

氏 名 長 谷 川 幸 子
は せ が わ ゆ き こ
学 位 の 種 類 理 学 博 士
学 位 記 番 号 論 理 博 第 638 号
学 位 授 与 の 日 付 昭 和 54 年 3 月 23 日
学 位 授 与 の 要 件 学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目 On the C^∞ -Goursat problem for equations with constant coefficients
(定数係数の方程式に対する C^∞ グルサー問題について)

論文調査委員 (主 査)
教 授 溝 畑 茂 教 授 山 口 昌 哉 教 授 楠 幸 男

論 文 内 容 の 要 旨

R^n で定義された m 階の線形偏微作用素 $P(x, \partial x)$ に対して, $\varphi(x)=0$ で定義される超曲面 S が特性面 (厳密には特性多様体) であるとは, $P_m(x, \partial_x)$ を P の m 次斉次部分としたとき

$$P_m(x, \varphi x)=0, x \in S$$

がなりたつときをいう。さらに S が単純であるとは,

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial \xi_i} P_m(x, \varphi x) \right| \neq 0$$

がなりたつときをいう。特性面を初期面とする Cauchy 問題は意味を失う。すなわち解の存在, 一意性は一般にはなりたたない。この場合には Cauchy 問題に代って Goursat 問題が登場する。主論文にいう Goursat 問題とは, 単純特性面 S 上に $(m-1)$ 個の data $(\partial u / \partial n)^i (0 \leq i \leq m-2)$ (n は S の単位法線) を与え, かつ S に対して横断的な 1 つの曲面 Σ を想定して, $u|_{\Sigma}$ を与えて, $Pu=f$ の解の存在を問題にすることをいう。この問題は P, S, Σ ならびにすべての data が解析的である場合はつねに肯定的であることが古くから知られている。所が data が C^∞ の場合には極めて簡単, 特殊な場合を除いて今まで取り扱われなかった。申請論文は P, S, Σ をそれぞれ定数係数, 超半面に限定し, この問題 — C^∞ Goursat 問題 — をとり扱い, 解が一意的に存在するための必要十分条件を与えた。

与えられた作用素 P を

$$P(\partial_t, \partial_x, \partial_y) \sum_{i+j+|\alpha| \leq m} a_{ij\alpha} \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^\alpha, t \in R_+, x \in R, y \in R^l$$

とし, m 次, $(m-1)$ 次の斉次部分を P_m, P_{m-1} とする。このとき Goursat 問題はつぎのようになる。

$$(1) P(\partial_t, \partial_x, \partial_y) u(t, x, y) = f(t, x, y) \in C^\infty$$

$$(2) \partial_t^i u(0, x, y) = v_i(x) \in C^\infty \quad (0 \leq i \leq m-2)$$

$$u(t, 0, y) = \varphi(t, y) \in C^\infty$$

ここで(2)は Goursat data であり, compatibility condition をみたしているものとする。 $u(t, x, y)$ は

求めるべき解 (εC^∞) である。 P_m, P_{m-1} は実係数であり、 $t=0$ は P の単純特性面であって、かつ P_m にあらわれる ∂_t^{m-1} の係数を $b_1(\partial_x, \partial_y)$ とかいたとき、 $b_1(1, 0) \neq 0$ をみたすものとする。

この問題が任意の C^∞ -data に対して一意的に解けるための必要条件が次の形で与えられている。

(1) $P_m(\tau, \xi, \eta) = 0$ の τ に関する根 $\tau = \tau_i(\xi, \eta) (1 \leq i \leq m-1)$ は (ξ, η) が実のとき、つねに実である。

(2) P_m は b_1 で割り切れる。すなわち

$$P_m(\tau, \xi, \eta) = b_1(\xi, \eta) \dot{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta),$$

ここで $\dot{Q}_{m-1}$ は多項式である。

(3) $\dot{Q}_{m-1}$ が t -方向に強双曲型であるとする。このとき P_{m-1} は

$$P_{m-1}(\tau, \xi, \eta) = c \dot{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) + b_1(\xi, \eta) Q_{m-2}(\tau, \xi, \eta)$$

の形をとる。ここで Q_{m-2} は $(m-2)$ -次の多項式である。

逆に P_m, P_{m-1} が上記の(1), (2), (3)をみたしているときは、すなわち、

$$P = b_1 \dot{Q}_{m-1} + c \dot{Q}_{m-1} + b_1 Q_{m-2} + R_{m-2}$$

の形をもつならば、Goursat 問題は一意的に C^∞ の範囲で解けることが示されている。

参考論文1は主論文の研究の出発点となったものである。参考論文2は初期面が2重特性面の場合に適当な初期データに対して解の存在を論じたものであって(解析的の場合)、常微分方程式の場合のフック型の諸定理の拡張がなりたつことを示したものであって、この論文を出発点とした研究が国内、国外でなされている。

論文審査の結果の要旨

Goursat 問題は解析的な範囲では古くから知られていたにも拘らず、 C^∞ の範囲では簡単な諸例に止まっていた。申請論文は C^∞ の範囲での組織的な研究として恐らく最初のものであろう。

主論文の力点は当然の事ながら必要条件の研究におかれている。このうち条件(1)は Cauchy 問題からの類推で予想されていたものであるが、条件(2)(3)はその形が単純明快であるだけに、かえってその必要性については疑いが持たれていたものであるが、申請者の与えた証明は微細なものであり興味深い。(2)の証明は大きいパラメータを含む解の族の具体的構成によってなされており、申請者の苦心がうかがわれる。条件(3)は Cauchy 問題の Levi 条件に対比せられるものであって、Goursat 問題にもこの条件が必要条件として現われることは今迄予期されなかったことであり、これを明るみに出した意義は大きい。

概観すれば、申請論文は Goursat 問題の本質をある程度明らかにしたということが出来、この問題の取り扱いの将来の発展の出発点となることが予想される。また発想は明快であり結果はまとまったものである。よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。