

1.

$Sp(2, \mathbb{Z})$ に関する generalized automorphic form の空間の次元公式

学習院大 理 対馬龍司

1. G_g を次数 g の Siegel 上半平面とする。

この時 $Sp(g, \mathbb{R})$ の元 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ が $z \in G_g$ に対して、次の様に作用する。

$$z \mapsto M \cdot z := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

この M と z とに対して、

$$J(M, z) = CZ + D \quad (\in GL(g, \mathbb{C}))$$

と定義する。この時、次の関係式が任意の

$M, M' \in Sp(g, \mathbb{R})$ と $z \in G_g$ に対して成り立つ。

$$J(MM', z) = J(M, M' \cdot z) J(M', z).$$

これは canonical automorphic factor と呼ばれる。

$\mu: GL(g, \mathbb{C}) \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ を正則な表現とする。

この時、 $\mu(J(M, z)) = \mu(CZ + D)$ もこの関係を満足する。 $\Gamma \subset Sp(g, \mathbb{Z})$ の指数有限の部分群とする。

G_g から $\mathbb{C}^r$ への正則写像 f が、任意の

$M \in \Gamma$ と G_g に対して次の関係：

2.

$$f(M, z) = \mu(Cz + D)f(z)$$

を満たす時、 f は μ 型の保型形式と呼ばれる。
ただし $g=1$ の時は f が尖点で正則という条件
をつける。 f の住す空間を $A_\mu(\Gamma)$ で表す。

これは有限次元であることが知られている。

f は "E-operator" の核に入るとき、尖点
形式と呼ばれる ([2], Exposé 8)。尖点形式
の住す $A_\mu(\Gamma)$ の部分空間を $S_\mu(\Gamma)$ で表す。

以下 $g=2$ の時に、 $S_\mu(\Gamma)$ の次元を計算
することを問題とする。 $g \geq 2$ の時、上の様
な Γ はある ℓ に対して主合同部分群

$$\Gamma_g(\ell) := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z}) \mid M \equiv 1_{2g} \pmod{\ell} \right\}$$

を含んでいることが知られている。 $g=2$ の
時に、 $\Gamma \supset \Gamma_2(\ell)$ ($\ell \geq 3$) とし $S_\mu(\Gamma)$ の次元を、

[12] において $\Gamma/\Gamma_2(\ell)$ の条件で表した。特に

$S_\mu(\Gamma_2(\ell))$ ($\ell \geq 1$) の次元は [11] において報告さ
れている (この報告集が出る頃には)。 μ が

特に $\det^k$ のとき、 $S_\mu(\Gamma)$ は $S_k(\Gamma)$ と書かれる。

$S_k(\Gamma)$ に対して同様のことは [10] においてな
された。 $S_k(\Gamma_2(\ell))$ ($\ell \geq 3$) に対しては [13] に

おいとたされた。

$S_M(\Gamma)$ の計算については、2つの部分に分かれる。一つの部分は Riemann-Roch の計算と、他の部分は消滅定理である。城崎では消滅定理の部分を話した。Riemann-Roch の部分については、東北大学での研究集会で話した。従ってこの報告でも消滅定理の部分のみについて報告する（ただし、東北大学の研究集会については報告集は発行されない。悪いからす。）。）。。

2. 商空間 $\Gamma_g(l) \backslash G_g$ を $G_g^*(l)$ で表す。 $g \geq 3$ の時、 $\Gamma_g(l)$ は固定点を持たない。従って $G_g^*(l)$ は非特異である。 $G_g^*(l)$ は自然な compact 化、佐武 compact 化 $\overline{G}_g^*(l)$ を持つ。これは射影代数多様体で、 $g \geq 2$ ならば“尖点” $= \overline{G}_g^*(l) - G_g^*(l)$ に沿って特異点を持つ。浪川氏は [9] にあいて他の compact 化 $\tilde{G}_g^*(l)$ を構成した。これは $g \leq 4$ のとき非特異で、 $g \geq 5$ のときは非特異か否か不明である。 $G_g^*(l)$, $\overline{G}_g^*(l)$, $\tilde{G}_g^*(l)$ を簡単の為に $X, \overline{X}, \tilde{X}$ で表

4.

す。 Δ を $\tilde{X} - X$ を表し、 X の境界と呼ぶ。

$\tilde{X}$ は X 上恒等写像である様な正則写像 $s: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ を持つ。

積多様体 $G_g \times \mathbb{C}^r$ を E_μ で表す。 E_μ には $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in T_g(l)$, $z \in G_g$, $\xi \in \mathbb{C}^r$ と ($z \in T_g(l)$) が次の様に作用する。

$$M(z, \xi) = (M \cdot z, \mu(Cz + D)\xi).$$

この商空間を E_μ と書く。 $g \geq 3$ の時、これは X は $\mathbb{C}^r$ -fibre bundle である。 E_μ は $\tilde{X}$ は $\mathbb{C}^r$ -fibre bundle $\tilde{E}_\mu$ に自然に延長される。 $\tilde{E}_\mu$ の構成方法について簡単に説明しておく。 その為には $\tilde{X}$ の構成法について説明したくはないが、これは著しく複雑である。 それを簡単に標語的にいうと、三つの段階に分かれる。 第一に平行移動の部分群

$$H = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1_g & B \\ 0 & 1_g \end{pmatrix} \in T_g(l) \mid {}^t B = B \right\}$$

で G_g を割る。 G_g は $(\mathbb{C})^{g(g+1)/2}$ に含まれている

から、上で B を全てにわたって動かした時、

$$H \backslash G_g \text{ は } H \backslash (\mathbb{C})^{g(g+1)/2} = (\mathbb{C}^*)^{g(g+1)/2} (=T \text{ とする。}) \text{ に}$$

含まれることになる。 T は代数的 torus であ

る。こゝで T は無限個の因子を付け加えて torus embedding を作る ([5])。こゝが第二段階である。更に第三段階として、 X を割、 $T \sim X$ を作りこゝを張り合わせる。改めて言う、こゝから $\tilde{X}$ の構成法はもっと複雑で、こゝは全く単純化した話したものである。こゝで H の元 M について、任意の $Z \in G_g$ に対して、

$$J(M, Z) = 1_g$$

であるから、 M は Σ_μ の $\mathbb{C}^r$ の方へは自明に作用している。従って

$$H \backslash (G_g \times \mathbb{C}^r) = (H \backslash G_g) \times \mathbb{C}^r$$

となる。即ち H を割、 T 段階では、未だ積多様体になる。従って $H \backslash G_g < T < X$ と拡大していく際に、積のまま拡大し $X \times \mathbb{C}^r$ を割、 $T \sim (X \times \mathbb{C}^r)$ を張り合わせ、 $\tilde{E}_\mu$ が構成される。

$A_\mu(\Gamma_g(\mathcal{L}))$ は自然に $\Gamma(X, \mathcal{O}(\tilde{E}_\mu))$ と同一視される。 $\Gamma(X, \mathcal{O}(\tilde{E}_\mu))$ の元 f は $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}_\mu))$ の元 $\tilde{f}$ に延長されることを知られている。こゝ

6.

これは保型形式か ($g \geq 2$ の時は必然的に, $g=1$ の時は仮定から) 尖点にある z 正則という事実による。

例 1 G_g の座標を $z = (z_{ij})$ で表す。 $T = T^{-1}$ $(z_{ij} = z_{ji})$ とする。 g の時 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{R})$ に対して, 次の事が知られている。

$$(d(M \cdot z)_{ij}) = {}^t(Cz + D)^{-1} (dz_{ij}) (Cz + D)^{-1}.$$

従って G_g 上の正則微分形式, $\omega = \sum_{i,j} f_{ij}(z) dz_{ij}$ が $T_g(\mathbb{R})$ 不変である, 即ち任意の $M \in T_g(\mathbb{R})$ に対して

$$\sum_{i,j} f_{ij}(M \cdot z) d(M \cdot z)_{ij} = \sum_{i,j} f_{ij}(z) dz_{ij}$$

である為の条件は, $\mu = S_2$ (2 次の対称 tensor 表現) として $f = (f_{ij}(z))_{i,j}$ が $\Gamma(X, \mathcal{O}(E_\mu))$ に属するのとである。この時 f を延長した $\tilde{f}$ に対応する微分形式 $\tilde{\omega}$ は, Δ に沿って対数的極を持つと記述される。従って次の同型が得られる。

$$\tilde{E}_{S_2} \cong \Omega^1_X(\log \Delta).$$

3. X を n 次元複素多様体, E を X 上の階数 r の正則 vector bundle, h を E の hermite 計量とする。 h の接続形式 θ と, 曲率形式 Θ は次

7.

の様には定義される。

$$\theta = h^{-1} \delta h, \quad \Theta = \bar{\partial} \theta.$$

Θ は係数が (1,1)-形式の微分形式である。

$(z^1, z^2, \dots, z^n)$ を X の局所座標とし、 $h\Theta$ の (p, σ) -係数を

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} H(\Theta)_{\sigma i, p j} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

とする。この時次の事が成立する。

$$H(\Theta)_{\sigma i, p j} = \overline{H(\Theta)_{p j, \sigma i}}.$$

ξ は 2^n vector $\xi = (\xi^{\sigma i})_{1 \leq \sigma \leq r, 1 \leq i \leq n}$ に対し、

hermite 形式を次で定義する。

$$\Theta(\xi, \xi) = \sum_{\substack{1 \leq \sigma, p \leq r \\ 1 \leq i, j \leq n}} H(\Theta)_{\sigma i, p j} \xi^{\sigma i} \overline{\xi^{p j}}.$$

定義 2 若し $\Theta(\xi, \xi)$ が全ての non-zero vector ξ に対し正 (resp. 非負, 負) の時、 E は正 (resp. 非負, 負) と言われ、次の様に表わされる。

$$E > 0 \text{ (resp. } E \geq 0, E < 0 \text{)}.$$

E が直線束の時、この正の概念は小平の意味での正の概念と一致する。

μ を $GL(q, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^q$ 上の通常の作用による表現とする。この場合、 $E_\mu, E_\mu, \tilde{E}_\mu$ を特に $E, E, \tilde{E}$ で表す。 $Z \in G_q$ とし、 $u, v \in \mathcal{E}$ に

対して

$$h = \operatorname{Im} Z, \quad \langle u, v \rangle = {}^t \bar{u} h v$$

と置く。任意の $Z \in G_g$ と $M \in \operatorname{Sp}(g, \mathbb{R})$ に対して、次の事が成立する。

$$\operatorname{Im} M \cdot Z = {}^t (CZ + D)^{-1} (\operatorname{Im} Z) (CZ + D)^{-1}.$$

従って、次の事が成立する。

$$\langle Mu, Mv \rangle = \langle u, v \rangle,$$

即ち hermite 計量 h は $\operatorname{Sp}(g, \mathbb{R})$ 不変である。故に $\operatorname{Sp}(g, \mathbb{R})$ の torsion free な離散部分群 Γ に対して、 h は $E := \Gamma \backslash E$ の hermite 計量 h を誘導する。

$\mu(CZ + D) = \det(CZ + D)$ の時は $E_\mu, \tilde{E}_\mu$ は直線束である。これをそれぞれに $L_g, \tilde{L}_g$ でも表す。

前に言ひ忘れた(書き忘れた)が、 L_g は佐武 compact 化 $\bar{X}$ 上の直線束 $\tilde{L}_g$ に延長され、 $\tilde{L}_g$ は自然な写像 $\pi: \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ による $\tilde{L}_g$ の引き戻しとなる。ただしこれは直線束の場合だけで、一般に E_μ は $\bar{X}$ 上には延長されない。同様にこの場合には E_μ を L_g で表す。

前と同様に $Z \in G_g$ と $u, v \in (L_g)_Z$ に対して、計量 $\langle u, v \rangle := \bar{u} \det(\operatorname{Im} Z) v$ は $\operatorname{Sp}(g, \mathbb{R})$ 不変な L_g の計量を定義し、従って $L_g :=$

9.

$\Gamma \backslash \mathcal{D}_g$ の計量を定義する。

命題 3. 上の計量に対して, ε は非負で, $\mathcal{D}_g$ は正である。

証明 計量 ε は $S_p(g, \mathbb{R})$ 不変であるから, 一点 $Z \in G_g$ に対して非負であることを示せばよい。
 $\varepsilon = 0$ で $Z = i1_g$ とする。 $Y = \operatorname{Im} Z$ と置く。このとき, 次の成立する。

$$\begin{aligned} (\Theta)_p &= \bar{\partial}(Y^* \partial Y) \\ &= Y^* \bar{\partial} \partial Y - Y^* \bar{\partial} Y Y^* \partial Y \\ &= -(1/4) \sum_k d\bar{z}_{pk} \wedge dz_{pk}. \end{aligned}$$

$1 \leq i, j \leq g, i \leq j$ に対して変数 $\xi^{\sigma(i,j)}$ を導入し, $\xi^{\sigma(j,i)} = \xi^{\sigma(i,j)}$ と置く。このとき $\xi = (\xi^{\sigma(i,j)})$ に対して,

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \xi) &= (1/4) \sum_{1 \leq i, j, k \leq g} \xi^{\sigma(i,j,k)} \bar{\xi}^{\sigma(i,k)} \\ &= (1/4) \sum_{1 \leq k \leq g} \left| \sum_{1 \leq i \leq g} \xi^{\sigma(i,k)} \right|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

である。故に ε は非負である。 $\mathcal{D}_g$ に対して ε は $i\bar{\partial}\partial \log(\det \operatorname{Im} Z)$ から G_g の Bergmann 計量を定義するといえる。正であることはよく知られている。

次の補題は [3] p. 209 と同様に証明される。
 ただし, Griffiths [3] の意味の正の概念は上の定義 2 (中野 [8]) の正の概念より弱い概念である。が、証明は同様である。

補題 4 E_1, E_2 を X 上の vector 束とし、
 計量 h_1, h_2 に関して $E_1 \geq 0, E_2 \geq 0$ とする。
 この時、計量 $h_1 \otimes h_2$ に関して $E_1 \otimes E_2 \geq 0$ であり、
 特に $E_2 > 0$ ならば $E_1 \otimes E_2 > 0$ である。

μ を $GL(g, \mathbb{C})$ の既約な正則表現とし、
 $(f_1, f_2, \dots, f_g) (f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_g)$ をその符号数とする。
 即ち、 $f_g \geq 0$ の場合は、 f_i は Young 図形の i 行の長さである。

定理 5 $\Gamma \in Sp(g, \mathbb{R})$ の torsion free で $\Gamma \backslash G_g$
 が compact な離散部分群とする。 $E_\mu := \Gamma \backslash \mathcal{E}_\mu$
 を $\Gamma \backslash G_g$ 上の vector 束とする。 この時、若し
 $f_g \geq g+2$ であるならば、 $p > 0$ に対し

$$H^p(\Gamma \backslash G_g, \mathcal{O}(E_\mu)) \simeq 0$$

が成り立つ。

証明 K を $\Gamma \backslash G_g$ の標準的直線束とする。
 この時、次の事が知られている。

$$K \simeq L_g^{\otimes (g+1)}.$$

ν を符号数 $(f_1 - g - 2, f_2 - g - 2, \dots, f_g - g - 2)$ の $GL(g, \mathbb{C})$ の既約表現とする。この時、 $\mu = \nu \otimes \det^{(g+2)}$ である。 $f_g - g - 2 \geq 0$ であるから、 $f = \sum_{i=1}^g (f_i - g - 2)$ とし、 $E^{\otimes f}$ は E_ν と同型な vector 束を直和因子として言える。故に

$$H^p(\Gamma \backslash G_g, \mathcal{O}(E^{\otimes f} \otimes L_g^{\otimes (g+2)})) \simeq 0$$

を示せばよい。 $E^{\otimes f} \otimes L_g^{\otimes (g+2)}$ は $E^{\otimes f} \otimes L_g \otimes K$ と同型であるから、これは命題 3 と次の定理から証明される。

定理 6. X を compact な複素多様体、 E を X 上の vector 束、 K を X の標準的直線束とする。この時、若し $E > 0$ ならば、 $p > 0$ に対し 2 次が成立する。

$$H^p(X, \mathcal{O}(E \otimes K)) \simeq 0$$

注意 7. この定理は [8] に於て $p=1$ の場合に証明された。 $p>1$ の場合については、[1] に於て X が有界対称領域の商空間、 E がその接束の場合に扱われている。しかし一般の E と $p>1$ について証明したものを、筆

者は知らない。専門家は " $p > 1$ の場合も証明は同様な" で済ませている様である。

注意 8. 中野の意味 (定義 2) で正な vector 束の商束は一般に正となるとは限らない。Griffiths [3] の意味で正な vector 束の商束は正である ([3] p. 208)。しかしこの証明は、中野の意味の正の概念に対しては通用しない。実際 $\mathbb{P}^n$ の接束は中野の意味で正ではない。

注意 9. Γ を定理 5 の通りとする。この様な Γ に対して、保型形式の次元公式は [4] に於て計算された。[4] では直線束に対して小平消滅定理を用いる別の方法で証明されている。ただしそこでは、条件 $fg \geq 2g+1$ となっている。従って定理 5 の結果は [4] の結果より精密で、 $fg = g+1$ の場合には反例があるのだからこれが最良である。

4. さて今度は $g=2$ で、 $\Gamma = \Gamma_2(l)$ の場合に戻ることにする。 μ を符号数 $(j+k, n)$ ($j \geq 0$) の $GL(2, \mathbb{C})$ の既約表現とする。 S_j を j 次の対称 tensor 表現とする時、 μ は $S_j \otimes \det^k$ と同値である。

この時、 $\tilde{E}_\mu$ は $S^j(\tilde{E}) \otimes \tilde{L}_2^{\otimes k}$ と同型である。

E を複素多様体 X 上の階数 r の vector 束とし、 E^* をその双対的 vector 束とする。 X を E^* の零切断と同一視し、 $\mathbb{P}(E) = (E^* - X)/\mathbb{C}^*$ とする。これは X 上の $\mathbb{P}^{r-1}$ -bundle であり、 $E^* - X$ は $\mathbb{P}(E)$ 上の $\mathbb{C}^*$ -bundle となる。この $\mathbb{C}^*$ -bundle に伴う直線束を $H(E)^*$ で表し、その双対直線束を $H(E)$ で表す。

定義 10 L を射影的非特異多様体 X 上の直線束とする。任意の非特異 compact 曲線 C と任意の正則写像 $f: C \rightarrow X$ に対して、 f^*L の次数が非負の時、 L は numerically semi-positive と呼ばれる。 E を X 上の vector 束とする。 E は $H(E)$ が numerically semi-positive の時 numerically semi-positive と呼ばれる。

$\mathcal{F}$ を X 上の直接層、 $\pi: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ を射影とする時、次の同型はよく知られている。

$$H^p(X, \mathcal{O}(S^j(E)) \otimes \mathcal{F}) \simeq H^p(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(H(E)^{\otimes j}) \otimes \pi^* \mathcal{F}).$$

K_X と $K_{\mathbb{P}(E)}$ をそれぞれ X と $\mathbb{P}(E)$ の標準的直線束とする。この時次の同型がある ([3] または [6])。

$$K_{\mathbb{P}(E)} \simeq H(E)^{\otimes(-k)} \otimes \pi^*(K_X \otimes \det E).$$

定理 11. μ を上の通りとする。若し、

$j=0, k \geq 4$ 又は $j \geq 1, k \geq 5$ ならば、 $p > 0$ に対して、

$$H^p(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}_\mu - \Delta)) \simeq 0.$$

証明. $j=0$ の場合は小平消滅定理により証明される。

$[\Delta]$ を Δ に伴う直線束とする。

$\mathcal{O}(\tilde{E}_\mu - \Delta)$ は $\mathcal{O}(\tilde{E}_\mu \otimes [\Delta]^{\otimes(-1)})$ と同型である。故

にこれは $\mathcal{O}(S^j(\tilde{E}) \otimes \tilde{L}_2^{\otimes k} \otimes [\Delta]^{\otimes(-1)})$ と同型である。

K を $\tilde{X}$ の標準的直線束とすると、 K は $\tilde{L}_2^{\otimes 3} \otimes [\Delta]^{\otimes(-1)}$

と同型である。故に上の層は $\mathcal{O}(S^j(\tilde{E}) \otimes \tilde{L}_2^{\otimes(k-3)} \otimes K)$

と同型である。更に次の同型がある。

$$H^p(\tilde{X}, \mathcal{O}(S^j(\tilde{E}) \otimes \tilde{L}_2^{\otimes(k-3)} \otimes K)) \simeq H^p(\mathbb{P}(\tilde{E}), \mathcal{O}(H(\tilde{E})^{\otimes j} \otimes \pi^*(\tilde{L}_2^{\otimes(k-3)} \otimes K))).$$

$\det \tilde{E} = \tilde{L}_2$ であるから、これは

$$H^p(\mathbb{P}(\tilde{E}), \mathcal{O}(H(\tilde{E})^{\otimes(j+2)} \otimes \pi^*(\tilde{L}_2^{\otimes(k-q)}) \otimes K_{\mathbb{P}(\tilde{E})}))$$

と同型である。この cohomology 群の消滅は次の

の川又 - Viehweg の消滅定理より証明される。

定理 12. ([14] 又は [15]), X を n 次元非特異射影多様体、

L を X 上の直線束、 $c_1(L)$ を L

の第一次 chern 類、 K を X の標準的直線束とする。

若し L が numerically semi-positive なら $c_1(L)^n [X]$

が正ならば, $p > 0$ の時

$$H^p(X, \mathcal{O}(L \otimes K)) \simeq 0$$

が成り立つ。

故に我々は $k \geq 5$ の時 $L := H(\tilde{E})^{\otimes(j+2)} \otimes \pi^*(\tilde{L}_2^{\otimes(k-4)})$

が numerically semi-positive である $c_1(L)^4 [R(\tilde{E})]$ が正である

を示す必要がある。 $\tilde{L}_2$ は ample である

より $\pi^*(\tilde{L}_2) = \pi^*s^*(\tilde{L}_2)$ は $\tilde{L}_2$ の引き戻しであるから

numerically semi-positive である。故に $k \geq 4$ ならば

$\pi^*(\tilde{L}_2^{\otimes(k-4)})$ は numerically semi-positive である。

従って $H(\tilde{E})$ が numerically semi-positive である

を示せば十分である。 $k \geq 5$ の時,

$c_1(L)^4 [R(\tilde{E})]$ が正であることは容易に示せる

ので、以下 $H(\tilde{E})$ が numerically semi-positive である

を示す。

E の $Sp(g, \mathbb{R})$ 不変計量 h から誘導される

E の計量を h とし, h の曲率形式を Θ とする。

$$\det(1_2 + (i/2\pi)\Theta) = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$$

とする。ただし ω_i は (i, i) -形式である。

h は Δ に沿って特異性を持つているので、 $\tilde{E}$ の計量は定義しない。故に定理5の証明法

は $\gamma = 2$ は使えない。然し h は [7] の意味で $\tilde{X}$ 上 "good" である。故に ω_i は $\tilde{X}$ 上局所積分可能で、current $[w_i]$ を定義する。 $\tilde{E}$ の全 chern class を $e_0 + e_1 + e_2$ とする時、current $[w_i]$ は e_i を表す ([7])。Hirzebruch の比例原理は、この事実より直ちに証明される。 h が "good" というのは、 h が Δ に近づく時の増大度で定義される。

$\tilde{E}^*$ を $\tilde{E}$ の双対的 vector 束とする。 $z \in X$ の時 $\tilde{E}_z^*$ は $h^* = {}^*h^{-1}$ を計量として持つ。 u が $\tilde{E}_z^*$ の零でない u 元とする時 $\tilde{h}(z, u) = {}^*u h^* u$ で定義する。 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対して、 $\tilde{h}(z, \lambda u) = |\lambda|^2 \tilde{h}(z, u)$ が成り立つ。 $H(\tilde{E})^*$ から零切断を除いたものは、 $\tilde{E}^*$ から零切断を除いたものと同型であるから、 $\tilde{h}$ は $H(\tilde{E})^*|_{\pi^{-1}(X)}$ の計量を定義する。この計量も $\tilde{h}$ で表す。 $\pi^{-1}(\Delta)$ を $\pi^{-1}(X)$ の境界と見做す。 h^* は $S_p(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ -不変な計量 $h^* := {}^*(\text{Im } z)^{-1}$ から誘導されるので、 $\tilde{h}$ は $H(\tilde{E})$ 上で "good" であることは容易に図ることはできる。 ω を

$$\omega = (1/2\pi i) \partial \bar{\partial} \log \tilde{h}(z, u)$$

で定義する。これは $\mathbb{P}(\tilde{E})$ 上で局所積分可能で current $[\omega]$ は $H(\tilde{E})^*$ の first chern 類を表す。

C を compact 非特異曲線とし $f: C \rightarrow \mathbb{P}(\tilde{E})$ を正則写像とする。 $f^*H(\tilde{E})$ の次数が非負であることを示す。 まず $f(C) \not\subset \pi^{-1}(\Delta)$ を仮定する。 $C^0 = f^{-1}(\pi^{-1}(x))$ とする。 $C - C^0$ は C^0 の境界と見なす。 $f^*H(\tilde{E})^*|_{C^0}$ の計量 h_C を f による $\tilde{h}$ の引き戻しで定義する。 $\omega^{(p)} \in X$ の Poincaré 計量とする ([7])。 $f^*\omega^{(p)}$ は C^0 の Poincaré 計量で表わされることがわかるので、 h_C は C 上の "good" 計量である。 従って

$$\omega_C := (1/2\pi i) \partial \bar{\partial} \log h_C (= f^*\omega)$$

は C 上で局所積分可能で、 current $[\omega_C]$ は $f^*H(\tilde{E})^*$ の first chern class を表す。 従って

$$\deg f^*H(\tilde{E})^* = \int_{C^0} \omega_C$$

である。 命題 3 により、計量 h に関して $\tilde{E}|_X \geq 0$ であるから、 h^* に関して $\tilde{E}^*|_X \leq 0$ である。 故に $\tilde{h}$ に関して $H(\tilde{E})^*|_{\pi^{-1}(x)} \leq 0$ である ([3] 又は [6])。 これは h_C に関して $f^*H(\tilde{E})^*|_{C^0} \leq 0$ である。 故に上の積分は非正であり、

$f^*H(\tilde{E})$ の次数は非負である。

次に $f(C) \subset \pi^1(\Delta)$ の時を扱う。 $D \in \pi^0 f(C)$ を含む Δ の既約因子 $(\eta - \gamma)$ とする。 この時次の vector 束の完全係列がある (東北大での話より)。

$$0 \rightarrow \tilde{L}_{2|D} \rightarrow \tilde{E}|_D \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

$\tilde{E}|_D$ は numerically semi-positive であることを示せばよい。 $\tilde{L}_{2|D}$ は numerically semi-positive であるから、これは次の定理から示される。

定理 13. X を非特異射影多様体とする。

$$0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\phi} E_2 \xrightarrow{\psi} E_3 \rightarrow 0$$

E を X 上の vector 束の完全係列とする。 E_1 と E_3 は numerically semi-positive ならば、 E_2 も numerically semi-positive である。

証明 (藤田隆夫氏による。) X 上の vector 束 E が numerically semi-positive である為には、任意の compact 非特異曲線 C と、任意の正則写像 $f: C \rightarrow X$ と、任意の f^*E の商直線束 L に対して、 L の次数が非負であることが必要十分である。
 $f: C \rightarrow X$ を上の通り、 L を X 上の直線束、 $\theta:$

$f^*E_2 \rightarrow L \rightarrow 0$ を完全係列とする。 $f^*\phi$ を f による ϕ の引き戻しとして、 $\theta \circ f^*\phi$ を合成写像とする。 また $\theta \circ f^*\phi$ が恒等的に零でない場合を考へる。 $\theta \circ f^*\phi$ は層の間の写像:

$$\mathcal{O}(f^*E_1) \rightarrow \mathcal{O}(L)$$

に対応する。 この像は C 上の或る因子 $R(20)$ によ、て、 $\mathcal{O}(L-R)$ と表わされる。 R に対応する直線束を $[R]$ で表わすと、写像:

$$f^*E_1 \rightarrow L \otimes [R]^{\otimes (-1)}$$

は全射である。 従、2仮定より $L \otimes [R]^{\otimes (-1)}$ の次数は非負、よ、て L の次数は非負である。 若し $\theta \circ f^*\phi$ が恒等的に零ならば、 θ は f^*E_2 を経由するのて前と同様に L の次数は非負である。

REFERENCES

- [1] Calabi, E. and Vesentini, E., On compact, locally symmetric Kaehler manifolds. Ann. of Math., **71** (1960), 472-507.
- [2] Cartan, H. et al., Séminaire Henri Cartan, 1957/1958, Fonctions Automorphes.
- [3] Griffiths, P. A., Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles. Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira), 185-251. Univ. Tokyo Press, Tokyo 1969.
- [4] Ise, M., Generalized automorphic forms and certain holomorphic vector bundles. Amer. J. Math., **86** (1964), 70-108.
- [5] Kempf, G. et al., Toroidal Embeddings I. Lect. Notes in Math. 216. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.
- [6] Kobayashi, S. and Ochiai, T., On complex manifolds with positive tangent bundles. J. Math. Soc. Japan, **22** (1970), 499-525.
- [7] Mumford, D., Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case. Invent. Math., **42** (1977), 239-272.
- [8] Nakano, S., On complex analytic vector bundles. J. Math. Soc. Japan, **7** (1955), 1-12.
- [9] Namikawa, Y., A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties. I. II. Math. Ann., **221** (1976), 97-141, 201-241.
- [10] Tsushima, R., On the spaces of Siegel cusp forms of degree two. Amer. J. Math., **104** (1982), 843-885.
- [11] _____, An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to $Sp(2, \mathbb{Z})$. to appear in Proc. Japan Acad.
- [12] _____, to appear.
- [13] Yamazaki, T., On Siegel modular forms of degree two. Amer. J. Math., **98** (1976), 39-53.
- [14] Kawamata, Y., A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem. Math. Ann., **261** (1982), 43-46.
- [15] Viehweg, E., Vanishing theorems. J. Reine Angew. Math.