

K knot のある不変性

日大 農獣医 徳田 広太郎

K knot の結び量の定理は与えられた tame knot $K = (R^3, S')$ に対して結び量という実数 $Q(K)$ を定義し、 $Q(K)$ は K の同位変形によって不変であることを示す²⁾。この定理の逆は成立しない。適当な条件を与えて、この定理の逆から K knot の不変性が見つけられないであろうか。この論文はこの問題に対する1つの解答を与えるものである。

§ 1. 結び量の定理

1.1 K knot の graph¹⁾

1つの tame knot $K = (R^3, S')$ と R^3 中の1つの平面 π が与えられると、 π 上の regular diagram ($R.D.$ と略して書く) が定まる。この $R.D.$ は K knot と見なすことができ

る。 n 個の交点をもつ R.D. は π を $n+2$ 個の領域に分ける。これらの領域の中で弧を境界の一部として共有する 2 つの領域は異なるものとするれば、すべての領域は 2 種類に分けることができる。この中で無限遠点 P_∞ の属する方を W とし、他を B とする。 B と W の何れの場合にも次の graph を定義する。 W の場合と同様であるから B の場合だけについて説明する。

B の領域 R_i の内部に頂点というノット A_i を定め、 $A_i \in R_i$, $A_j \in R_j$ なる $\overline{R_i}$, $\overline{R_j}$ が交点 C_{ij} を共有し、 R_i から見て C_{ij} の下の辺が右にあれば弧 $A_i C_{ij} A_j$ に $+$, 左にあれば $-$ の符号をつける。そうすると R_j から見てと同じ符号がつく。こうしてできたすべての頂点と弧からなる図形を K の graph といい、 $g(K)$ と表わす。同様に W における K の graph を $g'(K)$ と表わす。 $g(K)$ と $g'(K)$ を K の dual graph という。

K と π が与えられると、 $g(K)$ と $g'(K)$ はそれぞれ一意に定まり、 $g(K)$ または $g'(K)$ が与えられると K は一意に復元できる。

1.2 knot の結び量 2)

n 個の頂点をもつ graph $g(K)$ が与えられると、次のよ

うにして行列 $A(k) = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, を作る。
 A_i を $g(k)$ の 1 つの頂点とする。 $i \neq j$ ならば A_i と A_j
 を結ぶすべての弧に対して

$$a_{ij} = (\text{+の弧の数}) - (\text{-の弧の数}),$$

A_i を端点にもつすべての弧に対して

$$a_{ii} = -\{(\text{+の弧の数}) - (\text{-の弧の数})\}$$

とする。そうすれば $A(k)$ は n 次の対称行列になる。

$A(k)$ から任意の 1 行 1 列を除いた行列式の絶対値を $Q(k)$
 と表わす。 Alexander Briggs³⁾ の表の 41 knot では

$$g(k) = \text{図 1} \quad A(k) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad Q(k) = 5.$$

図 1. knot の 結び 量

$Q(k)$ は次の性質をもつ。

(1.1). (結び量の定理). k_1 と k_2 が同型であることを $k_1 \equiv k_2$
 と表わせば

$$k_1 \equiv k_2 \quad \text{ならば} \quad Q(k_1) = Q(k_2).$$

(1.2). (1.1) の系 $g(K)$ と $g'(K)$ を K の dual graph とすれば

$$Q(g(K)) = Q(g'(K)).$$

(1.3). K_0 を trivial knot とすれば

$$Q(K_0) = 1.$$

$Q(K)$ を K の 結び量 (knotting quantity) と定義する。
 $Q(K)$ は $g(K)$ の 交点数の概念によって定義されている。

§2. Knot の基本変形

knot の同位変形を R.D. で見れば、交点以外の所では同位変形であるが、交点では singularity が起る。これらの singularity は図2で示す3種類の変形によって表わされる。この変形を初等基本変形 (elementary fundamental operation) といい、簡単に E.F.O. と表わす。従って knot の同位変形は R.D. では同位変形と E.F.O. の有限回の組合せによって表わすことができる。この変形を基本変形 (fundamental operation) といい、F.O. と表わす。

knot K の E.F.O. を K の graph とその dual graph で表わすと図 2 になる。図中 O_1, O_1' 等はそれぞれ図に示した E.F.O. を表わし、 --- , $\text{---}(-)\text{---}$ は辺の符号がそれぞれ $+$, $-$ であることを示す。

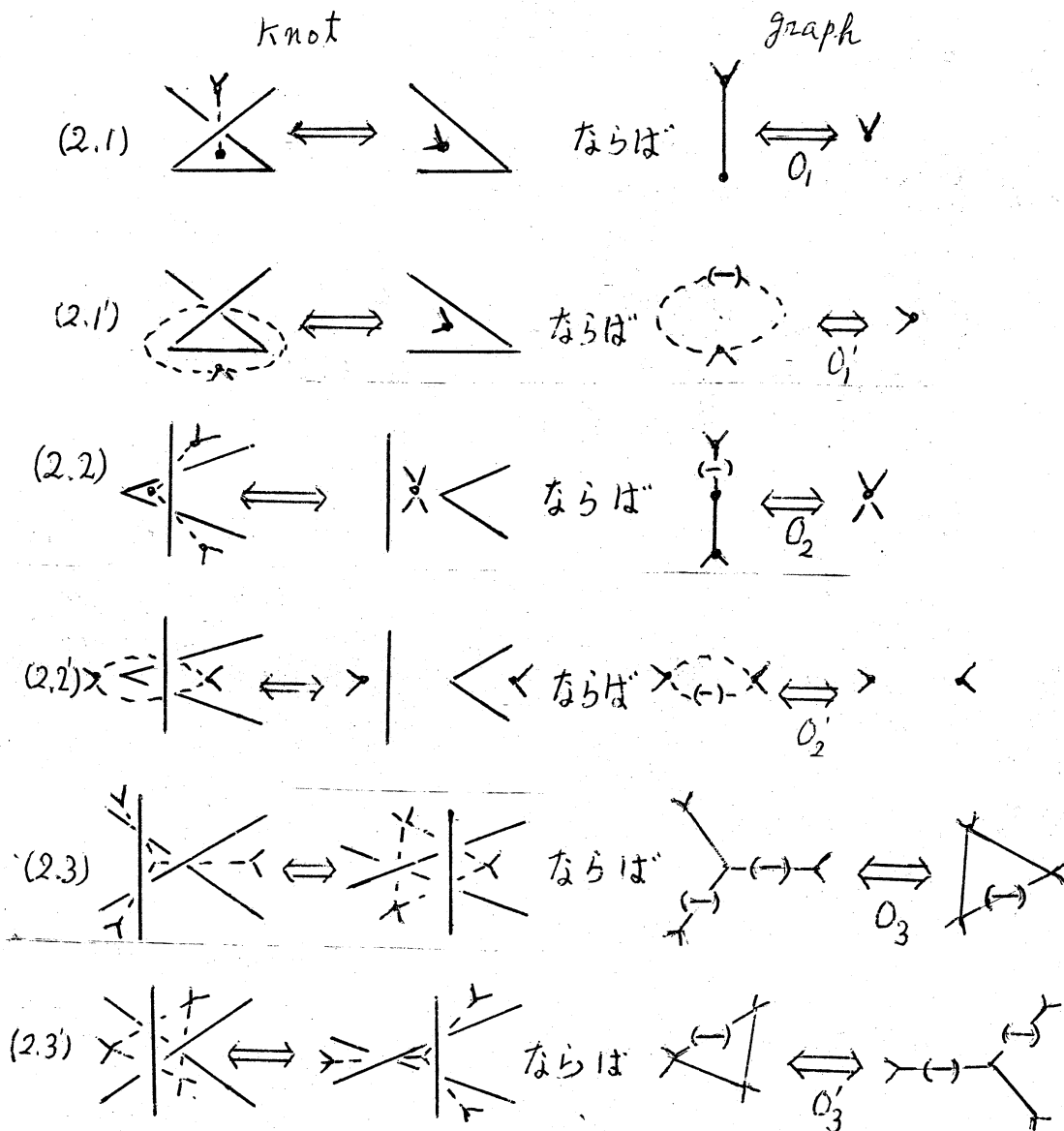


図 2. knot と graph の基本変形

図3はこの論文でよく使う図2のE, F, O, から誘導された変形を示す(次の図の記号はp.1/参照)。

$$(2.4) \quad \text{X} \overline{2} \text{X} \Leftrightarrow \text{X} \overline{2} \text{X} \quad \therefore \quad \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{O_1} \text{X} \overline{1} \text{X} \xrightarrow{O_3} \text{X} \overline{1} \text{X} \xrightarrow{\cong} \text{X} \overline{2} \text{X}$$

(2.5): (2.4)の符号を変えたもの

$$(2.6) \quad \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{O_1} \text{X} \overline{2} \text{X} \quad \therefore \quad \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{O_3} \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{O_1} \text{X} \overline{2} \text{X}$$

$$(2.7) \quad \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{O_1} \text{X} \overline{2} \text{X} \quad \therefore \quad \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{O_3} \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{O_1} \text{X} \overline{2} \text{X}$$

$$\therefore \quad \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{O_3} \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{\cong} \text{X} \overline{2} \text{X} \xrightarrow{(2.6)} \text{X} \overline{2} \text{X}$$

図3. 基本変形の応用

§3 Knot の結び量の定理の逆に関する問題

問題 1. (結び量の定理の逆), $Q(K_1) = Q(K_2)$ ならば $K_1 \cong K_2$ か.

この問題は成立たない。何故ならば $Q(4_1) = Q(5_1)$ であるが $4_1 \not\cong 5_1$ である。

問題 2. $K_1 \cong K_2$ ならば $A(K_1) = A(K_2)$ か。

この問題も成立たない。何故ならば $g(3,1) \cong g'(3,1)$ であるが $A(g(3,1)) \neq A(g'(3,1))$ である。

定義. knot K の graph $g(K)$ において、2つの頂点 A_i と A_j を結ぶ弧を ℓ 、 ℓ に隣合う graph の一部からなる Block を B とする。 A_i と A_j を固定して ℓ の内部を B だけを越すことを $C(\ell \# B)$ と表わし、 $\ell \# B = g(K)$ のときは $C(\ell, g(K))$ と表わす。

定理 1. $A(K)$ に次の変形を行っても、 $A(K)$ は変わらない。

- (a) $C(\ell \# B)$
- (b) $g(K)$ の2つの頂点 A_i と A_j を結ぶ異符号の2辺の組を加えたり、または除く。

証明. (a) a_{ij} , $i \neq j$, は定義によつて A_i と A_j を結ぶ向きをもつ辺の数によつて定まり、辺の位置には関係しないから $C(\ell \# B)$ によつて a_{ij} は変らない。 a_{ii} は a_{ij} , $i \neq j$, によつて一意に定まる。故に (a) は成立つ。

(b) A_i と A_j を結ぶ隣合う異符号の 2 辺は消える。従ってこのような辺の組を加えたり、除いたりしても a_{ij} に変化は起らない。また (a) によって西端を固定して辺の内部を任意の位置に移しても $A(K)$ に変りはない。故に (b) も成立つ。

問題 3. $A(K_1) = A(K_2)$ ならば $K_1 \cong K_2$ か。

$A(K)$ は K の R.D. によって π を分割してできたある領域を 1 点につぶしてできた graph によって定義されているから homotopic な概念であり、 K の knot type は K の ambient isotopic (同型) な概念である。従って一般にはこの 2 つの概念の同値は一致しない。併し Alexander—Briggs の表³⁾に表わされたすべての knot については問題 3 は成立つ。それではどんな knot ならば問題 3 は成立つか。

この問題に対する 1 つの解答が次の主定理である。

§4 主定理

定理 2. graph $g(K)$ において、 ℓ を $g(K)$ の 2 つの

頂点 A_i, A_j を結ぶ弧, B を $\mathcal{L}$ に隣合う graph の一部から構成された block とし, m を A_i と A_j を通る直線とする。

1. B は m に関して対称に同位変形ができる,

2. $g(k)$ に対して, 次の E.F.O. が存在する;

a) $\mathcal{L} \# g(k) - B$ は恒等変形,

b) $f(\mathcal{L} \# B)$ は m に関して対称になる同位変形,

とすれば

$$g(k) \cong C(\mathcal{L}, g(k)).$$

証明. f_i は $g(k)$ の E.F.O. であって, $f = f_m f_{m-1} \cdots f_2 f_1$

$$B_i = f_i(B_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad B_0 = B.$$

S_i は B_i の m に関する対称変形で, $B'_i = S_i(B_i)$.

$$f'_i = S_{i-1} f_i^{-1} S_{i-1}^{-1} \quad \text{であって} \quad f' = f'_1 f'_2 \cdots f'_{m-1} f'_m$$

とすれば次の diagram ができる。

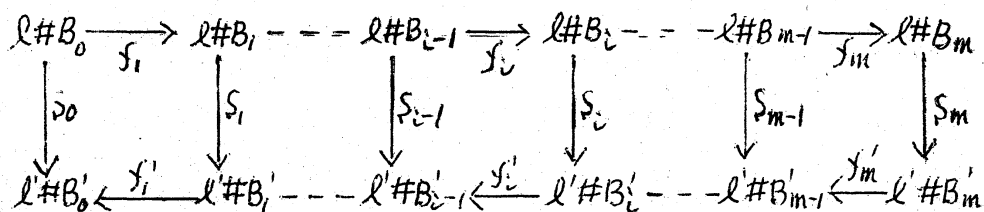


図 4. $C(\mathcal{L} \# B)$ の diagram

$$f' = \prod_{i=m}^1 f'_i = \prod_{i=m}^1 (S_{i-1} f'_i S_{i-1}^{-1}) = S_0 f'^{-1} S_m^{-1}$$

であつて、 S_0 と S_m は graph の恒等変形であつて、 f は同位変形であるから、 f' もまた同位変形になる。一方

$$C(\ell, g(k)) = f' S_m f$$

であるから $C(\ell, g(k))$ は同位変形である。

系. 定理 2 は A_i, A_j を結ぶ弧 ℓ を A_i, A_j を西端点とする m に平行な直線に対称な Block としても成立つ。

§ 5. 主定理の応用

$g(k)$ において無限遠点 P_∞ は任意の領域の内部にあるようにできるから $C(\ell \# B)$ を行うとき、 ℓ は P_∞ を含む領域 $\bar{R}_\infty$ の境界の上にあるとしても一般性を失わない。

また ℓ が $\bar{R}_\infty$ の境界上にあるとき、 P_∞ を他の領域に移せば、 $C(\ell \# B)$ の $B = \emptyset$ のときと考えられるから次の 5.1 が成立つ。

5.1 $g(k)$ の $\bar{R}_\infty$ の境界上の弧 ℓ に対しては恒に
 $g(k) \cong C(\ell, g(k))$.

今後よく使う記号を説明する。

$$\rangle - \overline{n}_\varepsilon - \langle : \rangle - (\varepsilon) \cdots (\varepsilon) \cdots (\varepsilon) - \langle$$

----- n 個 -----

$\varepsilon = \pm$ であって
+ は省く。

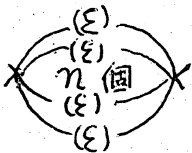
$$\rangle - \hat{n}_\varepsilon - \langle : \rangle$$


図 5. 記号の説明

次に定理 2 の仮定を満足する幾つかの B を示す。

定理 3.

$$\rangle - \overline{n} - \langle \iff \rangle - (\overline{n-1}) - (-) - \langle$$

図 6 定理 3

定理 4.

$$(4.1) \rangle - \overline{(2r-1)} - \langle \iff \rangle - \frac{(r-1)}{2} - (-) - \langle$$

$\frac{(r-1)}{2}$

$$(4.2) \rangle - \overline{(2r)} - \langle \iff \rangle - \frac{r}{2} - (-) - \langle$$

$\frac{r}{2}$

図 7 定理 4

定理 5.

$$(5.1) \quad \text{Diagram 1} \iff \text{Diagram 2}$$

$$(5.2) \quad \text{Diagram 3} \iff \text{Diagram 4}$$

定理 6.

$$(6.1) \quad \text{Diagram 5} \iff \text{Diagram 6}$$

$$(6.2) \quad \text{Diagram 7} \iff \text{Diagram 8}$$

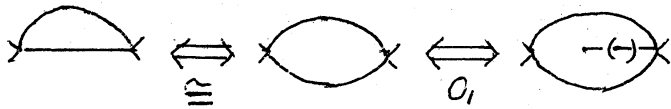
図 9. 定理 6

定理の証明.

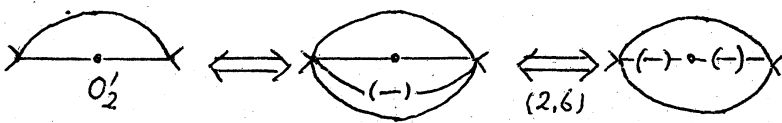
上にならべた定理 3, 4, 5, 6 の証明をする。

定理 3 の証明.

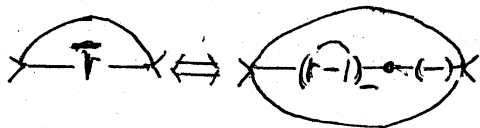
$n=1$ のとき



$n=2$ のとき



$n=r$ のとき



を仮定すれば $n=r+1$ のとき

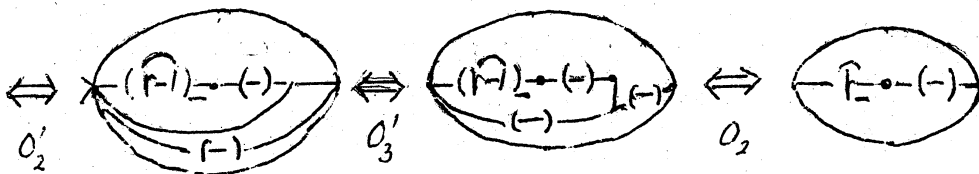
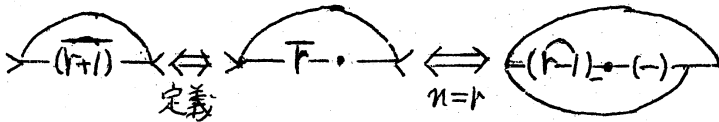


図 10 定理 3 の証明

定理 4 の証明.

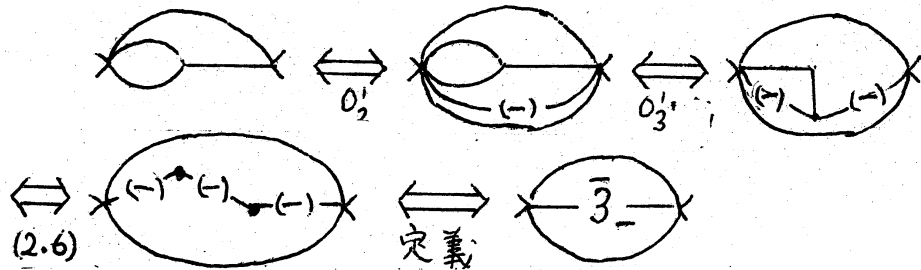
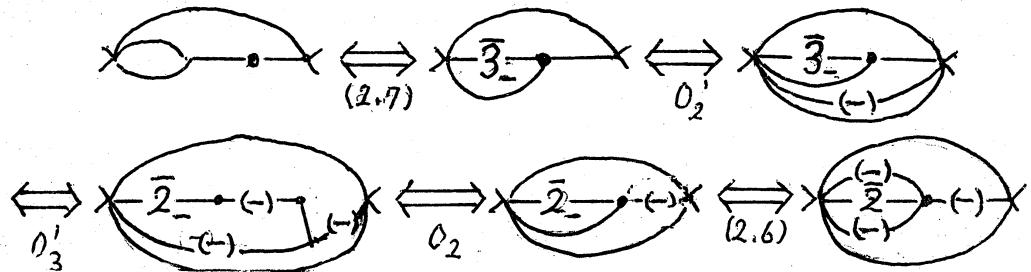
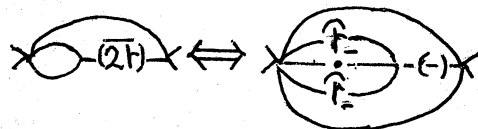
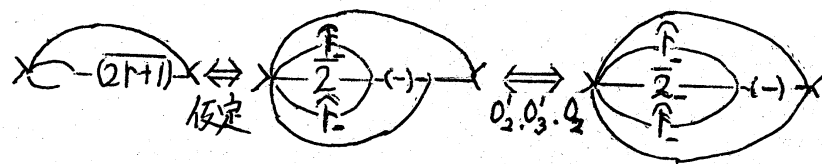
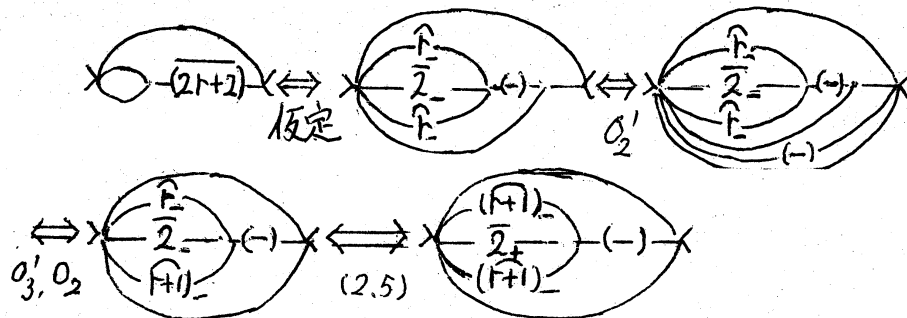
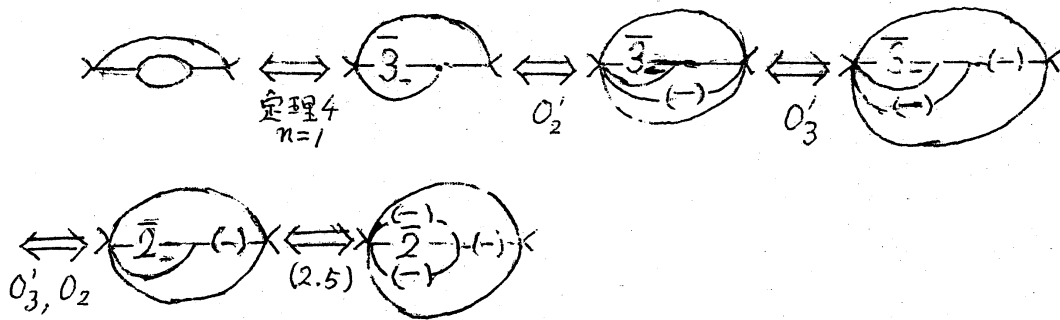
 $n=1$ のとき $n=2$ のとき $n=2t$ のときを仮定すれば $n=2t+1$ のとき $n=2t+2$ のとき

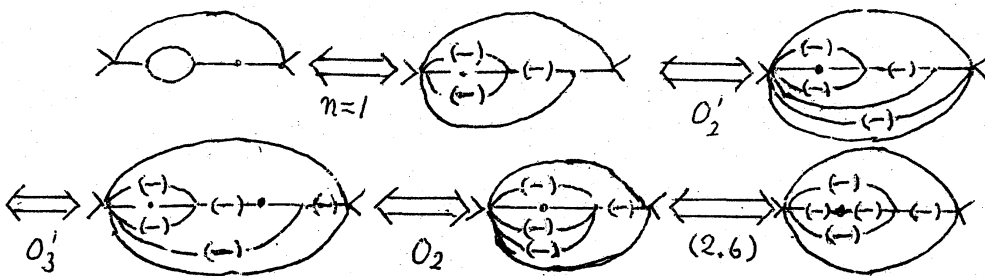
図 11. 定理 4 の証明

定理 5 の 証明.

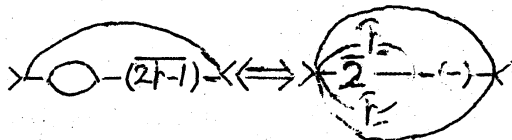
$n=1$ のとき



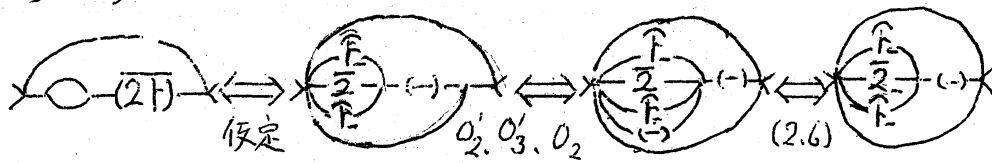
$n=2$ のとき



$n=2t-1$ のとき



を仮定すれば $n=2t$ のとき



$n=2t+1$ のときは

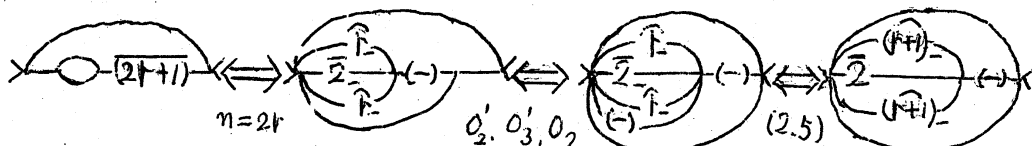
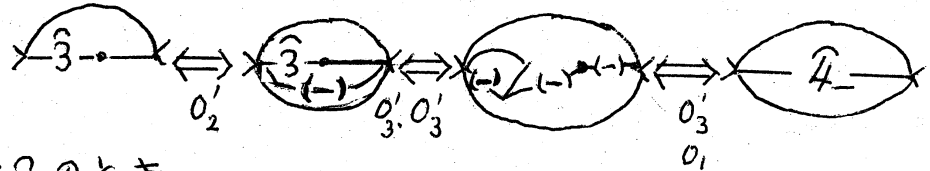


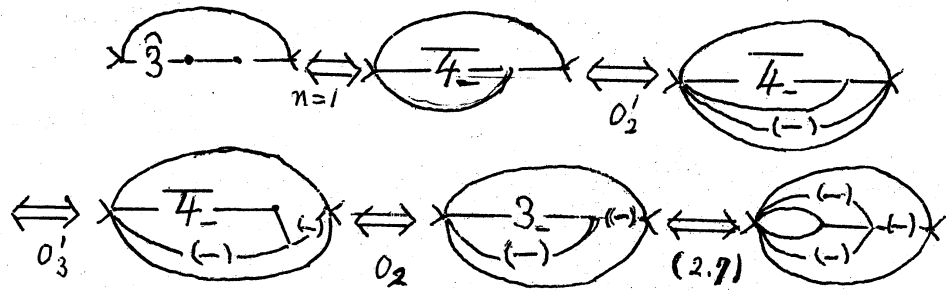
図 12 定理 5 の 証明

定理 6 の証明.

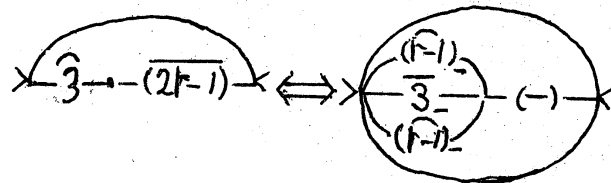
$n=1$ のとき



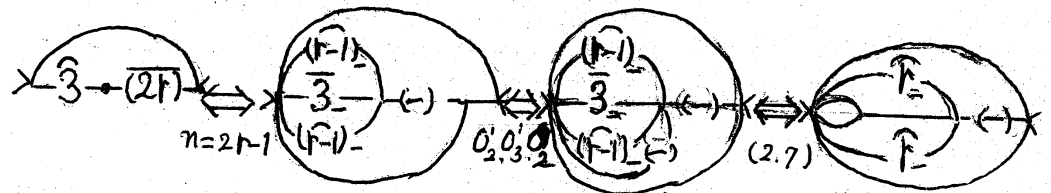
$n=2$ のとき



$n=2r-1$ のとき



を仮定して $n=2r$ のとき



さらに $n=2r+1$ のとき

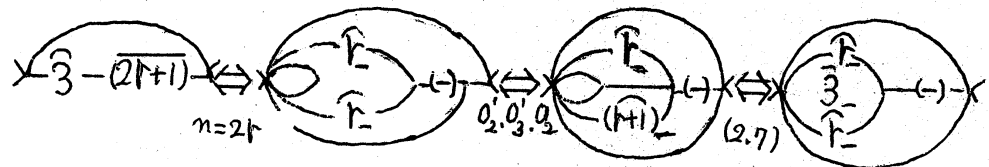


図 13 定理 6 の証明

この論文は 4) (P.11) の定理 3 を拡張したものである。
 (5.1) と定理 3, 4, 5, 6 を組合せると 3) にある Alexander-Briggs の表に示された knot の範囲内では問題 3 は成立つ。

追加

寺阪英孝先生は定理 5 は定理 4 から次のようにして得られることを注意された。先生の何時かの御厚情に感謝します。

$$(*) \quad \begin{array}{c} (-) \\ \diagup \\ \diagdown \\ (-) \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \iff \text{crossing} \iff \text{cup} \quad (\text{定理 8 のために})$$

を使うと block の左辺の弧を右辺に移すことができる。

$$\text{cup} \xrightarrow{\alpha_2} \text{cup} \begin{array}{c} (-) \\ \diagup \\ \diagdown \\ (-) \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \xrightarrow{(*)} \begin{array}{c} (-) \\ \diagup \\ \diagdown \\ (-) \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \xrightarrow{(*)} \text{crossing}$$

定理 2 の証明と同様にして次の定理が成立つ。

定理 7. 定理 2 の記号を使って、 $>B \xrightarrow{\ell} <$ が基本変形によって左右線対称の graph に変形できるならば

$$>B \text{ --- } < \iff > \text{ --- } B<$$

が成立つ。

定理 7 の具体的な場合として次の定理が成立つ。

定理 8

$$\rangle - \overline{n} - \cdot - \langle \iff \rangle - \overline{n} - \langle$$

証明 $n=2$ のときは P.17 の (*) である。 $n=r$ のとき

$$\rangle - \overline{r} - \cdot - \langle \iff \rangle - \overline{r} - \langle$$

を仮定すれば, $n=r+1$ のとき

$$\begin{array}{ccccccc} \rangle - \overline{(r+1)} - \cdot - \langle & \iff & \rangle - \overline{r} - \cdot - \langle & \iff & \rangle - \overline{r} - \cdot - \langle & \iff & \rangle - \overline{(r+1)} - \cdot - \langle \\ & \text{定義} & & & O_2' & & \\ \iff & \rangle - \overline{r} - \cdot - \langle & \iff & \rangle - \overline{r} - \cdot - \langle & \iff & \rangle - \overline{r} - \cdot - \langle & \iff & \rangle - \overline{(r+1)} - \cdot - \langle \\ & O_3' & \text{仮定} & & O_2' & & \end{array}$$

References

- 1) T. Yajima and S. Kinoshita: On the Graphs of Knots, Osaka Math. J., 1957.
- 2) 寺阪英孝: 初等幾何学, 第2版, 岩波書店, 1973.
- 3) K. Reidemeister: Knoten Theorie, Chelsea. 1948.
- 4) H. Tokuda: On the Congruence of Graphs of Knots, General Education Review, College of Agr. and Vet. Med. Nihon Univ. Vol. 9. 1973.