

省エネルギーのためのスパース制御

永原 正章[†]

[†] 京都大学情報学研究科 〒606-8501 京都市左京区吉田本町

あらまし 本研究では、連続時間信号の L^0 ノルムを最小化する新しいタイプの最適制御を考察する。ここで信号の L^0 ノルムとは、その信号の台（信号の値が非零となる時間区間）の長さである。その長さが制御区間に比べて十分に短い制御をスパース制御と呼ぶ。スパース制御では、その制御の値が 0 となる一定の時間区間でアクチュエータを動作させる必要がなく、燃料や電力の消費量を削減することができる。さらに、その区間においては、アクチュエータが休止しているので、CO₂ の排出や振動、騒音などを抑えることもできる。すなわちスパース制御は、省エネルギーに適した制御であると言える。本稿では、スパース最適制御（ L^0 ノルムが最小であるような許容制御）が L^1 最適制御と一致するための条件を与え、また自己駆動型制御によるフィードバック制御への拡張について検討する。

キーワード スパース制御、省エネルギー、 L^1 最適制御、自己駆動型制御、スパース性、圧縮センシング

Sparse Control for Energy Conservation

Masaaki NAGAHARA[†]

[†] Graduate School of Informatics, Kyoto University Sakyo-ku, Yoshida-Honmachi, Kyoto, 606-8501 Japan

Abstract In this article, we consider sparsity-optimal control that minimizes the L^0 norm of a continuous-time control signal. The L^0 norm of a control signal is defined by the length of its support (the time intervals where the control is exactly zero), and sparse control is a control whose L^0 norm is much less than the signal length. In sparse control, actuators are stopped on a relatively long time interval, on which the consumption of fuel or electric power is cut and the emission of CO₂, the noise sound, and the vibration are reduced. Therefore, sparse control is a control suited to energy consumption. In this article, we give a sufficient condition such that the L^0 -optimal controls are equivalent to the L^1 -optimal controls. We also consider an extension to feedback control based on the self-triggered control method.

Key words sparse control, energy consumption, L^1 -optimal control, self-triggered control, sparsity, compressed sensing

1. はじめに

省エネルギーは、現代社会において喫緊の課題であり、その実現にむけて様々な分野で研究・開発が行われている。特に2011年3月11日に発生した東日本大震災による電力危機以降、その重要性はますます高まっている。

省エネルギーのための最も単純な方策は、エネルギーを消費する機器を動作させないことである。このような方策には、たとえば、自動車のアイドリングストップがある。すなわち、自動車を使用しない間はエンジンを切るという方策である。これにより、ガソリンの消費量が劇的に削減できるだけでなく、CO₂などの排出量も抑えられる[4]。また、ガソリンエンジンと電気モーターの両方を使用するハイブリッド車においては、停止時または低速走行時においてエンジンを停止させる。これも「使わないときは動作させない」という省エネルギー方策の

一つである[3]。また、無線通信におけるスリープモードも省エネルギーのための同様の方策であると言える[8], [9]。

本稿では、このような省エネルギーのための方策を制御理論的に定式化する。ここで鍵となるのが**スパース性**の概念である。スパース性とは、本来、有限次元のベクトル（または行列）に対して定義される概念である。すなわち、あるベクトル（または行列）のサイズに比べて非零の要素が非常に少ないとき、そのベクトル（または行列）はスパースであるという[5], [6], [15]。そのスパース性の概念を有限長の連続時間信号に拡張する。すなわち、ある連続時間信号が定義されている時間区間の長さに比べて、その台（すなわち、非零の値をとる時間区間）の長さ（これを L^0 ノルムと呼ぶ）が非常に短いとき、その連続時間信号はスパースであると言う。そして、許容制御（与えられた初期状態から原点へと状態を遷移させ、かつ状態と制御入力に対する制約を満たす制御）としてスパースな信号を選んだと

きの制御を**スパース制御**と呼ぶ。スパース制御では、制御の値が0である時間区間でアクチュエータを動作させる必要はない。したがって、その時間区間において、燃料や電力消費などを削減し、かつCO₂の排出や振動、騒音などを抑えることができる。また、制御信号のスパース性は、省エネルギーだけでなく、制御信号の効率的な情報伝送にも有効である。すなわち、スパースな制御信号は、例えば非零の要素の値とその値だけを符号化すれば、単純な量子化器による効率の良いデータ圧縮が可能である[10]~[12], [14]。

本稿では、まず有限の時間区間における最もスパースな許容制御を求めるスパース最適制御問題を定式化し、その解が L^1 最適制御と一致するための条件を示す。またそれにもとづいて、自己駆動型制御[1]の概念を導入したフィードバック制御について、簡単な例題を用いて考察する。

2. 記法と数学的準備

時間区間 $[0, T]$ 上の連続時間信号 $u(t)$ に対して、その L^p ノルム ($p \geq 1$) を

$$\|u\|_p = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1)$$

で定義する。また、 u の L^0 ノルムをその台の長さ、すなわち

$$\|u\|_0 = \mu(\text{supp}(u)) = \mu(\{t \in [0, T] : u(t) \neq 0\}), \quad (2)$$

で定義する。ここで、 μ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度であり、 $\text{supp}(u)$ は連続時間信号 u の台を表す。なお、ここで定義された $\|u\|_0$ は厳密にはノルムではない。なぜなら、斉次性、すなわちスカラー a と信号 u に対して $\|u\|_0 = |a| \|u\|_0$ が一般には成り立たないからである。しかし、慣例として「 L^0 ノルム」のような言い方がよく使われる。区間 $[0, T]$ 上の連続時間信号 $u(t)$ が**スパース**であるとは、区間幅 T に比べて $\|u\|_0$ が非常に小さいことを言う。この定義は、圧縮センシング等で用いられるベクトルの ℓ^0 ノルムのアナロジーである。すなわち、ベクトルの ℓ^0 ノルムはその非ゼロ要素の数として定義され、スパースなベクトルとは、その ℓ^0 ノルムが非常に小さいベクトルのことである。詳しくは[5], [6], [15]などを参照されたい。

3. L^1 最適制御によるスパース制御

ここでは次の線形モデルで表される制御対象を考える。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t). \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$ とし、 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ とする。この制御対象に対し、初期値 $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ から、終端値 $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ まで状態を遷移させる制御入力で、制約

$$|u(t)| \leq u_{\max} < \infty, \quad t \in [0, T] \quad (4)$$

を満たす許容制御のうち、次の評価関数を最小化する制御入力 $u(t)$, $t \in [0, T]$ を求める問題 (**スパース最適制御問題**) を考える。

$$J_0(u) = \|u\|_0. \quad (5)$$

この最適制御問題は非凸であるため、直接最適制御解を計算することはきわめて困難である。いっぽう、評価関数として L^1 ノルムを用いた次の評価関数

$$J_1(u) = \|u\|_1 = \int_0^T |u(t)| dt \quad (6)$$

を最小化する最適制御 (L^1 **最適制御** または **最小燃料制御** と呼ばれる) は凸問題であり、容易に解くことができる[2]。次の定理は、正規性の条件のもとで、スパース最適制御問題の解が L^1 最適制御問題の解と一致することを示す[13]。

[定理 1] L^1 最適制御問題は正規 (normal) [2] であり、かつ最適解が存在すると仮定する。このとき、スパース最適制御解と L^1 最適制御解は一致する。

この定理より、正規性を仮定すればスパース最適制御問題の解は L^1 最適制御と一致するので、凸問題である L^1 最適制御問題を解くことにより、最もスパースな制御信号を容易に計算することができる。なお、正規性の十分条件として以下の条件が知られている[2, Theorem 6.13]。

[補題 1] 線形システム (3) が可制御かつ行列 $\mathbf{A}$ が正則ならば、 L^1 最適制御問題は任意の初期値に対して正規となる。

4. フィードバック制御への拡張

ここでは、次の状態空間表現を持つ線形システムを考える。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad t \geq 0. \quad (7)$$

ここで、初期値は $(x_1(0), x_2(0)) = (\xi_1, \xi_2)$ とする。本節では、この制御対象に対して、フィードバック制御の枠組みでのスパース制御を考える。

まず、制御対象 (7) に対する有限時間 L^1 最適制御を考えよう。すなわち、あらかじめ与えられた時間 $T > 0$ で状態 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^\top$ を原点に遷移させ、かつ振幅に対する $u_{\max} = 1$ としたときの制約 (4) を満たす制御入力 $u(t)$, $t \in [0, T]$ のうち、 L^1 評価関数 (6) を最小化する制御問題を考える。この最適制御問題の解は以下で与えられる[2, Control Law 8-3]。

[補題 2] 次の各領域を定義する。

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > -x_2^2/2, x_2 \geq 0\}, \\ R_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -x_2^2/2, x_2 > 0\}, \\ R_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < x_2^2/2, x_2 \leq 0\}, \\ R_4 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > x_2^2/2, x_2 < 0\}, \\ \gamma &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2|x_2|/2\}. \end{aligned} \quad (8)$$

終端時刻 T と初期値 (ξ_1, ξ_2) は次を満たすとする。

$$\begin{aligned} (1) \quad & (\xi_1, \xi_2) \in R_1 \cup R_4 \text{ のとき, } T \geq \xi_2 + \sqrt{4\xi_1 + 2\xi_2^2}. \\ (2) \quad & (\xi_1, \xi_2) \in R_2 \cup R_3 \text{ のとき, } T \geq -\xi_2 + \sqrt{-4\xi_1 + 2\xi_2^2}. \\ (3) \quad & (\xi_1, \xi_2) \in \gamma \text{ のとき, } T \geq |\xi_2|. \end{aligned}$$

また、次の各領域を定義する。

$$\begin{aligned} V_- &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_2/2 - x_1/x_2 \geq T\}, \\ V_+ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2/2 - x_1/x_2 \geq T\}. \end{aligned} \quad (9)$$

このとき、以下が成り立つ。

(1) 初期値 $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$ のとき、または $(\xi_1, \xi_2) \in R_4 \cap V_-$ のとき、最適制御は以下で与えられる。

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \text{if } 0 \leq t < t_1, \\ 0, & \text{if } t_1 \leq t < t_2, \\ 1, & \text{if } t_2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (10)$$

ただし、

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{T + \xi_2 - \sqrt{(T - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2}}{2}, \\ t_2 &= \frac{T + \xi_2 + \sqrt{(T - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2}}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

(2) 初期値 $(\xi_1, \xi_2) \in R_3$ のとき、または $(\xi_1, \xi_2) \in R_2 \cap V_+$ のとき、最適制御は以下で与えられる。

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq t < t_3, \\ 0, & \text{if } t_3 \leq t < t_4, \\ -1, & \text{if } t_4 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (12)$$

ただし、

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{T - \xi_2 - \sqrt{(T + \xi_2)^2 + 4\xi_1 - 2\xi_2^2}}{2}, \\ t_4 &= \frac{T - \xi_2 + \sqrt{(T + \xi_2)^2 + 4\xi_1 - 2\xi_2^2}}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

(3) 初期値 $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma$ のとき、最適制御は

$$u^*(t) = \begin{cases} -\text{sgn}(\xi_2), & \text{if } 0 \leq t < |\xi_2|, \\ 0, & \text{if } |\xi_2| \leq t \leq T, \end{cases} \quad (14)$$

で与えられる。ここで、 $\text{sgn}(\cdot)$ は引数が正の実数の場合はその符号 ± 1 を、引数が 0 の場合は 0 を返す符号関数である。

(4) 初期値 $(\xi_1, \xi_2) \in R_4 \cap (V_-)^c$ のとき^(注1)、最適制御問題は特異となり、解は無数に存在する。その解は

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0, T], \quad (15)$$

$$\int_0^T u(t)dt = -\xi_2, \quad \int_0^T \int_0^\theta u(t)dt d\theta = -\xi_1 - \xi_2 T \quad (16)$$

を満たす任意の $u(t)$ である。特に

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_s) \cup [t_0, T), \\ 1, & t \in [t_s, t_0) \end{cases} \quad (17)$$

は最適解である。ただし、

$$t_s = \frac{\xi_2}{2} - \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad t_0 = -\frac{\xi_2}{2} - \frac{\xi_1}{\xi_2}. \quad (18)$$

(5) $(\xi_1, \xi_2) \in R_2 \cap (V_+)^c$ のとき、最適制御問題は特異となり、解は無数に存在する。その解は

$$-1 \leq u(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (19)$$

$$\int_0^T u(t)dt = -\xi_2, \quad \int_0^T \int_0^\theta u(t)dt d\theta = -\xi_1 - \xi_2 T \quad (20)$$

を満たす任意の $u(t)$ である。特に

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_s) \cup [t_0, T), \\ -1, & t \in [t_s, t_0) \end{cases} \quad (21)$$

は最適解である。ただし、

$$t_s = -\frac{\xi_2}{2} - \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad t_0 = \frac{\xi_2}{2} - \frac{\xi_1}{\xi_2}. \quad (22)$$

この補題にもとづき、フィードバック制御系を構成する。ここで鍵となるのは、 L^1 最適制御が区分的に一定値であるという事実である。すなわち、時間区間 $[0, T]$ において、せいぜい 2 回制御の値が切り替わり、それらは $\{-1, 0, 1\}$ のいずれかの値を取る。そこで、時刻 $t \geq 0$ における制御対象の 2 つの状態 $(x_1(t), x_2(t))$ が観測されたとき、それを (ξ_1, ξ_2) とおいて (ローカルの) 時間区間 $[0, T]$ 上の L^1 最適制御を補題 2 にもとづき計算し、そこから計算される最初の切り替え時刻まで一定値を制御入力として加える。例えば、状態 $(x_1(t), x_2(t))$ が領域 R_1 に入っているときは、(11) で定義される時刻 t_1 を用いて、時間区間 $[t, t+t_1]$ まで制御入力 $u(t) = -1$ を制御対象に加え、時刻 $t+t_1$ で状態 $(x_1(t+t_1), x_2(t+t_1))$ を観測し、同様のことを繰り返す。このように、現在の状態に依存して、次の制御切り替えタイミングを設定するような制御を**自己駆動型制御** (self-triggered control) と呼ぶ [1]。制御対象 (7) に対するスパース制御のための自己駆動型制御のアルゴリズムを **Algorithm 1** に示す。

ここで、アルゴリズムの最終段で Δt の大きさを一定値 $\Delta_{\min}$ よりも小さくならないようにしている。これは、有限時間内に無限回の切り替えが起こるような状況^(注2)を避けるためである。上記のアルゴリズムを繰り返し用いることにより、フィードバック制御が達成される。また、この制御においては、11 行目の条件が成り立つときに区間 $[t, t+\Delta t)$ 上において制御信号が 0 となり、スパース制御が実現される。

有限ホライズンの長さを $T = 5$ 、**Algorithm 1** の中の最小切り替え区間長を $\Delta_{\min} = 0.01$ とし、各ステップにおける状態の観測値に平均が 0、分散が 0.01 の Gauss ノイズを加えた制御系を考え、スパース制御のシミュレーションを行う。図 1 に状態 $x_1(t), x_2(t)$ を示す。状態観測ノイズの影響で状態は完全に 0 には漸近しないが、双方の状態とも原点付近にとどまっていることがわかる。また、図 2 に制御 $u(t)$ を示す。ほとんどの時間区間で制御の値が 0 となっており、スパース制御が達成されていることがわかる。このように制御の値が 0 である区間が非常に長いようなスパース制御であれば、例えばエネルギー消費量や CO2 排出量が劇的に抑えられ、省エネルギーが達成される。

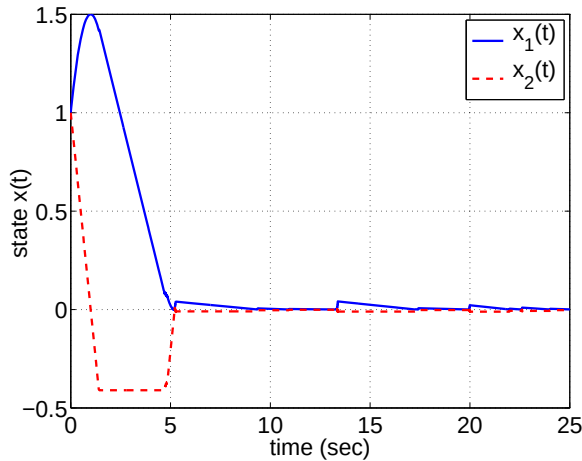
(注1) : $(\cdot)^c$ は補集合を表す。

(注2) : これを Zeno の現象と呼ぶ [7]。

Algorithm 1 Self-triggered control

Require: $(x_1(t), x_2(t))$ {state observation at time $t \geq 0$ }**Ensure:** $u(t), t \in [t, t + \Delta t]$ {constant input on interval $[t, t + \Delta t]$ }

```
1:  $\xi_1 := x_1(t), \xi_2 := x_2(t)$ .
2: if  $(\xi_1, \xi_2) \in R_1$  or  $(\xi_1, \xi_2) \in R_4 \cap V_-$  then
3:    $\Delta t := \frac{1}{2} \left( T + \xi_2 - \sqrt{(T - \xi_2)^2 - 4\xi_1 - 2\xi_2^2} \right)$ .
4:    $u := -1$ .
5: else if  $(\xi_1, \xi_2) \in R_3$  or  $(\xi_1, \xi_2) \in R_2 \cap V_+$  then
6:    $\Delta t := \frac{1}{2} \left( T - \xi_2 - \sqrt{(T - \xi_2)^2 + 4\xi_1 - 2\xi_2^2} \right)$ .
7:    $u := 1$ .
8: else if  $(\xi_1, \xi_2) \in \gamma$  then
9:    $\Delta t := |\xi_2|$ .
10:   $u := -\text{sgn}(\xi_2)$ .
11: else
12:   $\Delta t := -\frac{|\xi_2|}{2} - \frac{\xi_1}{\xi_2}$ .
13:   $u := 0$ .
14: end if
15: if  $\Delta t < \Delta_{\min}$  then
16:   $\Delta t := \Delta_{\min}$ .
17: end if
18: return  $u(t) = u, t \in [t, t + \Delta t]$ .
```

図1 状態 $x_1(t)$ (実線) と $x_2(t)$ (破線)

5. おわりに

本稿では、省エネルギーのためのスパース制御を定式化し、正規性の仮定のもとで、最もスパースな許容制御を求めるスパース最適制御問題の解と L^1 最適制御解とが一致することを述べた。この事実にもとづき、自己駆動型のフィードバック制御を提案し、簡単な2次系（二重積分系）に対するシミュレーションにより有効性を示した。今後の課題として、より一般の制御対象に対して、本稿で提案した自己駆動型フィードバック制御則のもとでの安定条件を示すこと、またフィードバック制御に用いるための最適制御の高速計算アルゴリズムの検討などが挙げられる。

謝辞 本研究は、科学研究費補助金、基盤研究(C)(24560543)の助成を受けたものである。

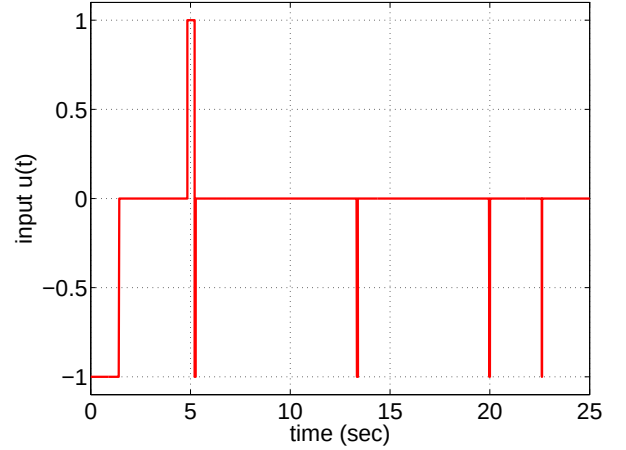


図2 スパース制御

文 献

- [1] A. Anta and P. Tabuada, “To sample or not to sample: self-triggered control for nonlinear systems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 55, no. 9, pp. 2030–2042, Sept. 2010.
- [2] M. Athans and P. L. Falb, *Optimal Control*, Dover Publications, 2007; an unabridged republication of the work published by McGraw-Hill in 1966.
- [3] C. Chan, “The state of the art of electric, hybrid, and fuel cell vehicles,” *Proc. IEEE*, vol. 95, no. 4, pp. 704–718, Apr. 2007.
- [4] B. Dunham, “Automatic on/off switching gives 10-percent gas saving,” *Popular Science*, vol. 205, no. 4, p. 170, Oct. 1974.
- [5] Y. C. Eldar and G. Kutyniok, *Compressed Sensing*, Cambridge University Press, 2012.
- [6] K. Hayashi, M. Nagahara, and T. Tanaka, “A user’s guide to compressed sensing for communications systems,” *IEICE Trans. on Communications*, Vol. E96-B, No. 3, pp. 685–712, 2013.
- [7] M. Heymann, F. Lin, G. Meyer, S. Resmerita, “Analysis of Zeno behaviors in a class of hybrid systems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 50, no. 3, pp. 376–383, March 2005.
- [8] D. Jeong and W. Jeon, “Performance of adaptive sleep period control for wireless communications systems,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 5, no. 11, pp. 3012–3016, Nov. 2006.
- [9] L. Kong, G. Wong, and D. Tsang, “Performance study and system optimization on sleep mode operation in IEEE 802.16e,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 8, no. 9, pp. 4518–4528, Sep. 2009.
- [10] 永原, 松田, 林, 圧縮センシングの遠隔制御系への応用, 第25回信号処理シンポジウム, 2010.
- [11] M. Nagahara and T. Matsuda and K. Hayashi Compressive sampling for remote control systems, *IEICE Trans. on Fundamentals*, Vol. E95-A, No. 4, pp. 713–722, 2012.
- [12] M. Nagahara and D. E. Quevedo, Sparse representations for packetized predictive networked control, *IFAC world congress*, pp. 84–89, 2011.
- [13] M. Nagahara, D. E. Quevedo, and D. Nešić, Maximum-hands-off control and L^1 optimality, *Proc. of 52nd IEEE CDC*, Dec. 2013 (to appear).
- [14] M. Nagahara, D. E. Quevedo, and J. Østergaard, “Packetized predictive control for rate-limited networks via sparse representation,” *Proc. of 51th IEEE CDC*, pp. 1362–1367, 2012.
- [15] 田中, 圧縮センシングの数理, *IEICE Fundamental Review*, Vol. 4, No. 1, pp. 39–47, 2010.