

量子スピン系の正エネルギー表現

九州大学数理学研究科 松井卓 (Taku Matsui)
matsui@math.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

A を unital C^* 代数 (A, α_t) $t \in \mathbb{R}$ を C^* 力学系とする。このとき、基底状態および正エネルギー表現を次のように定義する。

定義 1 A の状態 φ が C^* 力学系 (A, α_t) $t \in \mathbb{R}$ の基底状態であるとは

$$\frac{1}{i} \varphi(Q^* \delta(Q)) \geq 0 \quad Q \in D(\delta)$$

が成立すること。ただし δ は、 α_t の generator $\delta(Q) = \left. \frac{d}{dt} \alpha_t(Q) \right|_{t=0}$
 $D(\delta)$ は δ の定義域である。

定義 2 C^* 代数 A のヒルベルト空間 H 上の表現 $\{\pi(\cdot), H\}$ が正エネルギー表現であるとは、 H 上で正自己共役作用素 H_π が存在し

$$H_\pi \geq 0 \quad \pi(\alpha_t(Q)) = e^{itH_\pi} \pi(Q) e^{-itH_\pi} \quad (\forall Q \in A)$$

が成立すること。

基底状態は自動的に定義より α_t の不変状態で、その GNS 表現は正エネルギー表現となる。基底状態の GNS 表現を基底状態表現と呼ぶことにする。一般には基底状態が存在するかどうかは分からない。以下の数理物理で良く考察される例では基底状態は常に存在する。そこで基底状態の一意性と分類を調べたい。

A を n^∞ 型の UHF 代数とし、各テンソル積の成分は整数 j で指定されるとする。

$A = \overline{\bigotimes_Z M_n(C)}^{C^*}$ テンソル成分 j でのみ非自明な $Q \in M_n(C)$ をもつ A の元を $Q^{(j)}$ であらわす。 A_{loc} をすべての $Q^{(j)}$ の形の元で代数的に生成される稠密な部分代数とする。 τ_j ($j \in \mathbb{Z}$) を整数格子上のシフトとする。 $\tau_j(Q^{(k)}) = Q^{(j+k)}$ 量子スピン系の時間発展は次の 1 係数自己同系群であらわされる。

$h = h^* \in A_{loc}$ に対して (pre) generator δ を

$$\delta(Q) = i \sum_{j \in \mathbb{Z}} [\tau_j(h), Q] \quad (Q \in A_{loc})$$

で定める。

形式的に $H = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau_j(h)$ と置いて H を体積無限大でのハミルトニアンと呼ぶ。

すると $\delta(Q) = i[H, Q]$ と書ける。 δ は、generator に拡張でき生成する 1 係数自己同系群を α_t とする。

基底状態全体を何らかの形で記述するのが目的であるが、上の設定だけでは一般的すぎてよく分からない。そこで問題を分離して (1) 正エネルギー表現としては、どのようなものがあるか? (2) 正エネルギー表現ではスペクトルの下端が固有値になるか? の 2 つのステップで考える。ここでは最初の問題について考察する。

2 スペクトルギャップ

正エネルギー表現は、場の量子論の数学的研究では基本的な概念である。しかし massless field theory (質量零の粒子をもつ系 例えば量子電磁力学) では、赤外表現と呼ばれる ‘非物理的’ な正エネルギー表現が統制のつかないほど存在する。この状況を避けるために次の仮定を置く。

仮定 3 Λ を $\mathbb{Z}$ の有限部分集合とする。

$$H_\Lambda = \sum_{j \in \Lambda} \tau_j(h)$$

と定める。 H_Λ を有限行列と見なし、この最低固有値を E_Λ とおく。

(1) Λ に対してある正数 ε_Λ と Λ によらない正数 γ があり

$$(\varepsilon_\Lambda, \varepsilon_\Lambda + \gamma) \cap \text{Spec}(H_\Lambda) = \emptyset$$

ただし $\text{Spec}(H_\Lambda)$ は、 H_Λ のスペクトルのなす集合をあらわす。

(2) ある数 e_∞ があり (1) の ε_Λ に対して

$$\lim_{\Lambda \rightarrow Z} |E_\Lambda - |\Lambda|e_\infty| = 0, \quad \lim_{\Lambda \rightarrow Z} \varepsilon_\Lambda = 0$$

注意 条件 (1) が 赤外表現を排除するスペクトルギャップの条件である。

SU(2) 不変なスピンの整数のヘイゼンベルグ模型では成立しスピンの

半奇数では成立しないと予想されている。(ハルデー予想)

条件 (2) は多くの例で確かめられるが一般的に成立するのが確かめられるのは

$$\lim_{\Lambda \rightarrow Z} \left| \frac{E_\Lambda}{|\Lambda|} - e_\infty \right| = 0$$

である。条件 (2) が今の設定で成立しない例があるかどうかは不明である。

上の仮定のもとで次が証明できる。

定理 4 ある区間 $\Lambda = [n, m]$ ($n < m$) が存在し、任意の正エネルギー表現は $H - H_\Lambda$ の基底状態表現と準同値である。 $\tilde{\delta}(Q) = i[H - H_\Lambda, Q]$ が生成する C^* 力学系の基底状態をあたえるベクトル ξ が、正エネルギー表現空間に存在する。

さらに、この ξ の作る状態は有限系 $H_{\Lambda'} - H_\Lambda$ ($\Lambda \subset \Lambda'$) の基底状態の熱力学的極限 $\Lambda' \rightarrow Z$ として得られる。

この定理は、‘正エネルギー表現全体’をより(容易ではないが)具体的な固有ベクトルの極限で表示出来ることをしめしている。この定理とさらに種々の解析をするとつぎが得られる。

例 5

(1) $h_0 = h_0^*$ と $h_1 = h_1^*$ は、前の h と同じ条件をみたすとする。

$h_0 = h_0^*$ の最低固有値の重複度は 1 とする。

正のパラメータ λ を十分大きくとると $h = \lambda h_0 + h_1$ について仮定 3 が成立する。このとき $H = \sum_{j \in Z} \tau_j(h)$ の基底状態は一意である。

(2) スピン 1/2 の XXZ 模型を考える。

$$H = - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ \sigma_x^{(j)} \sigma_x^{(j+1)} + \sigma_y^{(j)} \sigma_y^{(j+1)} + \Delta \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)} \right\}$$

実パラメータ Δ が $\Delta > 1$ または $\Delta \ll -1$ を満たすとき (factor)
正エネルギー表現空間の同値類は 4 つありそれらはある程度具体的に記述可能である。

参考文献

[1] O.Bratteli and D.Robinson

Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II (new version)
1997 Springer Verlag

[2] T.Matsui

Translational Symmetry Breaking and Soliton Sectors for Massive
Quantum Spin Models in 1+1 Dimension.
to appear in Commun.Math.Phys.