

Smorynski の問題について

九大理 上江洲忠弘 (Tadahiro Uem)

C. Smorynski は [3] で次の問題を提出した.

Axiomatize the equality and apartness fragments
of the theory DLO^+ .

ここに, DLO^+ は dense linear order の intuitionistic theory で, 次の公理を持つものである.

$$\neg x < x, \quad x < y \wedge y < z \supset x < z, \quad x < y \supset x < z \vee z < y,$$

$$\exists x \exists y \ x < y,$$

$$\exists z ((x < y \supset x < z < y) \wedge (y < x \supset y < z < x) \wedge (x = y \supset x = z = u)).$$

また, DLO^+ に於ける apartness の概念は

$$x \# y \iff x < y \vee y < x$$

で与えられ, equality は

$$x = y \iff \neg x \# y$$

で与えられる.

以下に於て, この問題に対する一つの解答を与える.

1. 準備

言語 L の節 (Sequng) の集合 G と, L の推論図の集合 S との組 (G, S) を言語 L 上の (形式) 理論 という. G の元も理論 (G, S) の 始節 という.

例えば, LK は, $\Rightarrow \rightarrow \Rightarrow$ の形の節全てから成る集合 G_K と LK の全ての推論図から成る集合 S_K との組 (G_K, S_K) と見做せば, 理論である.

理論の証明図, 証明可能性等の概念は Gentzen の LK, LJ と同様に定義する.

理論 $T (= (G, S))$ と節の集合 G' に対し, 理論 $(G \cup G', S)$ で節 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が証明可能のとき

$$G' \vdash_T \Gamma \rightarrow \Delta$$

とかく.

推論図の集合が, exchange, contraction, cut 及び substitution:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \theta \rightarrow \Delta \theta} \quad (\theta \text{ は代入})$$

から成る理論を RSL という. RSL は J.A. Robinson [2] の resolution にちなむ.

本稿で, LJ は Gentzen の LJ を次のように変形したものを指す:

- (1) 節はその右辺に2つ以上論理式があってもよい。
 (2) $(\rightarrow\supset)$, $(\rightarrow\neg)$ 以外の推論図は LK の推論図で, 推論図 $(\rightarrow\supset)$ と $(\rightarrow\neg)$ とは Gentzen の LJ の推論図とする。

2. 理論 AP^+

と < とを 2 項述語記号, A を 3 項述語記号とする。

次の節から成る集合を G_0 とする:

$$A(x, u, y), x < y \rightarrow x < u ; \quad A(x, u, y), y < x \rightarrow u < x ;$$

$$A(x, u, y), x < y \rightarrow u < y ; \quad A(x, u, y), y < x \rightarrow y < u ;$$

$$A(x, u, y), x < u \rightarrow u < y ; \quad A(x, u, y), u < x \rightarrow y < u ;$$

$$A(x, u, y), u < y \rightarrow x < u ; \quad A(x, u, y), y < u \rightarrow u < x ;$$

$$x < x \rightarrow ;$$

$$x < y, y < z \rightarrow x < z ;$$

$$x < y \rightarrow x < z, z < y ;$$

$$x < y \rightarrow x \# y ;$$

$$y < x \rightarrow x \# y ;$$

$$x \# y \rightarrow x < y, y < x .$$

節 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow \beta_1, \dots, \beta_n$ に対し, $m \neq 0, n \neq 0$ のとき, 論理式 $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m \supset \beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$ をこの 節の論理式 という. また, $m=0, n \neq 0$ のときは論理式 $\beta_1 \vee \dots \vee \beta_n$ を, $m \neq 0, n=0$ のときは論理式 $\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m)$ をそれぞれこの 節の論理式 という.

述語記号 A を持つ素論理式の列 $A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k)$ に対し, 節 $a_1 \# b_1, \dots, a_m \# b_m \rightarrow c_1 \# d_1, \dots, c_n \# d_n$ が次の条件 (1), (2) をみたすとき, この節の論理式を, この列の 切片 という.

(1) $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ のいずれも $x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k$ のいずれかである.

(2) 列 $A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k)$ の部分列 Γ で,

$$G_0 \mid_{\text{RSL}} \Gamma, a_1 \# b_1, \dots, a_m \# b_m \rightarrow c_1 \# d_1, \dots, c_n \# d_n$$

なるものがある.

列 $A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k)$ の切片は有限個である. その全ての切片を $\wedge$ でつないで得られる論理式を

$$E_k(x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k)$$

で表し, 次の論理式を F_k で表す.

$$\forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_k \forall y_k \exists u_k E_k(x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k).$$

LJ に始節として

$$\rightarrow \exists x \exists y x \# y ; \rightarrow F_1 ; \rightarrow F_2 ; \dots$$

を付加して得られる理論を AP^+ とする.

定理 DLO^+ は AP^+ 上 conservative である.

従って, AP^+ は DLO^+ の apartness の部分を公理化したものである.

3. 定理の証明

言語 $\{\#, <, A\}$ の推論図で, 次の形のものを全てから成る集合を S_0 とする:

$$\frac{A(x, u, y), \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta},$$

但し, 変数 u は, x, y と異なり, また, 節 $\Gamma \rightarrow \Delta$ に自由に現れない.

LJ に G_0 と S_0 を付加し, 更に, 始節 $\rightarrow \exists x \exists y x \# y$ を付加して得られる理論を $DLO^+(A)$ で表す.

次の命題は明らかである。

命題1 $DLO^+(A)$ は DLO^+ 上 conservative である。

LJ に S_0 を付加して得られる理論を $LJ+S_0$ とし,
 $LJ+S_0$ から cut を除いた理論を $LJ+S_0-Cut$ で表す。

$\bar{G}_0 = \{ \Gamma \rightarrow \Delta \mid \Gamma \rightarrow \Delta \text{ は言語 } \{ \#, A \} \text{ の節で, } G_0 \vdash_{RSL} \Gamma \rightarrow \Delta \}$
 とおく。

Gentzen の Hauptsatz と同様に, 次の命題を得る。

命題2 言語 $\{ \#, A \}$ の節 $\Gamma \rightarrow \Delta$ に対し, $G_0 \vdash_{LJ+S_0} \Gamma \rightarrow \Delta$
 ならば, $\bar{G}_0 \vdash_{LJ+S_0-Cut} \Gamma \rightarrow \Delta$ である。

命題2は LJ も LK にしても成り立つ。また, $LJ+S_0$ を
 LJ にしても LK にしても成り立つ。同様の Hauptsatz の変形
 が [1] にあつ。

命題3 述語記号は#のみを含む節 $\Gamma \rightarrow \Delta$ に対し,

$$\overline{G}_0 \mid \frac{}{LJ+S_0-Cut} A(a_1, b_1, c_1), \dots, A(a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta$$

ならば,

$$\vdash \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_n \forall y_n \exists u_n E_{m+n}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta$$

なる自然数 n がある.

(証明) $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m, \Gamma \rightarrow \Delta$ を述語記号は#のみを含む節とし, P を節

$$\Gamma_1, A(a_1, b_1, c_1), \Gamma_2, \dots, \Gamma_m, A(a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta$$

の $\overline{G}_0$ からの $LJ+S_0-Cut$ の証明図とする. P に含まれる推論図の個数 l に関する帰納法により

$$\vdash \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_n \forall y_n \exists u_n E_{m+n}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m), \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m, \Gamma \rightarrow \Delta$$

なる n があることを示す.

$l=1$ のときは E_n の定義より明らか.

$l>1$ のとき, 次の3通りの場合が考えられる:

(1) P の最後の推論図が

$$\frac{A(x, u, y), \Gamma_0 \rightarrow \Delta}{\Gamma_0 \rightarrow \Delta}$$

の場合,

(2) $\mathcal{P}$ の最後の推論図が

$$\frac{\Gamma_2, A(a_2, b_2, c_2), \dots, \Gamma_m, A(a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta}{A(a_1, b_1, c_1), \Gamma_2, A(a_2, b_2, c_2), \dots, \Gamma_m, A(a_m, b_m, c_m), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

の場合,

(3) (1), (2) 以外の場合.

(1) の時, 帰納法の仮定により

$$\vdash_{\mathcal{L}} \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_n \forall y_n \exists u_n E_{(m+1)+n}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, x, u, y, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m), \Gamma_1, \dots, \Gamma_m, \Gamma \rightarrow \Delta.$$

ここで, u の条件より

$$\vdash_{\mathcal{L}} \forall x_1 \forall y_1 \exists u_1 \dots \forall x_{m+1} \forall y_{m+1} \exists u_{m+1} E_{m+n+1}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_{m+1}, u_{m+1}, y_{m+1}, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m), \Gamma_1, \dots, \Gamma_m, \Gamma \rightarrow \Delta.$$

(2) の時,

$$\begin{aligned} \vdash_{\mathcal{L}} E_{m+n}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_m, b_m, c_m) \\ \rightarrow E_{m+n-1}(x_1, u_1, y_1, \dots, x_n, u_n, y_n, a_2, b_2, c_2, \dots, a_m, b_m, c_m) \end{aligned}$$

であるから, 帰納法の仮定から明らか.

(3) の時, 帰納法の仮定から明らか.

(証明終)

命題 4 どの k に対しても $\vdash_{\text{DLO}^*} F_k$.

(証明) $\vdash_{\text{DLO}^*(A)} A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k) \rightarrow E_k(x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k)$

であるから, $\frac{}{DLO^+(A)} F_k$. 従って命題1より $\frac{}{DLO^+} F_k$.
(証明終)

(定理の証明) 命題4により, DLO^+ は AP^+ の拡張である.

併 $\Gamma \rightarrow \Delta$ は述語記号 $\langle$ を含んでいないとし, $\frac{}{DLO^+} \Gamma \rightarrow \Delta$ とする.

命題1より $\frac{}{DLO^+(A)} \Gamma \rightarrow \Delta$.

従って, $G_0 \frac{}{LJ+S_0} \exists x \exists y x \# y, \Gamma \rightarrow \Delta$.

よって命題2より $G_0 \frac{}{LJ+S_0-Cut} \exists x \exists y x \# y, \Gamma \rightarrow \Delta$.

従って, 命題3より $\frac{}{LJ} F_n, \exists x \exists y x \# y, \Gamma \rightarrow \Delta$ なる n がある.

従って $\frac{}{AP^+} \Gamma \rightarrow \Delta$.

よって DLO^+ は AP^+ 上 conservative である.

(証明終)

4. 注意

(i) Smoryński は [3] で, 次の公理を持つ理論 AP_0^+ が DLO^+ の *apartness* の部分であるかと予想していた.

AP_{ω}^0 の公理:

$$\neg x \# x,$$

$$x \# y \supset y \# x,$$

$$x \# y \supset x \# z \vee z \# y,$$

$$\exists x \exists y \ x \# y,$$

$$\forall x \forall y \exists x_1 \dots \exists x_n \text{Exp}_{n+2}(x, y, x_1, \dots, x_n)$$

($n \geq 1$),

但し, $\text{Exp}_k(a_1, \dots, a_n)$ は論理式

$$\bigwedge_{i,j} (a_i \# a_j \supset \bigwedge_{k \neq l} a_k \# a_l)$$

を表す.

しかし次の命題が成り立つので, この予想は間違っていた.

命題 どの k に対しても $\frac{}{AP_{\omega}^0} F_k \rightarrow F_{k+1}$ ではない.

証明は Kripke model を作って得られる.

(ii) Σ を述語記号 A を持つ素論理式の列

$$A(x_1, u_1, y_1), \dots, A(x_k, u_k, y_k)$$

とし, $\Gamma \rightarrow \Delta$ も許

$$a_1 \# b_1, \dots, a_m \# b_m \rightarrow c_1 \# d_1, \dots, c_n \# d_n$$

とする. 但し, $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ のいずれ

も $x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k$ のいずれかであるとする.

A_k を次の条件 (*) をみたす対応 $\alpha: \{x_1, u_1, y_1, \dots, x_k, u_k, y_k\} \rightarrow 3^k$ の全体とする.

(*) $1 \leq i \leq k$ なる全ての i に対し,

$$\alpha(x_i) < \alpha(u_i) < \alpha(y_i), \alpha(y_i) < \alpha(u_i) < \alpha(x_i) \text{ 又は } \alpha(x_i) = \alpha(u_i) = \alpha(y_i).$$

このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 次の2つの条件は同等である.

(1) Σ の切片 Ω で $\overline{\text{LJ}} \Omega, \Gamma \rightarrow \Delta$ なるものがある.

(2) A_k のどの元 α に対しても $\Gamma \rightarrow \Delta$ は真である.

ここに, $v \# w$ の α による解釈は $\alpha(v) \neq \alpha(w)$ とする.

(証明) 条件 (1) と $\overline{G}_0 \overline{\text{LJ-Cut}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$ とは同等である.

$\Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$ は論理記号を含まないから, $\overline{G}_0 \overline{\text{LJ-Cut}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$ と

$\overline{G}_0 \overline{\text{LK-Cut}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$ とは同等である. また, 命題2の注意に

より, $\overline{G}_0 \overline{\text{LK-Cut}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$ と $G_0 \overline{\text{LK}} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$ とは同等である.

$\tilde{\Sigma}$ を Σ の $A(x, u, y)$ なる形の論理式も全て

$$x < u < y \vee y < u < x \vee x = y = u$$

なる形の論理式におきかえたものとし, G_1 を次の節から成る集合とする.

$$x < x \rightarrow ; x < y, y < z \rightarrow x < z ; x < y \rightarrow x < z, z < y ;$$

$$x < y \rightarrow x \# y ; \quad y < x \rightarrow x \# y ; \quad x \# y \rightarrow x < y, y < x.$$

このとき, $G_0 \vdash_{LK} \Sigma, \Gamma \rightarrow \Delta$ と $G_1 \vdash_{LK} \tilde{\Sigma}, \Gamma \rightarrow \Delta$ とは同等であり, 更に, $G_1 \vdash_{LK} \tilde{\Sigma}, \Gamma \rightarrow \Delta$ と条件 (2) とは同等である.

(証明終)

上の命題から, 切片の定義の条件 (2) を次の条件 (2°) にかえてもよいことがわかる.

(2°) A_k のどの元に対しても, 節

$$a_1 \# b_1, \dots, a_m \# b_m \rightarrow c_1 \# d_1, \dots, c_n \# d_n$$

は真である.

文 献

- [1] 赤星 順 : 種々の除去定理, 修士論文 (九州大学) (1981) .
- [2] J.A. Robinson : A machine-oriented logic based on the resolution principle, J. ACM, 12 (1965), 23-41 .
- [3] C. Smoryński : On axiomatizing fragments, J.S.L., 42 (1977) 530-544 .