

輸送方程式の初期・境界値問題に対する 差分法と台形公式による数値解析

東森信就 (一橋大学大学院 経済学研究科)

藤原宏志 (京都大学大学院 情報学研究科)

1 研究目的

輸送方程式は媒質との相互作用により吸収・散乱される粒子あるいはエネルギーの流れの数値モデルとして広く利用されるものの一つであり、移流と吸収を表わす微分項、散乱を表わす積分項を含んだ積分微分方程式となっている。考察する物理的状況に応じて方程式はさまざまな形をとるが、本稿では近年医用工学において活発に研究されている画像診断法の一つである近赤外光トモグラフィの研究への応用を想定し、次節の (1a) の方程式 (輻射輸送方程式, Radiative Transport Equation) を考察対象とする。近赤外光トモグラフィは生体への入力として近赤外光を照射し、生体内を伝播した後に生体外に出射する光を観測することによって生体内での光学特性値の分布に関する情報を獲得しようとするものである。生体内での光の伝播は輸送方程式の初期・境界値問題としてモデル化され、その数値解によって光の伝播のシミュレーションが行われる。本稿はこのような応用を想定し、輸送方程式の初期・境界値問題に対して直接的な解法を与えることを目的とする。

従来の輸送方程式の数値計算における代表的な手法として、Monte Carlo 法 [8], あるいは解 $I(t, x, \xi)$ が ξ に関する低次の球面調和函数展開だけで良い近似が得られることを前提とする P_N -近似 [5, 9] 等が挙げられる。これに対して本稿では方程式の微分項と積分項の離散化としてそれぞれ上流差分近似と台形公式を適用することにより、初期・境界値問題の直接的な数値解法が得られることを示す。

2 輸送方程式の初期・境界値問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) を領域とし、境界 $\partial\Omega$ は区分的に滑らかとする。また S^{d-1} は $\mathbb{R}^d$ の単位球面 $\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |\xi| = 1\}$ とし、 $n(x)$ は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルとして

$$X = \Omega \times S^{d-1}, \quad \Gamma_- = \{(x, \xi) \in \partial\Omega \times S^{d-1} \mid n(x) \cdot \xi < 0\},$$

とおく。本稿では未知函数 $I = I(t, x, \xi)$ に対する次の初期・境界値問題 (1) を考える。

$$\frac{1}{c(x)} \frac{\partial I}{\partial t} = -\xi \cdot \nabla_x I - (\mu_s(x) + \mu_a(x))I + \mu_s(x) \int_{S^{d-1}} p(x; \xi, \xi') I(t, x, \xi') d\sigma_{\xi'} \quad \text{for } t > 0, (x, \xi) \in X, \quad (1a)$$

$$I(0, x, \xi) = I_0(x, \xi) \quad \text{for } (x, \xi) \in X, \quad (1b)$$

$$I(t, x, \xi) = I_1(t, x, \xi) \quad \text{for } t \geq 0, (x, \xi) \in \Gamma_-. \quad (1c)$$

ここで ∇_x は空間変数 x に関する勾配, $\cdot$ は $\mathbb{R}^d$ の標準内積, $d\sigma_{\xi'}$ は S^{d-1} 上の面素である. 未知関数 I は時刻 $t \geq 0$, 位置 $x \in \Omega$ において速度の方向が $\xi \in S^{d-1}$ である粒子 (中性子や光子) の密度を表わし, 係数 $c(x)$, $\mu_s(x)$, $\mu_a(x)$ はそれぞれ媒質内の各点における粒子の伝播速度, 散乱係数, 吸収係数の分布を表す関数である. また散乱核 $p(x; \xi, \xi')$ は粒子の速度方向が ξ' から ξ に変化する条件付き確率の密度関数であり,

$$p(x; \xi, \xi') \geq 0, \quad \int_{S^{d-1}} p(x; \xi, \xi') d\sigma_{\xi'} = 1 \quad (2)$$

を満たすものである. さらに本稿では $p(x; \xi, \xi')$ が ξ と ξ' のなす角 θ にのみ依存することを仮定し, $p(x; \xi, \xi') = \tilde{p}(x; \theta)$ と書き表わす.

3 空間が2次元の場合の離散化

本節では簡単のため2次元 ($d=2$) の場合の詳細を述べ, 3次元問題の離散化については §6 で述べる. Δt , Δx_1 , Δx_2 を正数とし, 正整数 M に対して $\Delta\theta = 2\pi/M$ とおく. 整数 k, i, j, n に対して

$$\begin{aligned} t_k &= k\Delta t, \quad x_{ij} = (i\Delta x_1, j\Delta x_2), \\ \theta_n &= n\Delta\theta, \quad \xi_n = (\xi_{n,1}, \xi_{n,2}) = (\cos \theta_n, \sin \theta_n), \end{aligned}$$

とおき, $I(t_k, x_{ij}, \xi_n)$ の相当値を $I_{i,j,n}^k$ と書くことにする. また各 k に対して $I^k = \{I_{i,j,n}^k\}$ を格子点 (x_{ij}, ξ_n) 上の関数と考え, これに対する作用素 $A_\Delta, \Sigma_\Delta, K_\Delta$ を以下のように導入する.

$$\begin{aligned} A_\Delta I_{i,j,n}^k &= -\xi_{n,1} \frac{I_{i+1,j,n}^k - I_{i-1,j,n}^k}{2\Delta x_1} + |\xi_{n,1}| \frac{I_{i+1,j,n}^k - 2I_{i,j,n}^k + I_{i-1,j,n}^k}{2\Delta x_1} \\ &\quad - \xi_{n,2} \frac{I_{i,j+1,n}^k - I_{i,j-1,n}^k}{2\Delta x_2} + |\xi_{n,2}| \frac{I_{i,j+1,n}^k - 2I_{i,j,n}^k + I_{i,j-1,n}^k}{2\Delta x_2}, \\ \Sigma_\Delta I_{i,j,n}^k &= (\mu_s(x_{ij}) + \mu_a(x_{ij})) I_{i,j,n}^k, \\ K_\Delta I_{i,j,n}^k &= \mu_s(x_{ij}) \Delta\theta \sum_{m=0}^{M-1} p(x_{ij}; \xi_n, \xi_m) I_{i,j,m}^k. \end{aligned}$$

本稿では初期・境界値問題 (1) に対して次の離散化 (3) を考え, これにより得られる数値解の安定性および収束性を示す.

$$\frac{1}{c(x_{ij})} \frac{I_{i,j,n}^{k+1} - I_{i,j,n}^k}{\Delta t} = A_\Delta I_{i,j,n}^k - \Sigma_\Delta I_{i,j,n}^{k+1} + K_\Delta I_{i,j,n}^k \quad \text{for } k > 0, (x_{ij}, \xi_n) \in X, \quad (3a)$$

$$I_{i,j,n}^0 = I_0(x_{ij}, \xi_n) \quad \text{for } (x_{ij}, \xi_n) \in X, \quad (3b)$$

$$I_{i,j,n}^k = I_1(t_k, x_{ij}, \xi_n) \quad \text{for } k \geq 0, (x_{ij}, \xi_n) \in \Gamma_-. \quad (3c)$$

注意 3.1. 作用素 A_Δ は輸送方程式 (1a) に現れる作用素 $-\xi \cdot \nabla_x$ に対する上流差分近似となっている. たとえば $\xi_{n,1} \geq 0$, $\xi_{n,2} \geq 0$ においては

$$A_\Delta I_{i,j,n}^k = -\xi_{n,1} \frac{I_{i,j,n}^k - I_{i-1,j,n}^k}{\Delta x_1} - \xi_{n,2} \frac{I_{i,j,n}^k - I_{i,j-1,n}^k}{\Delta x_2}$$

となっている.

4 スキームの安定性および収束性

本節以降、方程式の係数および初期・境界値は以下の仮定を満たすとする。

- $c(x), \mu_s(x), \mu_a(x) \in L^\infty(\Omega)$ であり、ある正数 $c^+, \mu_s^+, \mu_a^+, \mu_a^-$ が存在して

$$0 < c(x) \leq c^+, \quad 0 \leq \mu_s(x) \leq \mu_s^+, \quad 0 < \mu_a^- \leq \mu_a(x) \leq \mu_a^+ \quad (x \in \Omega),$$

が成り立つ。

- 各 $x \in \bar{\Omega}$ に対し、 $\tilde{p}(x; \theta)$ は θ の函数として C^2 級かつ周期 2π をもつ偶函数である。さらに θ についての 2 回偏導函数について

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2} \right\|_\infty := \sup_{(x, \theta) \in \Omega \times [0, 2\pi]} \left| \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2}(x; \theta) \right| < \infty,$$

が成り立つ。

- 初期値, 境界値は $I_0(x, \xi) \in L^\infty(X)$, $I_1(t, x, \xi) \in L^\infty([0, \infty) \times \Gamma_-)$ である。

以上の仮定の下で、離散スキーム (3) について以下のような安定性 (最大値原理) および収束性が証明される [3].

定理 4.1. (最大値原理および正值性) 離散化パラメータ $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta \theta$ が条件

$$\frac{c^+ \Delta t}{\Delta x_1} + \frac{c^+ \Delta t}{\Delta x_2} \leq 1, \quad \left\| \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2} \right\|_\infty \Delta \theta^2 \leq \frac{12}{\pi} \frac{\mu_a^-}{\mu_s^+}, \quad (4)$$

をみたすならば、整数 $k \geq 0$ に対して次式が成り立つ。

$$\|I^k\|_\infty := \sup_{(x_{ij}, \xi_n) \in X \cup \Gamma_-} |I_{i,j,n}^k| \leq \max \{ \|I_0\|_\infty, \|I_1\|_\infty \}. \quad (5)$$

さらに $I_0(x, \xi) \geq 0$, $I_1(t, x, \xi) \geq 0$ ならば、任意の k, i, j, n に対して $I_{i,j,n}^k \geq 0$ が成り立つ。

証明の概略。表記の簡単のため、 $c(x_{ij}), \mu_s(x_{ij}), \mu_a(x_{ij}), \tilde{p}(x_{ij}; \theta)$ の x_{ij} を略して $c, \mu_s, \mu_a, \tilde{p}(\theta)$ と書く。(5) は帰納法により証明される。 $k=0$ での成立は明らかである。以下、(5) がある k に対して成立すれば $k+1$ でも成立することを示す。 $A_\Delta I_{i,j,n}^k$ を

$$\begin{aligned} A_\Delta I_{i,j,n}^k &= \left(-\frac{|\xi_{n,1}|}{\Delta x_1} - \frac{|\xi_{n,2}|}{\Delta x_2} \right) I_{i,j,n}^k + B_\Delta I_{i,j,n}^k, \quad \text{ただし} \\ B_\Delta I_{i,j,n}^k &= \frac{(|\xi_{n,1}| - \xi_{n,1}) I_{i+1,j,n}^k + (|\xi_{n,1}| + \xi_{n,1}) I_{i-1,j,n}^k}{2\Delta x_1} \\ &\quad + \frac{(|\xi_{n,2}| - \xi_{n,2}) I_{i,j+1,n}^k + (|\xi_{n,2}| + \xi_{n,2}) I_{i,j-1,n}^k}{2\Delta x_2} \end{aligned} \quad (6)$$

と書くことにより、(3a) は

$$\begin{aligned} (1 + c\Delta t(\mu_s + \mu_a)) I_{i,j,n}^{k+1} &= \left(1 - |\xi_{n,1}| \frac{c\Delta t}{\Delta x_1} - |\xi_{n,2}| \frac{c\Delta t}{\Delta x_2} \right) I_{i,j,n}^k \\ &\quad + c\Delta t B_\Delta I_{i,j,n}^k + c\Delta t K_\Delta I_{i,j,n}^k, \quad (x_{ij}, \xi_n) \in X, \end{aligned} \quad (7)$$

となる。条件 (4) の第 1 式より

$$|\xi_{n,1}| \frac{c\Delta t}{\Delta x_1} + |\xi_{n,2}| \frac{c\Delta t}{\Delta x_2} \leq 1$$

である。また (6) より

$$|B_{\Delta} I_{i,j,n}^k| \leq \left(\frac{|\xi_{n,1}|}{\Delta x_1} + \frac{|\xi_{n,2}|}{\Delta x_2} \right) \|I^k\|_{\infty}$$

であるから、(7) より

$$(1 + c\Delta t(\mu_s + \mu_a)) |I_{i,j,n}^{k+1}| \leq \|I^k\|_{\infty} + c\Delta t |K_{\Delta} I_{i,j,n}^k| \quad (8)$$

を得る。右辺第 2 項を評価するために 2π 周期の C^2 級関数 $f(\theta)$ に対する台形公式の誤差評価が

$$\left| \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta - \sum_{m=0}^{M-1} f(\theta_m) \Delta\theta \right| \leq \frac{\pi}{12} \|f''\|_{\infty} \Delta\theta^2$$

となること [3] に注意する。この評価と (2), および (4) の第 2 式を組み合わせると

$$\begin{aligned} |K_{\Delta} I_{i,j,n}^k| &\leq \|I^k\|_{\infty} \mu_s \Delta\theta \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{p}(x_{ij}; \theta_m - \theta_n) \\ &\leq \|I^k\|_{\infty} \mu_s \left(1 + \frac{\pi}{12} \Delta\theta^2 \left\| \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2} \right\|_{\infty} \right) \\ &\leq \|I^k\|_{\infty} (\mu_s + \mu_a^-) \end{aligned}$$

を得る。よって (8) より

$$(1 + c\Delta t(\mu_s + \mu_a)) |I_{i,j,n}^{k+1}| \leq (1 + c\Delta t(\mu_s + \mu_a^-)) \|I^k\|_{\infty}, \quad (x_{ij}, \xi_n) \in X$$

が従う。さらに Ω 上で $\mu_a^- \leq \mu_a$ であること、 $(x_{ij}, \xi_n) \in \Gamma_-$ に対して $|I_{i,j,n}^{k+1}| \leq \|I_1\|_{\infty}$ であること、および帰納法の仮定により

$$\|I^{k+1}\|_{\infty} \leq \max \{ \|I^k\|_{\infty}, \|I_1\|_{\infty} \} \leq \max \{ \|I_0\|_{\infty}, \|I_1\|_{\infty} \}$$

となる。

正值性に関する主張は、(7), 定理の仮定、および B_{Δ}, K_{Δ} の定義より直ちに従う。 $\square$

定理 4.2. (収束性) 離散化パラメータが条件 (4) を満たし、かつ $\Delta t/\Delta x_1, \Delta t/\Delta x_2$ の値がそれぞれある正数に固定されているとする。さらに初期・境界値問題 (1) に対する解 $I(t, x, \xi)$ が集合 $[0, T] \times (X \cup \Gamma_-)$ 上で C^2 級かつ 2 階までのすべての導関数がある有界であると仮定する。このとき $\Delta t, \Delta\theta$ には依存しない正数 C が存在して $I^k = \{I_{i,j,n}^k\}$ に対して

$$\|I(t_k, \cdot, \cdot) - I^k\|_{\infty} \leq C(\Delta t + \Delta\theta^2), \quad 0 \leq k \leq T/\Delta t,$$

が成り立つ。

証明の概略. $I(t, x, \xi)$ を初期・境界値問題 (1) に対する厳密解で定理の仮定を満たすものとし、離散化スキーム (3a) による厳密解の打ち切り誤差 $\tau_{i,j,n}^k$ を次式で定める。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} \frac{I(t_{k+1}, x_{ij}, \xi_n) - I(t_k, x_{ij}, \xi_n)}{\Delta t} \\ &= A_{\Delta} I(t_k, x_{ij}, \xi_n) - \Sigma_{\Delta} I(t_{k+1}, x_{ij}, \xi_n) + K_{\Delta} I(t_k, x_{ij}, \xi_n) + \tau_{i,j,n}^k. \end{aligned} \quad (9)$$

Taylor の定理による 2 次の項までの展開と定理の仮定により, 正数 C_T が存在して

$$|\tau_{i,j,n}^k| \leq C_T(\Delta t + \Delta \theta^2), \quad 0 \leq k \leq T/\Delta t, (x_{ij}, \xi_n) \in X, \quad (10)$$

が成り立つ.

次に離散化誤差 $E_{i,j,n}^k = I(t_k, x_{ij}, \xi_n) - I_{i,j,n}^k$ を考える. 式 (9) から式 (3a) を引くことにより, $k \geq 0, (x_{ij}, \xi_n) \in X$ に対して

$$\frac{1}{c} \frac{E_{i,j,n}^{k+1} - E_{i,j,n}^k}{\Delta t} = A_\Delta E_{i,j,n}^k - \Sigma_\Delta E_{i,j,n}^{k+1} + K_\Delta E_{i,j,n}^k + \tau_{i,j,n}^k$$

を得る. ここから定理 4.1 の証明と同様の議論により, 任意の $k \geq 0$ に対して

$$|E_{i,j,n}^{k+1}| \leq \|E^k\|_\infty + c\Delta t |\tau_{i,j,n}^k|, \quad (x_{ij}, \xi_n) \in X, \quad (11)$$

が示される. $\|E^0\|_\infty = 0$ であること, $(x_{ij}, \xi_n) \in \Gamma_-$ に対して $E_{i,j,n}^k = 0$ であること, および評価 (10) に注意すると (11) より

$$\|E^k\|_\infty \leq k c^+ \Delta t C_T(\Delta t + \Delta \theta^2) \leq c^+ T C_T(\Delta t + \Delta \theta^2), \quad 0 \leq k \leq T/\Delta t,$$

が得られる. □

5 数値例

本節では光学的性質が一様な正方形領域における数値計算例を示す. 領域と係数は

$$\Omega = [0, 50] \times [0, 50], \quad \mu_a = 0.08, \quad \mu_s = 1.09, \quad c = 0.196,$$

とし, 散乱核は 2 次元 Poisson 核

$$\tilde{p}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - g^2}{1 - 2g \cos \theta + g^2}$$

において $g = 0.9$ として利用した. また初期値は $I_0(x, \xi) = 0, (x, \xi) \in \Omega \times S^1$ とし, 境界値は

$$I_1(t, x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\theta - \pi/2)^2}{2\sigma^2}\right), & -24.9 \leq x_1 \leq 25.1, x_2 = 0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\sigma = 0.2, \quad \xi = (\cos \theta, \sin \theta),$$

とした. これらの数値は京都大学脳機能総合研究センター (HBRC) において行われたファントム実験 [6] をシミュレートするように設定された. また数値計算における空間と時間の単位長さはファントム実験における 10^{-3} メートルと 10^{-12} 秒に対応している.

数値計算は離散化パラメータを $\Delta t = 0.1, \Delta x = \Delta y = 0.1, \Delta \theta = 2\pi/60$ に設定して行われた. このとき得られた結果を図 1, 図 2 に示す. 図 1 は + 印の点 x_{ij} において $I(t_k, x_{ij}, \xi_n)$ の相当値 $I_{i,j,n}^k$ を ξ_n 方向の動径の長さとして表示したものである. また図 2 は時刻 t_k , 位置 x_{ij} における積分光強度 $\int_{S^1} I(t_k, x_{ij}, \xi) d\sigma_\xi$ 相当値の等高線を示したものである.

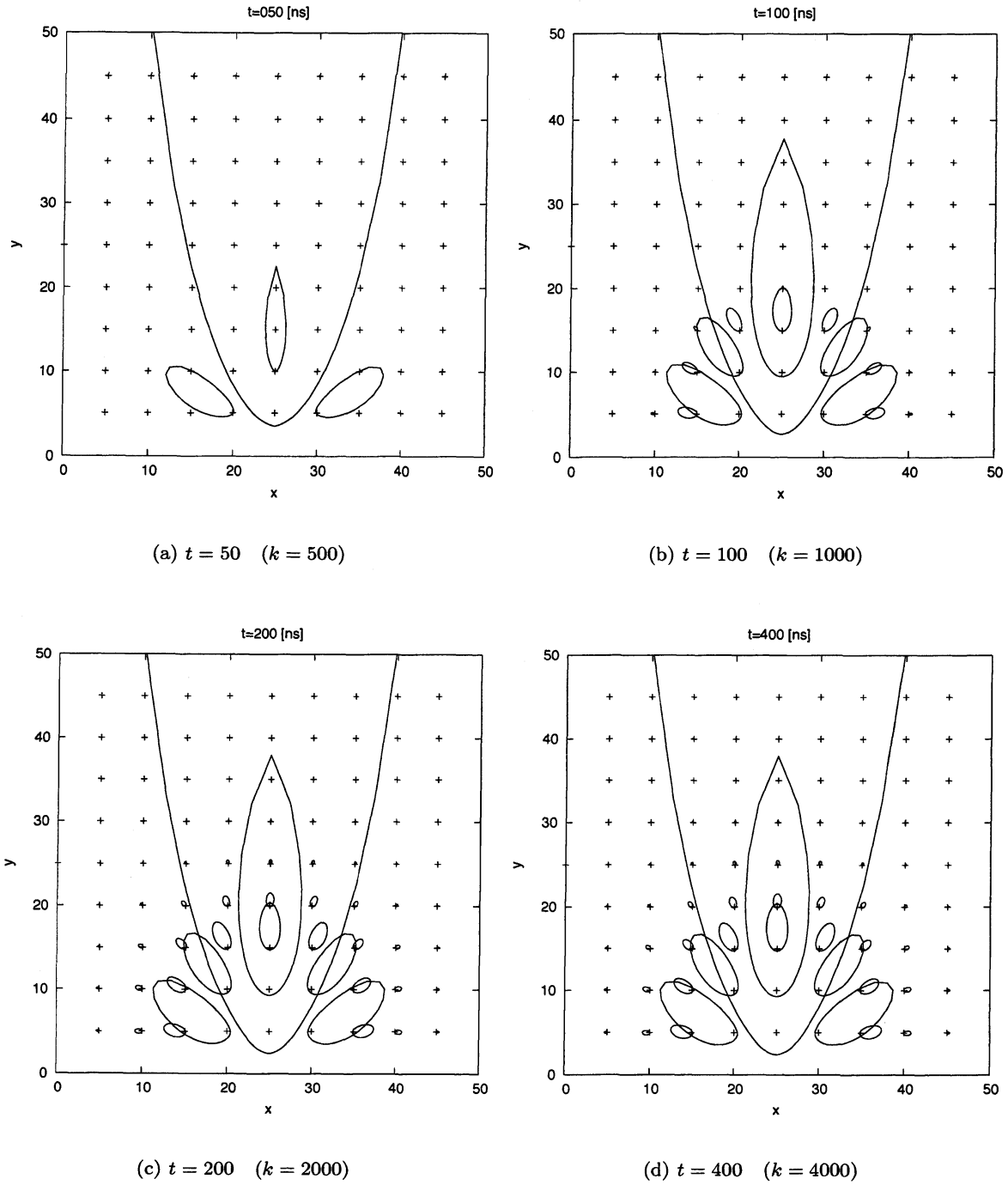


Fig 1: Numerical Solutions $I_{i,j,n}^k$ in polar coordinate with respect to $\xi \in S^1$ at point x_{ij} .

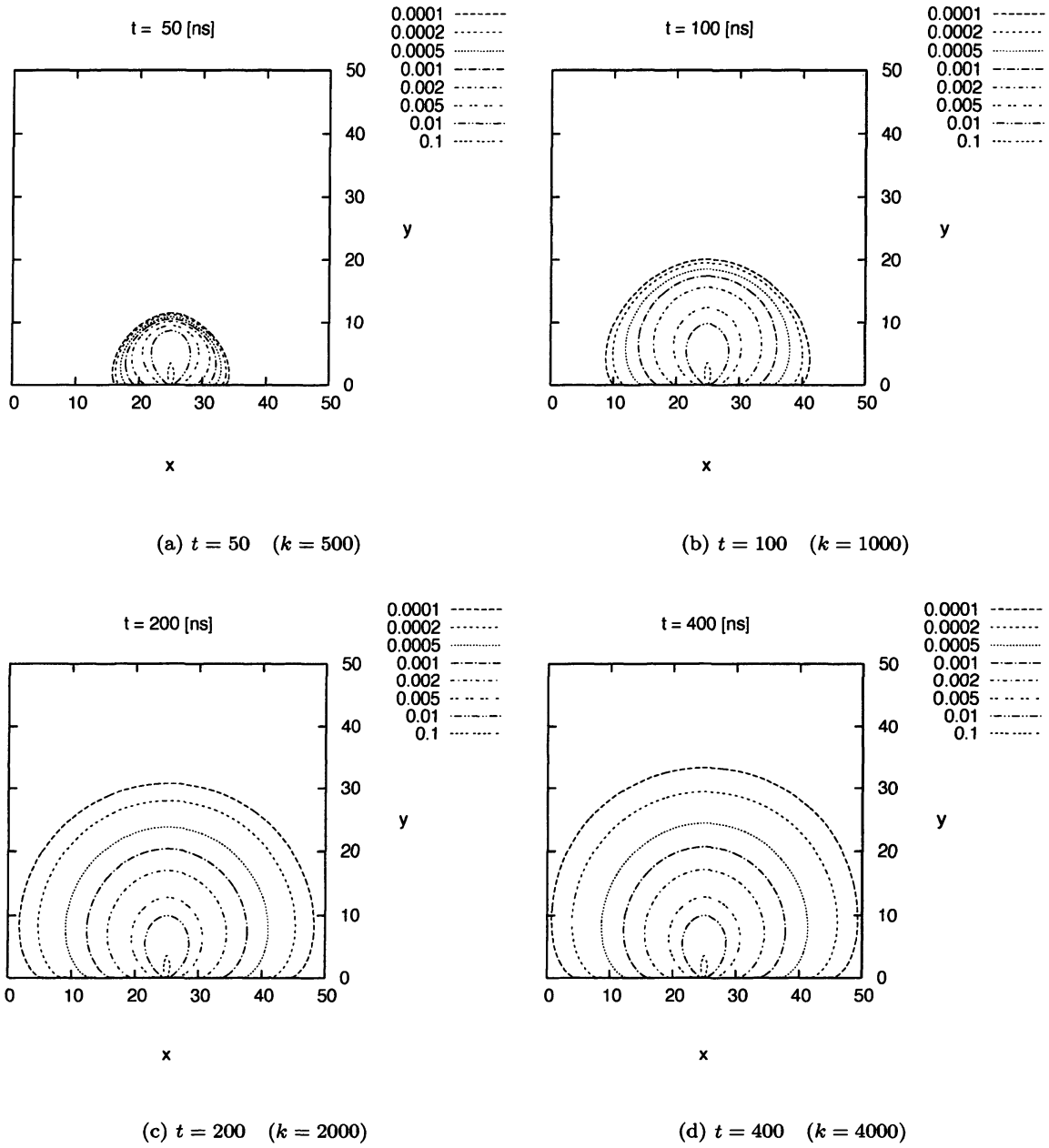


图 2: Contour of Light Intensity

6 空間が3次元の場合の離散化

最後に空間が3次元の場合の離散化とその安定性, 収束性について述べる. $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ を正数, M_θ, M_ϕ を正整数とする. 整数 k, i, j, l, m, n に対して

$$\begin{aligned} t_k &= k\Delta t, \quad x_{ijl} = (i\Delta x_1, j\Delta x_2, l\Delta x_3), \\ \Delta\theta &= \frac{\pi}{M_\theta}, \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{M_\phi}, \quad \theta_m = m\Delta\theta, \quad \phi_n = n\Delta\phi, \\ \xi_{mn} &= (\xi_{mn,1}, \xi_{mn,2}, \xi_{mn,3}) = (\sin\theta_m \cos\phi_n, \sin\theta_m \sin\phi_n, \cos\theta_m), \end{aligned}$$

とおき, $I(t_k, x_{ijl}, \xi_{mn})$ の相当値を $I_{i,j,l,m,n}^k$ と書く. また各 k に対して格子点 (x_{ijl}, ξ_{mn}) 上の関数 $\{I_{i,j,l,m,n}^k\}$ に作用する作用素 $A_\Delta, \Sigma_\Delta, K_\Delta$ を以下のように定める.

$$\begin{aligned} A_\Delta I_{i,j,l,m,n}^k &= \\ &- \xi_{mn,1} \frac{I_{i+1,j,l,m,n}^k - I_{i-1,j,l,m,n}^k}{2\Delta x_1} + |\xi_{mn,1}| \frac{I_{i+1,j,l,m,n}^k - 2I_{i,j,l,m,n}^k + I_{i-1,j,l,m,n}^k}{2\Delta x_1} \\ &- \xi_{mn,2} \frac{I_{i,j+1,l,m,n}^k - I_{i,j-1,l,m,n}^k}{2\Delta x_2} + |\xi_{mn,2}| \frac{I_{i,j+1,l,m,n}^k - 2I_{i,j,l,m,n}^k + I_{i,j-1,l,m,n}^k}{2\Delta x_2} \\ &- \xi_{mn,3} \frac{I_{i,j,l+1,m,n}^k - I_{i,j,l-1,m,n}^k}{2\Delta x_3} + |\xi_{mn,3}| \frac{I_{i,j,l+1,m,n}^k - 2I_{i,j,l,m,n}^k + I_{i,j,l-1,m,n}^k}{2\Delta x_3}, \\ \Sigma_\Delta I_{i,j,l,m,n}^k &= (\mu_s(x_{ijl}) + \mu_a(x_{ijl})) I_{i,j,l,m,n}^k, \\ K_\Delta I_{i,j,l,m,n}^k &= \mu_s(x_{ijl}) \Delta\theta \Delta\phi \sum_{\mu=1}^{M_\theta-1} \sum_{\nu=0}^{M_\phi-1} p(x_{ijl}; \xi_{mn}, \xi_{\mu\nu}) \sin\theta_\mu I_{i,j,l,\mu,\nu}^k. \end{aligned}$$

これらの記号を用いて, 初期・境界値問題 (1) を次のように離散化する.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c(x_{ijl})} \frac{I_{i,j,l,m,n}^{k+1} - I_{i,j,l,m,n}^k}{\Delta t} &= A_\Delta I_{i,j,l,m,n}^k - \Sigma_\Delta I_{i,j,l,m,n}^{k+1} + K_\Delta I_{i,j,l,m,n}^k \\ &\quad \text{for } k \geq 0, (x_{ijl}, \xi_{mn}) \in X, \\ I_{i,j,l,m,n}^0 &= I_0(x_{ijl}, \xi_{mn}) \quad \text{for } (x_{ijl}, \xi_{mn}) \in X, \\ I_{i,j,l,m,n}^k &= I_1(x_{ijl}, \xi_{mn}) \quad \text{for } k \geq 0, (x_{ijl}, \xi_{mn}) \in \Gamma_-. \end{aligned}$$

このとき定理 4.1, 定理 4.2 とほぼ同様の手法により, 以下の定理 6.1, 定理 6.2 が証明される.

定理 6.1. ($d=3$ の場合の最大値原理と正値性) 係数 $c(x)$, $\mu_s(x)$, $\mu_a(x)$ および位相関数 $\tilde{p}(x; \theta)$ が §4 冒頭に掲げた仮定を満たすとする. このときもし離散化パラメータが

$$\begin{aligned} \frac{c^+ \Delta t}{\Delta x_1} + \frac{c^+ \Delta t}{\Delta x_2} + \frac{c^+ \Delta t}{\Delta x_3} &\leq 1, \\ \Delta\theta^2 \max_{(x,\xi) \in X, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p(x; \xi, \xi'(\theta, \phi)) \sin \theta \right| \\ + \Delta\phi^2 \max_{(x,\xi) \in X, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi} \left| \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} p(x; \xi, \xi'(\theta, \phi)) \sin \theta \right| &\leq \frac{6}{\pi^2} \frac{\mu_a^-}{\mu_s^+}, \end{aligned}$$

を満たすならば,

$$\|I^k\|_\infty \leq \max\{\|I_0\|_\infty, \|I_1\|_\infty\}, \quad k \geq 0,$$

が成り立つ. さらにもし $I_0(x, \xi) \geq 0$, $I_1(t, x, \xi) \geq 0$ ならば, すべての k, i, j, l, m, n に対して $I_{i,j,l,m,n}^k \geq 0$ が成り立つ.

定理 6.2. ($d = 3$ の場合の収束性) 正数 T を固定し, 初期・境界値問題 (1) を $0 \leq t \leq T$ の範囲で考える. 定理 6.1 の仮定に加えて, 離散化パラメータの比の値 $\Delta t / \Delta x_1$, $\Delta t / \Delta x_2$, $\Delta t / \Delta x_3$ がそれぞれある一定値に固定されているとする. さらに問題 (1) の解 $I(t, x, \xi)$ が $[0, T] \times (X \cup \Gamma_-)$ 上で C^2 級かつ 2 階までの全ての偏導関数が有界であると仮定する. このとき Δt , $\Delta \theta$, $\Delta \phi$ に依存しない正数 C が存在して

$$\|I(t_k, \cdot, \cdot) - I^k\|_\infty \leq C(\Delta t + \Delta \theta^2 + \Delta \phi^2), \quad 0 \leq k \leq T/\Delta t,$$

が成り立つ.

謝辞 本研究の遂行にあたり京都大学医学研究科附属脳機能総合研究センター, 磯祐介教授 (京都大学), 桂幸納氏 (京都大学) から有益なご助言を頂いたことに感謝いたします. また本研究は科研費 (挑戦的萌芽研究 No. 23654034, 若手研究 (B) No. 23740075) の助成を受けました.

参考文献

- [1] R. DAUTRAY AND J.-L. LIONS, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 6, Springer-Verlag, 1988.
- [2] H. FUJIWARA, “Numerical analysis of the stationary transport equation by finite difference and composite trapezoidal rule”, in preparation.
- [3] H. FUJIWARA AND N. HIGASHIMORI, “Stability and Convergence of an Upwind Finite Difference Scheme for the Radiative Transport Equation”, in preparation.
- [4] A. H. HIELSCHER, R. E. ALCOUFFE, AND R. L. BARBOUR, “Comparison of finite-difference transport and diffusion calculations for photon migration in homogeneous tissues”, *Phys. Med. Biol.* **43** (1998) pp.1285–1302.
- [5] 石森富太郎 (編), 原子炉物理 (原子炉工学講座 3), 培風館, 1973.
- [6] Japan Science and Technology Agency (JST) A-STEP funding program No. 2121313B (2011).
- [7] R. KRESS, *Linear Integral Equations* 2nd ed. Springer-Verlag, 1999.
- [8] 日本原子力研究所, モンテカルロ計算ガイドライン— モンテカルロ法による中性子・光子輸送シミュレーション, JAERI-Review 2002-004, 2002.
- [9] R. D. RICHTMYER AND K. W. MORTON, *Difference Methods for Initial-Value Problems* 2nd ed. Interscience Publishers, 1967.
- [10] 鵜飼正二, 輸送方程式 (数理解析とその周辺 16), 産業図書, 1976.