

Pentagon relation, Yang-Baxter equation and Drinfel'd associators

東京工業大学情報理工学院 鈴木咲衣

Sakie Suzuki

Department of Mathematical and Computing Science,
School of Computing, Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

本稿では「5 項関係式」が「6 項関係式」を導くふたつの事例を紹介する. ひとつは仮想組みひも図式を用いた幾何学的な関係式についてである (定理 2). 仮想組みひも図式における 5 つの交点を含む関係式「 $P(2, 3)$ 移動」が, 組みひも図式における 6 つの交点を含む関係式「ライデマイスター III 移動」を導く [Suz18]. もうひとつはホップ代数を用いた代数的な関係式についてである (定理 6). ホップ代数のハイゼンベルグダブルにおける「5 角関係式」がドリンフェルトダブルにおける「量子ヤン・バクスター方程式」を導く [Kas97]. 仮想組みひも図式の普遍量子不変量により, 前者の幾何学的な関係式が後者の代数的な関係式に移される (補足 7) [Suz18].

古庄 [Fur10] は Drinfel'd associator の「5 角関係式」が「6 角関係式」を導くことを示した. この結果と上記の結果の関係はまだわからない. その方向への考察として, 最後に associator と仮想組みひも図式についても述べる.

2 $P(2, 3)$ 移動からライデマイスター III 移動

2.1 組みひも図式と仮想組みひも図式

組みひもとはいくつかの閉区間 $\coprod [0, 1]$ の立方体 $[0, 1]^3$ への埋め込みで, それぞれのひもの端点が立方体の上下の線分 $[0, 1] \times \{\frac{1}{2}\} \times \{0, 1\}$ 上にあり, さらに高さ関数に関して単調減少になるようなものをいう.

組みひも図式とは立方体 $[0, 1]^3$ の中の組みひもの平面への射影図で, ひもの交差に上下の情報をつけたものをいう. 図式の中でそのような上下の情報のついた交差を**交点**と呼ぶ. 組みひも図式の集合を $\mathcal{D}$ とおく.

仮想組みひも図式とは, 組みひもの射影図で, ひものいくつかの交差に上下の情報がついているものをいう. すなわち, 向きづけられた単純閉曲線の平面へのはめこみで, 二重点に上下の情報が入った交点と入っていない**仮想交点**をもつものである (図 1).

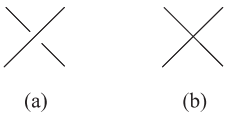


図 1 (a) 交点, (b) 仮想交点

仮想組みひも図式の集合を $\mathcal{VD}$ とおく. 組みひも図式は仮想組みひも図式であるので, $\mathcal{D} \subset \mathcal{VD}$ となる. 図 2 に表される組みひも図式の変形を **ライデマイスター III 移動** と呼ぶ (図 2) .

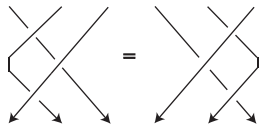


図 2 ライデマイスター III 移動

図 3 に表される仮想組みひも図式の変形を $P(2,3)$ **移動** と呼ぶ (図 3) .

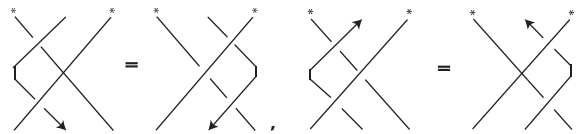


図 3 $P(2,3)$ 移動. *のついたひもの向きは任意

補足 1. $P(2,3)$ 移動は, N -グラフ [BP97] を用いて仮想組みひも図式を分岐理想単体分割 (branched triangulation) と思い, さらにその分岐を忘れて境界付き 3 次元多様体の単体分割と思うと, パッハナー (2,3) 移動に対応している (図 4) .

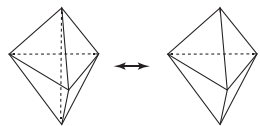
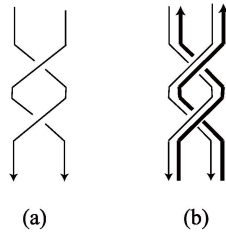


図 4 パッハナー (2,3) 移動.

2.2 $P(2,3)$ 移動からライデマイスター III 移動

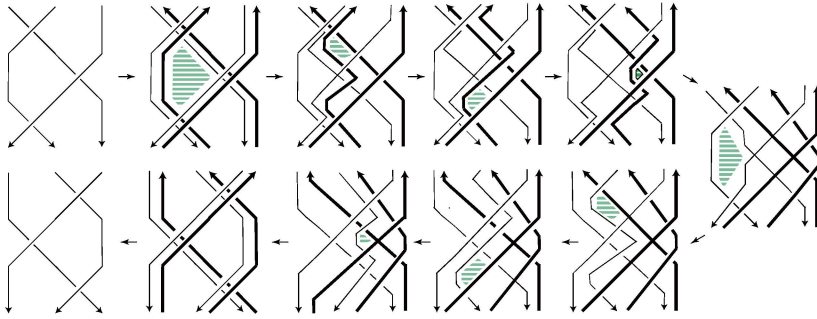
組みひも図式 D から別の組みひも図式 $\iota(D)$ を以下のように定める (図 5) .

- (1) 組みひも図式の各点の接ベクトルに対して $\pi/2$ の法ベクトル方向に二重化する.
- (2) (1) で新たに付け加えたひもの向きを変える.

図5 (a) 組みひも図式 D , (b) $\iota(D)$

定理 2. 組みひも図式 D と D' が 1 回のライデマイスター III 移動で移りあうとする. このとき $\iota(D)$ と $\iota(D')$ は 8 回の $P(2, 3)$ 移動で移りあう.

Proof. 図 6 より.

図6 ライデマイスター III 移動を 8 回の $P(2, 3)$ で実現する

□

3 5 角関係式から量子ヤン・バクスター方程式

3.1 ホップ代数の記法

$(A, \eta, m, \varepsilon, \Delta, \gamma)$ を体 k 上の有限次元ホップ代数とする. $A^* = \text{Hom}_k(A, k)$ とおき, ペアリングを

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: A^* \otimes A \rightarrow k, \quad f \otimes x \mapsto f(x),$$

と定める. また $n \geq 1$ に対して拡張された写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle: (A^*)^{\otimes n} \otimes A^{\otimes n} \rightarrow k$ を

$$\langle f_1 \otimes \cdots \otimes f_n, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \rangle = \langle f_1, x_1 \rangle \cdots \langle f_n, x_n \rangle.$$

と定める. このペアリングにより A のホップ代数構造の双対をとることで A^* にホップ代数の構造が入る. すなわち

$$A^* = (A^*, \eta_{A^*} = \varepsilon^*, m_{A^*} = \Delta^*, \varepsilon_{A^*} = \eta^*, \Delta_{A^*} = m^*, \gamma_{A^*} = \gamma^*).$$

ただし, それぞれの写像は以下で定義される.

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon^*(a), x \rangle &= a\varepsilon(x), \quad a \in k, x \in A, \\ \langle \Delta^*(f \otimes g), x \rangle &= \langle f \otimes g, \Delta(x) \rangle, \quad f, g \in A^*, x \in A, \\ \eta^*(f)a &= \langle f, \eta(a) \rangle, \quad f \in A^*, a \in k, \\ \langle m^*(f), x \otimes y \rangle &= \langle f, m(x \otimes y) \rangle, \quad f \in A^*, x, y \in A, \\ \langle \gamma^*(f), x \rangle &= \langle f, \gamma(x) \rangle, \quad f \in A^*, x \in A.\end{aligned}$$

多重余積の記法を定めておく. $\Delta^{(0)} = \text{id}$ とおき, $n \geq 1$ に対し帰納的に $\Delta^{(n)} = (\Delta \otimes 1^{\otimes n-1})\Delta^{(n-1)}$ と定める. $x \in A$ もしくは $x \in A^*$ に対して次の記法を用いる.

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \Delta^{(1)}(x) = \sum x' \otimes x'' = \sum x^{(1)} \otimes x^{(2)}, \\ (\Delta \otimes 1)\Delta(x) &= \Delta^{(2)}(x) = \sum x' \otimes x'' \otimes x''' = \sum x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)}, \\ \Delta^{(n)}(x) &= \sum x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n+1)}, \quad n \geq 3.\end{aligned}$$

異なる整数の組 $1 \leq j_1, \dots, j_m \leq l$ と $x = \sum x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \in A^{\otimes m}$ に対し,

$$x_{j_1 \dots j_m} = x_{j_1 \dots j_m}^{(l)} = \sum (x_1)_{j_1} \cdots (x_m)_{j_m} \in A^{\otimes l}, \quad (1)$$

と定める. ただし $(x_i)_{j_i}$ は $A^{\otimes l}$ の元で x_i を j_i 番目のテンソル積成分におき, 他を 1 としたものである. すなわち

$$(x_i)_{j_i} = 1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes 1,$$

で x_i は j_i 番目に置かれている. 例えば $x = \sum x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ に対して $x_{312} = \sum x_2 \otimes x_3 \otimes x_1 \in A^{\otimes 3}$ など.

3.2 ドリinfeldt ダブルとヤン・バクスター方程式

有限次元ホップ代数 A のドリinfeldt ダブルは準三角ホップ代数になる [Dri87]. すなわちドリinfeldt ダブルは普遍 R 行列をもち, ヤン・バクスター方程式の解である R 行列を生成する^{*1}.

$A^{\text{op}} = (A, \eta, m^{\text{op}}, \varepsilon, \Delta, \gamma^{-1}, \gamma)$ を, A の積 m を $m^{\text{op}} = m \circ \tau_{A,A}$ にしたホップ代数, $(A^{\text{op}})^* = (A^*, \varepsilon^*, \Delta^*, \eta^*, (m^{\text{op}})^*, (\gamma^{-1})^*, \gamma^*)$ を A^{op} の双対ホップ代数とする. 簡単のため $\bar{\gamma} = \gamma^{-1}$ とおく.

A の $(A^{\text{op}})^*$ への左からの作用 $A \otimes (A^{\text{op}})^* \rightarrow (A^{\text{op}})^*$, $a \otimes f \mapsto a \cdot f$, を $a, x \in A, f \in (A^{\text{op}})^*$ に対して

$$\langle a \cdot f, x \rangle = \sum \langle f, \bar{\gamma}(a'')xa' \rangle,$$

と定める. また $(A^{\text{op}})^*$ の A への右からの作用 $A \otimes (A^{\text{op}})^* \rightarrow A, a \otimes f \mapsto a^f$, を $a \in A, f \in (A^{\text{op}})^*$ に対して

$$a^f = \sum f(\bar{\gamma}(a''')a')a''$$

と定める.

ドリinfeldt ダブル

$$D(A) = ((A^{\text{op}})^* \otimes A, \eta_{D(A)}, m_{D(A)}, \varepsilon_{D(A)}, \Delta_{D(A)}, \gamma_{D(A)}, R)$$

は以下で定まる. 単位射は

$$\eta_{D(A)}(1) = \eta_{(A^{\text{op}})^* \otimes A}(1) = 1 \otimes 1.$$

^{*1} 有限次元表現をとるごとに R 行列が定まる

余単位射, 余積は $a \in A$, $f \in (A^{\text{op}})^*$ に対して

$$\begin{aligned}\varepsilon_{D(A)}(f \otimes a) &= \varepsilon_{(A^{\text{op}})^* \otimes A}(f \otimes a) = f(1)\varepsilon(a), \\ \Delta_{D(A)}(f \otimes a) &= \Delta_{(A^{\text{op}})^* \otimes A}(f \otimes a) = \sum f'' \otimes a' \otimes f' \otimes a'',\end{aligned}$$

と定める. ^{*2}

積は $a, b \in A$, $f, g \in (A^{\text{op}})^*$ に対して

$$\begin{aligned}m_{D(A)}((f \otimes a) \otimes (g \otimes b)) &= \sum f(a' \cdot g'') \otimes a''g'b \\ &= \sum fg(\bar{\gamma}(a''')?a') \otimes a''b,\end{aligned}$$

と定める. ここで? は不定元の入る場所を表す.

対合射は $a \in A$, $f \in (A^{\text{op}})^*$ に対して

$$\gamma_{D(A)}(f \otimes a) = \sum \gamma(a'') \cdot \bar{\gamma}^*(f') \otimes \gamma(a')\bar{\gamma}^*(f''),$$

と定める.

A の基底 $\{e_a\}_{a \in \mathcal{I}}$ とその双対基底 $\{e^a\}_{a \in \mathcal{I}}$ を用いると, 普遍 R 行列は以下で与えられる.

$$R = \sum_a (1 \otimes e_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in D(A) \otimes D(A).$$

すなわち, R は量子ヤン・バクスター方程式

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad \in D(A)^{\otimes 3}$$

を満たす.

3.3 ハイゼンベルグダブルと 5 角関係式

前節に引き続き A を有限次元ホップ代数とする. A のハイゼンベルグダブル

$$H(A) = (A^* \otimes A, \eta_{H(A)}, m_{H(A)})$$

は代数で, 積は $a, b \in A$, $f, g \in (A^{\text{op}})^*$ に対して

$$m_{H(A)}((f \otimes a) \otimes (g \otimes b)) = \sum fg(?a') \otimes a''b,$$

で定まる.

定理 3 ([Kas97]). A の基底 $\{e_a\}_{a \in \mathcal{I}}$ とその双対基底 $\{e^a\}_{a \in \mathcal{I}}$ に対して

$$S = \sum_a (1 \otimes e_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in H(A) \otimes H(A)$$

は 5 角関係式

$$S_{12}S_{13}S_{23} = S_{23}S_{12} \quad \in H(A)^{\otimes 3} \quad (2)$$

を満たす.

^{*2} $f \in (A^{\text{op}})^*$ に対して $(m^{\text{op}})^*(f) = \Delta^{\text{op}}(f) = \sum f'' \otimes f'$ となっていることに注意.

3.4 5 角関係式からヤン・バクスター方程式

R. Kashaev [Kas97] はドリinfeldt ダブル $D(A)$ が代数 $H(A) \otimes H(A)^{\text{op}}$ の部分代数としてみなせることを示した.

定理 4 ([Kas97, Suz18]). 代数の埋め込み (像への同型)

$$\phi: D(A) \rightarrow H(A) \otimes H(A)^{\text{op}}$$

で

$$\begin{aligned}\phi(1 \otimes e_a) &= \sum 1 \otimes e'_a \otimes 1 \otimes \gamma(e''_a) \in H(A) \otimes H(A)^{\text{op}}, \\ \phi(e^a \otimes 1) &= \sum (e^a)'' \otimes 1 \otimes \bar{\gamma}^*((e^a)') \otimes 1 \in H(A) \otimes H(A)^{\text{op}}.\end{aligned}$$

を満たすものが唯一存在する. これは以下で与えられる.

$$\phi = m_{H(A) \otimes H(A)^{\text{op}}} \circ ((1 \otimes \eta)^{\otimes 2} \otimes (\eta \otimes 1)^{\otimes 2}) \circ (1 \otimes \bar{\gamma}^* \otimes 1 \otimes \gamma) \circ (\Delta^{\text{op}} \otimes \Delta),$$

すなわち $f \in A^*$, $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned}\phi(f \otimes x) &= \sum \langle \bar{\gamma}^*(f')'', \gamma(x'')' \rangle f'' \otimes x' \otimes \bar{\gamma}^*(f')' \otimes \gamma(x'')'' \\ &= \sum \langle f', x''' \rangle f''' \otimes x' \otimes \bar{\gamma}^*(f'') \otimes \gamma(x'').\end{aligned}$$

ドリinfeldt ダブルの普遍 R 行列の $\phi^{\otimes 2}$ の像を

$$\begin{aligned}\hat{R} = \phi^{\otimes 2}(R) &= \sum_a \phi(1 \otimes e_a) \otimes \phi(e^a \otimes 1) \\ &= \sum 1 \otimes e'_a \otimes 1 \otimes \gamma(e''_a) \otimes (e^a)'' \otimes 1 \otimes \bar{\gamma}^*((e^a)') \otimes 1 \in (H(A) \otimes H(A)^{\text{op}})^{\otimes 2}\end{aligned}$$

とおく. $\phi^{\otimes 2}$ は代数の準同型より, $\hat{R}$ も量子ヤン・バクスター方程式の解である:

$$\hat{R}_{12} \hat{R}_{13} \hat{R}_{23} = \hat{R}_{23} \hat{R}_{13} \hat{R}_{12},$$

ただし $H(A) \otimes H(A)^{\text{op}}$ を一つの代数とみなして記法 (1) を用いた. もし $H(A) \otimes H(A)^{\text{op}}$ を代数 $H(A)$ と代数 $H(A)^{\text{op}}$ のテンソル積とみなして記法 (1) を用いると

$$\hat{R}_{1234} \hat{R}_{1256} \hat{R}_{3456} = \hat{R}_{3456} \hat{R}_{1256} \hat{R}_{1234}. \quad (3)$$

となる.

形式的に

$$\tilde{e}_a := \gamma(e_a), \quad \tilde{e}^b := \bar{\gamma}^*(e^b),$$

と定め,

$$\begin{aligned}S' &= \sum (1 \otimes \tilde{e}_a) \otimes (e^a \otimes 1) \in H(A)^{\text{op}} \otimes H(A), \\ S'' &= \sum (1 \otimes e_a) \otimes (\tilde{e}^a \otimes 1) \in H(A) \otimes H(A)^{\text{op}}, \\ \tilde{S} &= \sum (1 \otimes \tilde{e}_a) \otimes (\tilde{e}^a \otimes 1) \in H(A)^{\text{op}} \otimes H(A)^{\text{op}}.\end{aligned}$$

とおく. ドリinfeldt ダブルの普遍 R 行列の $\phi^{\otimes 2}$ による像は, ハイゼンベルグダブルのテンソル積の中で次のように 4 つの S テンソルの積に分解される.

定理 5 ([Kas97]).

$$\hat{R} = S''_{14} S_{13} \tilde{S}_{24} S'_{23} \in (H(A) \otimes H(A)^{\text{op}})^{\otimes 2}.$$

定理 6. $\hat{R}$ の満たす量子ヤン・バクスター方程式 (3) の両辺は 8 回の 5 角関係式で移りあう.

Proof. S テンソルの 5 角関係式 (2) を用いると以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} S_{23} S_{12} &= S_{12} S_{13} S_{23}, & S_{23} S'_{12} &= S'_{12} S'_{13} S_{23}, \\ S''_{23} S_{12} &= S_{12} S'_{13} S''_{23}, & S''_{23} S'_{12} &= S'_{12} S''_{13} S''_{23}, \\ S'_{23} S_{13} S''_{12} &= S''_{12} S'_{23}, & S'_{23} S'_{13} \tilde{S}_{12} &= \tilde{S}_{12} S'_{23}, \\ \tilde{S}_{23} S'_{13} S''_{12} &= S''_{12} S'_{23}, & \tilde{S}_{23} \tilde{S}_{13} \tilde{S}_{12} &= \tilde{S}_{12} \tilde{S}_{23}. \end{aligned}$$

これを用いると以下のように量子ヤン・バクスター方程式 (3) の両辺を 5 角関係式で移り合わせることができる.

$$\begin{aligned} \hat{R}_{1\bar{1},2\bar{2}} \hat{R}_{1\bar{1},3\bar{3}} \hat{R}_{2\bar{2},3\bar{3}} &= (S''_{12} S_{12} \tilde{S}_{12} \underline{S'_{12}}) (S''_{13} S_{13} \tilde{S}_{13} \underline{S'_{13}}) (\underline{S''_{23}} S_{23} \tilde{S}_{23} \underline{S'_{23}}) \\ &= S''_{12} S_{12} \tilde{S}_{12} S''_{13} S_{13} \underline{S'_{12}} \tilde{S}_{13} \underline{S''_{23}} S'_{13} S_{23} \tilde{S}_{23} S'_{23} \\ &= S''_{12} S_{12} \tilde{S}_{12} S''_{13} S_{13} \underline{S''_{23}} \underline{S'_{12}} S'_{13} S_{23} \tilde{S}_{23} S'_{23} \\ &= S''_{12} S_{12} \tilde{S}_{12} S''_{13} S_{13} S''_{23} \underline{S'_{12}} \underline{S'_{13}} \underline{S_{23}} \tilde{S}_{23} S'_{23} \\ &= S''_{12} S_{12} \tilde{S}_{12} S''_{13} S_{13} S''_{23} \underline{S_{23}} \underline{S'_{12}} \tilde{S}_{23} S'_{23} \\ &= S''_{12} \underline{S_{12}} \tilde{S}_{12} \underline{S'_{13}} S_{13} \underline{S''_{23}} S_{23} S'_{12} \tilde{S}_{23} S'_{23} \\ &= S''_{12} \underline{S_{12}} \underline{S'_{13}} \underline{S''_{23}} \tilde{S}_{12} S_{13} S_{23} S'_{12} \tilde{S}_{23} S'_{23} \\ &= S''_{12} \underline{S''_{23}} \underline{S_{12}} \tilde{S}_{12} S_{13} S_{23} S'_{12} \tilde{S}_{23} S'_{23} \\ &= S''_{12} S''_{23} \underline{S_{12}} \tilde{S}_{12} \underline{S_{13}} \underline{S_{23}} S_{12}, \tilde{S}_{23} S'_{23} \\ &= S''_{12} S''_{23} \underline{S_{12}} \underline{S_{13}} \underline{S_{23}} \tilde{S}_{12} S_{12}, \tilde{S}_{23} S'_{23} \\ &= S''_{12} S''_{23} S_{23} S_{12} \underline{\tilde{S}_{12}} S_{12}, \underline{\tilde{S}_{23}} S'_{23} \\ &= S''_{12} S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{12} \tilde{S}_{23} S_{12}, S'_{23} \\ &= S''_{12} S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{23} \tilde{S}_{13} \tilde{S}_{12} S_{12}, S'_{23} \\ &= S''_{12} S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{23} \tilde{S}_{13} \underline{\tilde{S}_{12}} S_{12}, \underline{S'_{23}} \\ &= S''_{12} S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{23} \tilde{S}_{13} \underline{\tilde{S}_{12}} \underline{S'_{23}} S_{12}, \\ &= S''_{12} S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{23} \tilde{S}_{13} \underline{S'_{23}} \underline{S'_{13}} \underline{\tilde{S}_{12}} S_{12}, \\ &= \underline{S''_{12}} S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{23} \tilde{S}_{13} S'_{23} S'_{13} \tilde{S}_{12} S_{12}, \\ &= S''_{23} S_{23} S_{12} \underline{S'_{12}} \underline{\tilde{S}_{23}} \tilde{S}_{13} S'_{23} S'_{13} \tilde{S}_{12} S_{12}, \\ &= S''_{23} S_{23} S_{12} \underline{\tilde{S}_{23}} \underline{S''_{13}} \underline{S''_{12}} \tilde{S}_{13} S'_{23} S'_{13} \tilde{S}_{12} S_{12}, \\ &= S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{23} S''_{13} \underline{S''_{12}} \tilde{S}_{13} \underline{S'_{23}} S'_{13} \tilde{S}_{12} S_{12}, \\ &= S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{23} S''_{13} \underline{\tilde{S}_{12}} \underline{S'_{23}} S'_{13} \tilde{S}_{12} S_{12}, \\ &= S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{23} S''_{13} \tilde{S}_{13} \underline{S'_{12}} \underline{S'_{23}} S'_{13} \tilde{S}_{12} S_{12}, \\ &= S''_{23} S_{23} S_{12} \tilde{S}_{23} S''_{13} \tilde{S}_{13} \underline{S_{13}} \underline{S''_{12}} S'_{13} \tilde{S}_{12} S_{12}, \\ &= (S''_{23} S_{23} \tilde{S}_{23} S'_{23}) (S''_{13} S_{13} \tilde{S}_{13} S'_{13}) (S''_{12} S_{12} \tilde{S}_{12} S_{12}) \\ &= \hat{R}_{2\bar{2},3\bar{3}} \hat{R}_{1\bar{1},3\bar{3}} \hat{R}_{1\bar{1},2\bar{2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

□

補足 7. 仮想組みひも図式の普遍量子不変量によって、ライデマイスター III 移動は量子ヤン・バクスター方程式に移り、 $P(2,3)$ 移動は 5 角関係式に移る。その対応により、図 6 に示した仮想組みひもの $P(2,3)$ 移動の列が式 (4) のハイゼンベルグ代数の 5 角関係式の列に移る (表 1)。普遍量子不変量については補足 8 を参照。

ライデマイスター III 移動	$\xrightarrow{\text{普遍量子不変量}}$	量子ヤン・バクスター方程式
$P(2,3)$ 移動	$\xrightarrow{\text{普遍量子不変量}}$	5 角関係式
$P(2,3)$ 移動 $\Rightarrow$ ライデマイスター III 移動 (図 6)	$\xrightarrow{\text{普遍量子不変量}}$	5 角関係式 $\Rightarrow$ 量子ヤン・バクスター方程式 (式 (4))

表 1 普遍量子不変量を介した幾何学と代数の対応

補足 8. [Suz18] において筆者はホップ代数のドリンフェルトダブルを使ったタングルの普遍量子不変量をハイゼンベルグダブルを使って再構成した。オリジナルの定義ではタングルの図式の各交点にドリンフェルトダブルの普遍 R 行列を対応させる一方、再構成ではタングルを写像 ι で移した仮想タングル図式の各交点に S テンソルを対応させた。仮想タングル図式を N -グラフ (補足 1) と思うと、仮想タングル図式の各交点に S テンソルを対応させることは、タングルの補空間の分岐理想単体分割の分岐理想四面体に S テンソルを対応させることと対応する。仮想タングル図式の $P(2,3)$ 移動は分岐理想単体分割の分岐パッハナー $(2,3)$ 移動に対応する。タングルの図式と補空間の分岐理想単体分割は八面体分割 (Octahedral decomposition) で対応し、その対応の下で補空間の分岐理想単体分割のパッハナー $(2,3)$ 移動がタングルの図式のライデマイスター III 移動を誘導する (表 2)。

タングル	$\xrightarrow{\iota}$	仮想タングル図式	$\xrightarrow{N\text{-グラフ}}$	タングルの補空間の分岐理想単体分割
交点	$\xrightarrow{\iota}$	4 つの交点	$\xrightarrow{N\text{-グラフ}}$	分岐理想八面体 (四面体 4 つ)
ライデマイスター III 移動	$\xrightarrow{\iota}$	$P(2,3)$ 移動 8 回	$\xrightarrow{N\text{-グラフ}}$	分岐パッハナー $(2,3)$ 移動 8 回

表 2 タングルと仮想組みひも図式とタングルの補空間の分岐理想単体分割の関係

4 Associator との関係

D.Bar-Natan と Z.Dancso [BD13] は空間 3 価グラフのコンチェビッチ不変量の変形を用いて四面体と associator を関係づけた。この節ではその概略を説明する。用語や図は [BD13] を参考にする。

4.1 空間 3 価グラフ

3 価グラフ (trivalent graph) とはすべての頂点が辺を 3 本持つグラフであって、辺は向きを持ち、一つの頂点に繋がっている辺は頂点の周りで順序 (mod 3) が付けられているものとする (図 7)。ここで 2 つの頂点の間の多重辺やループ、頂点のない円周も許す。

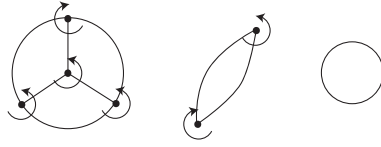


図7 3価グラフ

3 価グラフには**枠**が定まる。枠とは 3 価グラフ Γ の頂点の周りで図 8 のようにリボンをつくり、それを向きを保つように辺どうしではり合わせてできる Γ とホモトピックな曲面のことである。

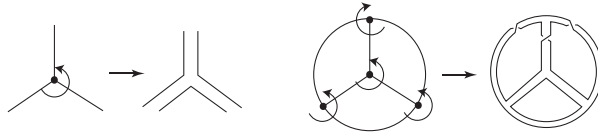


図8 3 価グラフの枠

空間 3 価グラフ (knotted trivalent graph) とは、枠付き 3 価グラフの埋め込みのことである。これは枠付き結び目や枠付き絡み目の拡張になっている。図式には黒板枠がついているものとする (図 9)。

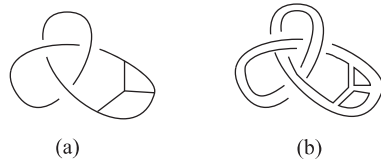


図9 (a) 空間 3 価グラフの図式, (b) (a) の図式の表す空間 3 価グラフ

点付き 3 価グラフ (dotted knotted trivalent graph) とは 3 価頂点と点と反点と呼ばれる 2 種類の 2 価の頂点を持つグラフである。3 価頂点のまわりはこれまでと同様に順序づけられており、枠や空間点付き 3 価グラフも同様に考えることができる (図 10)。

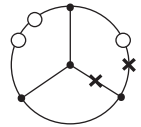


図10 点付き 3 価グラフ

4.2 コード図

点付き 3 価グラフ Γ をスケルトンに持つ n 次のコード図とは, $2n$ 本のコードの端点が Γ の辺に乗っているものをいう (図 11). 辺のイソトピーで移りあうものは同一視し, 組み合わせ的な情報のみを考える.

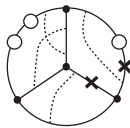


図 11 点付き 3 価グラフのコード図

Γ 上のコード図の空間 $\mathcal{A}(\Gamma)$ は, コード図の生成する $\mathbb{Q}$ 線形空間を 4 項関係式 (図 12) と頂点不変 (VI) 関係式 (図 13) で割った商である. ただし符号 $(-1)^{\rightarrow}$ はコードの付いている辺が頂点から出ているとき -1 , 頂点から入っているとき $+1$ を意味する.

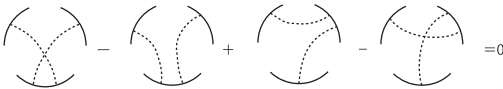


図 12 4 項関係式

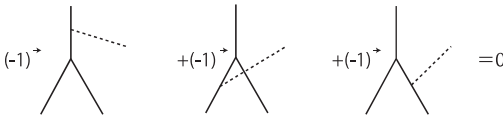


図 13 (VI) 関係式.

同様に, (3 価グラフではないが) n 個の向きをついた区間 $\downarrow_n = \sqcup \downarrow$ の上のコード図の空間を $\mathcal{A}(\downarrow_n)$ と表す. $i = 0, \dots, n+1$ に対し, 写像 $\Delta_i: \mathcal{A}(\downarrow_n) \rightarrow \mathcal{A}(\downarrow_{n+1})$ を, i 番目の区間を二重化し, そこに乗っているコードの端点を二重化されたどちらかに乗せるすべての方法を足しあげたものとする (図 14).

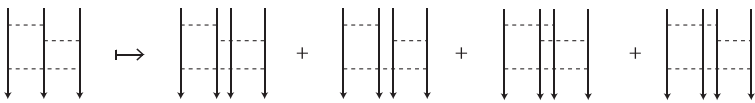


図 14 Δ_2 の例

ただし Δ_0 はコードのついていない区間を 1 番目に加え, 他の区間の順序を繰り下げる操作, Δ_{n+1} は $n+1$ 番目に加える操作とする.

$d_i: \mathcal{A}(\downarrow_n) \rightarrow \mathcal{A}(\downarrow_{n-1})$ を X の i 番目のひもとそこにつながっているコードを消したものをとする (図 15) .

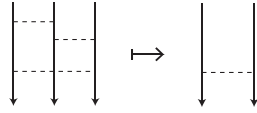


図 15 d_2 の例

$X \in \mathcal{A}(\downarrow_n)$ に対して $X_{j_1 \dots j_n} \in \mathcal{A}(\downarrow_n)$ を X に含まれる区間の順序の置換とする.

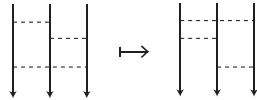


図 16 X_{231} の例

4.3 空間 3 価グラフの普遍有限型不変量を介した分岐理想四面体と associator の関係

Bar-Natan と Dancso [BD13] は, 空間 3 価グラフの普遍有限型不変量 (コンチェビッチ積分 [Kon93, Bar95, CD01, MO97, Dan10]) を, グラフの 4 つの変形操作 (orientation switch, edge delete, edge unzip, connected sum) すべてに対して同時に不変量の値が上手く振る舞うように*3定義を変形した. 新しい不変量は点付き空間 3 価グラフの不変量で, グラフ Γ の埋め込みに対して Γ をスケルトンにもつコード図の空間 $\mathcal{A}(\Gamma)$ に値を取る. これを $Z: \{\Gamma \text{ をスケルトンにもつ空間 3 価グラフ} \} \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma)$ と書くことにする.

Z を用いると, 四面体と associator を次のように対応付けることができる.

まず四面体の辺に対応する図 17(a) のような空間 3 価グラフ T を考える. ただし棒は黒板棒 (平面に沿った曲面) がついていているとする. このグラフの 4 つすべての頂点を通る木 (spanning tree) をひとつ選び, それ以外の辺を図 17(b) のように順序づける.

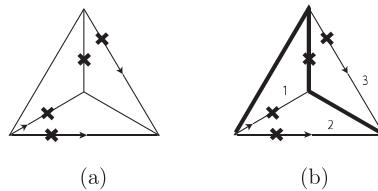
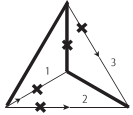


図 17 (a) 空間 3 価グラフ T , (b) T のひとつの spanning tree とそれ以外の辺の順序

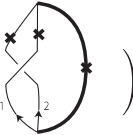
一般に n 個の頂点をもつ 3 価グラフ Γ のすべての頂点を通る木をひとつ選び, 木に含まれない辺に順序をつけると, コードの端点を木から動かすことで $\mathcal{A}(\Gamma)$ から $\mathcal{A}(\downarrow_{n-1})$ への同型写像が得られる. すなわち, 上記のように T の木を選ぶことで $\mathcal{A}(\Gamma)$ の元は $\mathcal{A}(\downarrow_3)$ の元と同一視される.

*3 コード図の空間の代数的操作と可換な「準同型」になるように.

定理 9 ([BD13]). $\Phi \in \mathcal{A}(\downarrow_3)$ と $R \in \mathcal{A}(\downarrow_2)$ を次のように定める.



$\Phi = Z \left(\right)$



$R = Z \left(\right)$

このとき Φ は *assocator* である*4. すなわち, 5 角関係式

$$\Delta_4(\Phi) \cdot \Delta_2(\Phi) \cdot \Delta_0(\Phi) = \Delta_1(\Phi) \cdot \Delta_3(\Phi)$$

(5)

と 6 角関係式

$$\Phi \cdot \Delta_2(R) \cdot \Phi_{231} = \Delta_3(R) \Phi_{213} (\Delta_0(R_{21}))_{213},$$

$$\Phi \cdot \Delta_2((R_{21})^{-1}) \cdot \Phi_{231} = \Delta_3((R_{21})^{-1}) \Phi_{213} (\Delta_0((R_{21})^{-1}))_{213}$$

が成り立ち, さらに $i = 1, 2, 3$ に対し $d_i(\Phi) = 1$, $\Phi_{321} = \Phi^{-1}$ が成り立つ.

さらに, Φ の満たす 5 角関係式 (5) は分岐四面体の分岐パツハナー (2, 3) 移動の Z による像と見ることができる. すなわち, (5) の左辺は四面体 3 つの貼り合わせに対応するグラフの Z による像である (図 18). ただし図の中の $*$ はグラフの頂点連結和を表しており, 双対グラフをとると四面体の面を張り合わせていることに対応する.

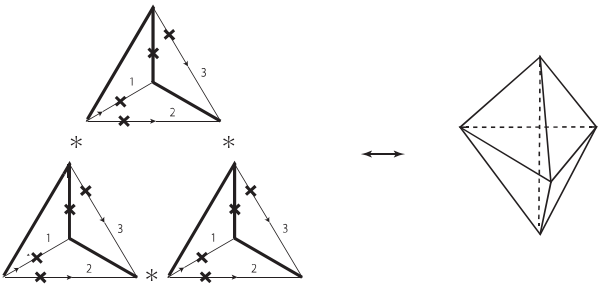


図 18 四面体 3 つの貼り合わせ

(5) の右辺は四面体 2 つの貼り合わせに対応するグラフの Z による像である (図 19) .

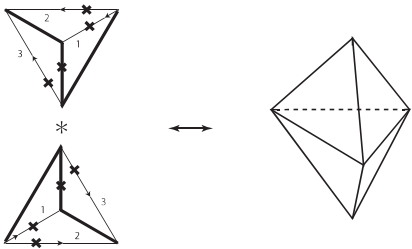


図 19 四面体 2 つの貼り合わせ

*4 [BD13] では Φ はより強い条件 (nice associator) を満たすことを示している.

補足 10. 定理 9 で得られた *associator* は、もともとの普遍有限型不変量の取り方により $\mathbb{C}$ 上のコード図の空間もしくは $\mathbb{Q}$ 上のコード図の空間に含まれる [Dri90, Dri91, Bar98].

補足 11. N -グラフ (補足 1) において、ひもの交点には頂点の順序付けられた分岐理想四面体が対応する。回転を法にしてそのような四面体は 2 つあり、片方が正交点、もう片方が負交点に対応する。上記の *associator* に対応するグラフは分岐理想四面体とすることができ、それを正交点と表すと、仮想組みひも図式の $P(2, 3)$ 移動が *associator* の 5 角関係式に対応する (表 3)。

仮想組みひも図式	$\xrightarrow{N\text{-グラフ}}$	3 次元多様体の分岐理想単体分割	
正交点	$\xrightarrow{N\text{-グラフ}}$	空間 3 価グラフ T (分岐理想四面体)	$\xrightarrow{Z}$ Associator
$P(2, 3)$ 移動	$\xrightarrow{N\text{-グラフ}}$	分岐パッハナー $(2, 3)$ 移動	$\xrightarrow{Z}$ Associator の 5 角関係式

表 3 仮想組みひも図式と理想単体分割とコンチェビッチ不変量の関係

参考文献

[Bar95] D. Bar-Natan, On the Vassiliev knot invariants, *Topology* **34** (1995) 423–472.

[Bar98] D. Bar-Natan, On Associators and the Grothendieck-Teichmuller Group I, *Selecta Mathematica* NS **4** (1998) 183–212.

[BD13] D. Bar-Natan, Z. Dancso, Homomorphic expansions for knotted trivalent graphs. *J. Knot Theory and Its Ramifications* **22** (01) (2013), 1250137.

[BP97] R. Benedetti, C. Petronio, Branched standard spines of 3-manifolds. *Lecture Notes in Mathematics*, 1653. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[CD01] S. V. Chmutov and D. Duzhin, The Kontsevich integral, *Acta Appl. Math.* **66** (2) (2001) 155–190.

[Dan10] Z. Dancso, On the Kontsevich integral for knotted trivalent graphs, *Algebr. Geom. Topol.* **10** (2010) 1317–1365.

[Dri87] V. G. Drinfel’d, Quantum groups. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Dri90] V. G. Drinfel’d, Quasi-Hopf algebras, *Leningrad Math. J.* **1** (1990) 1419–1457.

[Dri91] V. G. Drinfel’d, On quasitriangular Quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.* **2** (1991) 829–860.

[Fur10] H. Furusho, Pentagon and hexagon equations. *Ann. Math.* **171** (2010), 545–556.

[Kas97] R. M. Kashaev, The Heisenberg double and the pentagon relation. (English summary) *Algebra i Analiz* **8** (1996), no. 4, 63–74; translation in *St. Petersburg Math. J.* **8** (1997), no. 4, 585–592.

[Kon93] M. Kontsevich, Vassiliev’s knot invariants, *Adv. Soviet Math.* **16** (2) (1993) 137–150.

[MO97] J. Murakami and T. Ohtsuki, Topological quantum field theory for the universal quantum invariant, *Commun. Math. Phys.* **188** (3) (1997) 501–520.

[Suz18] S. Suzuki, The universal quantum invariant and colored ideal triangulations. *Algebr. Geom. Topol.* **18** (2018), 3363–3402.