したがって $\hat{K}$ は $\mathbf{Q}_p$ 上の $2(p-1)p$ 次の拡大体になる.

また, 完備離散付値環の p 拡大の一般論から次がわかる.

完備離散付値環 A の一意化元について $p > 3$ とする. A の一意化元, つまり A の極大イデアルの生成元 t は単元を除くと

$$t = \frac{(\sqrt[p]{b_{\alpha}} - 1 - \sqrt{\pi})^{\frac{p-1}{2}}}{\sqrt{\pi}^{p-2}}$$

となる. ただし b_{α} は $\mathbf{Q}_p(\sqrt{\pi})$ の単元 $\beta_{\alpha}^{p-1}(1 + \sqrt{\pi}^p)$ を表す.

注 後で野性的な特異点を表す極大イデアルを記述するときに次の式が大切である: β_{α} が野性的なとき $\tau = \beta_{\alpha}^{\frac{p-1}{p}} - 1$ は局所体 $\mathbf{Q}_p(\sqrt[p]{\beta_{\alpha}})$ の一意化元であって, 次の $\mathbf{Z}_p$ 係数のアイゼンシュタイン方程式

$$\tau^p + p\phi(\tau) + p\{\phi(\alpha) + p\delta\} = 0, \quad \delta \in \mathbf{Z}_p$$

をみたす.

特異点の記述 各アフィン部分を考えればよいので X は $V(x^p + y^p - 1) \subset \text{Spec}(A[x, y])$ とする. 座標変換 $x = x_0 + y_0 + 1$, $y = -y_0$ により X の定義方程式は

$$(1) \quad f = x_0^p + ut^e\phi(x_0, y_0 + 1) + ut^e\phi(y_0) = 0.$$

となる. ただし u は R の単元で $ut^e = p$ となるものとする. これから $\text{Sing}(X) = V((p, X_0 + y_0 - 1))$ がわかる. $L = \text{Sing}(X)$ は X に沿って等重複度 p の非特異直線であるから L を中心に $\text{Spec}(A[x, y])$ をブローアップする. このとき X の強変換もまた特異点が p 重直線となるのでこ

の直線を中心にブローアップする. これを $e' = e/p$ 回繰り返したときの X の強変換 $X_{e'}$ の方程式は (変数を改めて x, y とすると)

$$(2) \quad x^p + u\phi(xt^{e'}, y+1) + u\phi(y) = 0$$

となる. 以下 $X_{e'}$ を改めて X と表す.

(2) 式を $\text{mod } t$ でみると $x^p + y^2 = 0$ と解析的に同型な尖点を $p-2$ 個つ, $\mathbb{F}_p$ 上で定義された平面有理曲線を表していることがわかる. これらの尖点 P_s ($s = 1, \dots, p-2$) の座標は $\text{mod } t$ では $(x, y) = (\sqrt[p]{-u\phi(\bar{s})}, \bar{s})$ となることが, 微分の計算からわかる.

問題は P_s を $\text{Spec}(R[x, y])$ の極大イデアルで表したときの生成元の選び方である. つまり P_s のまわりの座標をどう選ぶかである. 実は上の例では次のように簡単である. 以下 P_s の添え字は, s の代わりに $\phi'(\alpha) = 0$, $\alpha \equiv s \pmod{p}$ をみたすようにヘンゼルの補題で持ち上げた p 進整数 α を用いることにする.

- (i) α が従順のときは P_α を表す $R[x, y]$ の極大イデアルとして $\mathfrak{m}_\alpha = (t, x, y - \alpha)$ が選べる.
- (ii) α が野性的なときは P_α を表す $R[x, y]$ の極大イデアルとして $\mathfrak{m}_\alpha = (t, x - \lambda, y - \alpha)$ が選べる. ただし λ は上で定義した記号を用いたとき $\lambda = \tau/t^{e'}$ という R の単元を表す.

上の (2) 式を $\mathfrak{m}_\alpha$ の生成元を用いて書き直すことにより, X は $p-2$ 個の孤立特異点 P_α ($\alpha = \bar{1}, \dots, \overline{p-2}$) をもち, 各 P_α は X の 2 重点であることがわかる.

注 上の λ を選んだ理由は次の合同式が必要だからである.

$$\lambda^p + u\phi(\lambda t^{e'}) + u\phi(\alpha) \equiv 0 \pmod{t^e}.$$

注 上の例では特異点のまわりの座標において, 整数論のみで決まる α, λ と, 幾何学的な座標 x, y とが分離されているので簡単になっている. 一般にはこれらが混ざり合うので難しくなる. これは完備な正則局所環の構造がクルルの命名 p -Reihenring の期待に反して必ずしも p 進数 (p -adische Reihen) の部分とべき級数 (Potenzreihen) の部分とに分けられないからである. しかし上の例では, 正則局所環 $\widehat{\mathcal{O}_{Z, P_\alpha}}$ は分岐している, すなわち $p \in \mathfrak{m}^e$ である, にもかかわらず, 完備離散付値環 A 上のべき級数環になるので $\text{Sing}(X) \subset X \subset Z$ の記述が簡単になる.

特異点の解消 詳しい計算は拙著²⁾を参考にしてもらうことにして, $P_\alpha \in \text{Sing}(X)$ の特異点解消の概略を述べる.

P_α は $e_{P_\alpha}(X) = 2$ となる X の 2 重点で, これを中心に X をブローアップすると, P_α の逆像は強変換上 X_1 の特異点で, 重複度が 2 の 1 次元の集合になる. これは広中の補題の (2) により $P(T_{P_\alpha}(X)) = P_{\mathbb{F}_p}^1$ と同型な 2 重直線になる. この 2 重直線 L_1 上の各点 y において $e_y(X_1) = 2$ となる. L_1 は許容中心となるのでこれを中心にブローアップすると, 強変換 X_2 の L_1 上の特異点集合は $e = 2$ の 2 重直線 L_2 となる. 広中のアイデア A (2) によれば, L_2 の点 z が L_1 の点 y に写るとき, $z \in P(T_y(X_1)/T_y(L_1)) = 1$ 点となるので $L_1 \simeq L_2$ となる. このようなブローアップを $\frac{p-3}{2}$ 回繰り返す. $\frac{p-3}{2}$ 回めの強変換 $X_{\frac{p-3}{2}}$ では $X_{\frac{p-3}{2}}$ の 2 重直線の各点の逆像は 1 点を除いて重複度 1 になるが, この直線上に $e = 2$ となる $X_{\frac{p-3}{2}}$ の孤立 2 重点が 1 つある. この点を中心にブローアップすると再び 2 重直線 M が現われる. この 2 重直線を中心にさらに $\frac{p-1}{2}$ 回ブローアップすると X の強変換は正則なスキーム $\tilde{X}$ となり, M の逆像は非特異な曲線 C_α となる. C_α は $\mathbb{F}_p$ 上定義された種数が $\frac{p-1}{2}$ のアルチン-シュライアー超楕円曲線となる. $\tilde{X}$ や C_α の定義方程式は ²⁾ を参照のこと.

上のようにして特異点 P_α を解消したとき, $\tilde{X}$ 上の例外集合の成分のうち L_1 の強変換は第 1 種例外曲線となるのでこれをつぶして極小特異点解消を得る.

あとがき

これは 1997 年 11 月 13 日に城崎シンポジウムで講演したものです. この文章は plain TeX で書きました. 特異点の解消を意味する Auflösung が Auflöschung になってしまわないように (つまり f と l がくっつかないように) するため DANTE e.V. のマクロ german.sty, Ver. 2.4a を使いました.