

Non linear algebraic actions on $\mathbb{C}^n$

大阪市大 理 研田 幹也

(Mikiya Masuda)

序

最近、H. Bass, H. Kraft らを中心として、代数的群作用の研究が始められたが、今後、トポロジーと代数幾何の活躍の場として発展していくと期待される。その中心問題に、Linearity 予想と呼ばれているものがある。最近、G. Schwarz [4] により反例が構成されたが、 $\mathbb{C}^n$ の自己同型群の構造、代数幾何の cancellation problem との問題とも関連していて、興味深いものである。Schwarz の結果は、単に反例を与えたのみならず、実は見事で、また、多くの新しい興味ある問題を提示してくれている。本稿では、Schwarz の仕事の紹介とする。また、最後に、彼の仕事についての著者と Petrie 氏との考察を述べる。尚、この方面の解説として、[1], [2] がある。

§1. 準備 (用語等).

定義 X : affine algebraic variety (over $\mathbb{C}$)
 $\Leftrightarrow \exists \mathbb{C}^N, \exists p_i: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C} \quad (1 \leq i \leq r) \text{ polynomial}$
 s.t. $X = \{ x \in \mathbb{C}^N \mid p_i(x) = 0 \quad (1 \leq i \leq r) \}$

(注) 代数幾何では、上の X は affine algebraic set と呼ぶ。

既約な場合に affine algebraic variety と呼ぶようにする。

本稿ではすべて $\mathbb{C}$ 上で考え、 $\mathbb{R}$ の affine しか取り扱わないので、上の X は単に algebraic variety と呼ぶことにする。

定義 $X \subset \mathbb{C}^N, Y \subset \mathbb{C}^M$ とする。 $f: X \rightarrow Y$ が regular
 $\Leftrightarrow \exists p: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^M$ s.t. $p|_X = f$ であり、 p の各成分が
 X 上定義された有理関数。

(注) X が algebraic variety の時、 p の各成分は多項式にとれる。この時特に $f \in$ algebraic と言ったりする。

定義 G が (complex) algebraic group
 $\Leftrightarrow G$ が algebraic variety であり、写像 $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$
 $(x, y) \mapsto xy, x \mapsto x^{-1}$
 が共に regular.

例 $GL_n(\mathbb{C}) = \{(x, t) \in M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \mid t \det x = 1\}$

こゝで、 $M_n(\mathbb{C})$ は n 次正方行列全体を表す。

(註) $GL_n(\mathbb{C})$ は $M_n(\mathbb{C})$ の中を $\det \neq 0$ がつとると思うと、

algebraic group にはならない。algebraic group と思う時には上の
ように見る。

定義 X : algebraic variety, G : algebraic group とする。

作用 $\varphi: G \times X \rightarrow X$ が regular の時 $\varphi \in$ algebraic action, $X \in$
algebraic G variety と呼ぶ。

定義 regular 表現同型: $G \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \in$ (rational) representation

又、表現空間を (rational) G module という。

complex algebraic group は有限群以外は必ず non-compact
であるから、その作用というのは、かなり複雑な気がする。
しかし、 G が reductive ([1]参照) の場合には、理論が展開で
きる可能性がある。それは次の理由に基づく。まず、
 C^∞ category で compact Lie 群の作用の研究が成功した理由の一つ
に、slice の存在を主張する slice theorem がある。これによ
り、局所的には bundle と思えて色々なことがわかった。例之は
固定点集合が部分多様体になる等。reductive な群というのは、

compact Lie 群の複素化として得られる群のもの (実際, $SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$, 有限群は reductive である). それらは SU_n, U_n , 有限群の複素化. 逆に $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の複素化で reductive ではない). reductive 群の algebraic action は, $\mathbb{C}^\infty$ category での compact Lie 群の作用に対応するものと思える. 実際この場合, Luna slice theorem と呼ばれるものがあり, 作用の様子を調べる手掛りとなる. ただし, この slice theorem は algebraic category での話で, トポロジスト (少なくとも筆者) には, わかりにくい.

§2 Linearity 予想

今後 G は reductive complex algebraic group とする. G の (rational) representation は algebraic action であることに注意する. これを linear action と呼ぶ.

Linearity 予想 (上村 1979, [3]). $\mathbb{C}^n$ 上の任意の algebraic G action は (up to conjugate) linear action.

もう少し詳しく言うと, $\text{Aut}(\mathbb{C}^n) \ni \mathbb{C}^n$ の (regular) algebraic automorphism 全体からなる群とある時, $\mathbb{C}^n$ 上の algebraic action $\varphi: G \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ は, $g \rightarrow \varphi(g, \cdot)$ により, 準同型 $\bar{\varphi}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^n)$ を定める.

$GL_n(\mathbb{C})$ は、 $Aut(\mathbb{C}^n)$ の部分群であるが、上の予想は「 $\bar{\varphi}$ が G のある表現と、 $Aut(\mathbb{C}^n)$ の中で conjugate である」ということである。これは一種の "rigidity" を向うている。

(注1) G : reductive という仮定がなければ、予想が正しくないことはすぐにわかる。例えば、 $G = \mathbb{C}$ にとり、 $\mathbb{C}^n$ 上の $\mathbb{C}$ 作用として平行移動を考えれば、固定点を持たないから、表現と conjugate に は な り え な い。

(注2). $\mathbb{C}^\infty$ category での Linearity 問題には、反例がいくつもある。例えば固定点を持たない $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}^\infty G$ action が構成されている。またそのような compact Lie 群の特徴付けもなされている。

Linearity 予想は次の cancellation problem と関係がある。

Cancellation problem X : non-singular algebraic variety とある。

$$X \times \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \text{ (variety として)} \stackrel{?}{\Rightarrow} X = \mathbb{C}^{n-m}.$$

これは純粋に代数幾何の問題で難問である(らしい)。(11 参照)。その原因は、一般に $\mathbb{C}^n$ の特徴付けが見つかっていないことによると思われる。このあたり、トポロジーでは $\mathbb{R}^n$ の特徴付け (例えば、可縮で end の π_1 が自明 $\Rightarrow \mathbb{R}^n$ と diffeo (n44)) があるのと異なる。これが又、Linearity 予想の反例が見つけた

にくかった原因でもある。

主張 Linearity 予想 c.k. ならば Cancellation problem c.k.

証明 $G = \mathbb{Z}_2$ とする。 $X \times \mathbb{C}^m$ 上 $(x, v) \rightarrow (x, -v)$ (により)。

G action を定義する。 固定点集合は X 。 一方、Linearity 予想

が $G = \mathbb{Z}_2$ の時正しいとすると、 $\mathbb{C}^n = X \times \mathbb{C}^m$ 上の G action は、

(up to conjugate) linear であるから、固定点集合はある $\mathbb{C}^k$ と同

型。 ここで次元を考えれば $X = \mathbb{C}^{m-n}$ となる。 $\square$

$G =$ 有限巡回群、 $\mathbb{C}^*$ に対しても上と同様の議論が成立するから、このような場合には Linearity 予想を示しても十分に意味がある。 また一方、上の主張は Linearity 予想を肯定的に解くことは非常に難しいことも意味している。

§3. Algebraic G vector bundle

Linearity 予想の反例の候補があったとしよう。 これが本当に反例となるかどうかをチェックする際、問題点は2つあるように思う。 一つは、作用を許している algebraic variety X が $\mathbb{C}^n$ と同型かどうか。 X が可縮である等、位相的な性質はチェックできるだろうが、前節で述べたように $\mathbb{C}^n$ の特徴付

けがないので、varietyとして $\mathbb{C}^n$ と同型かどうかの判定は難しい。
 もう一つは、たとえ X が $\mathbb{C}^n$ と同型とわかってても、 X 上の G action が (up to conjugate) linear action ないかどうかで判定するのはよいのだろうか。algebraic action の不変量なるものは、見つからない気がする。二つの難点を Schwarz は見事にフリーアしてゐる。彼のアイデアを説明するために以下少し準備をする。

定義 $\pi: E \rightarrow X$ が algebraic vector bundle とは

$\Leftrightarrow$ (1) E, X : algebraic variety かつ π : regular

(2) $\exists \{U_i\}$: Zariski open covering of X

$$\begin{array}{ccc} \exists \varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n & \text{regular iso.} & \\ \downarrow \cong \downarrow & \text{fiber is linear} & \\ \mathbb{C}^n & & \end{array}$$

s.t.

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \text{ により定まる写像}$$

$$U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \text{ が regular.}$$

定義 $\pi: E \rightarrow X$ が algebraic G vector bundle

$\Leftrightarrow$ (1) E, X : algebraic G variety, $\pi: G$ map

(2) 作用を忘れると $\pi: E \rightarrow X$ は algebraic vector bundle

(3) $\forall g \in G: \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(gx)$ は linear

定義 algebraic G vector bundle $\pi: E \rightarrow X$ と $\pi': E' \rightarrow X$ が 同型

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\exists \psi} & E' \\ \searrow \downarrow & & \swarrow \downarrow \\ & X & \end{array} \quad \psi \text{ は 各 fiber 上 linear な algebraic iso.}$$

さて, $V, W \in (\text{rational}) G \text{ module}$ とする。

記号 (1) V 上の algebraic G vector bundle E の $0 \in V$ 上の fiber が W となるもの全体の同型類を $VE_G(V, W)$ と書く。

(2) trivial G vector bundle $V \times W \rightarrow V \in \oplus W$ と書く。これは $VE_G(V, W)$ の元である。

category としては, V は G 可縮放, V 上の $\forall$ 束の G vector bundle は自明。しかし algebraic category としては $G = \{1\}$ の時では大問題である。

定理 3.1 (Serre 予想 [Quillen], [Suslin], 1976).

$$VE_G(V, W) = \{ \oplus W \} \quad \text{if } G = \{1\}.$$

従って 2 次の問題が自然に生じる。

Equivalent Serre 予想 $VE_G(V, W) = \{ \oplus W \}$ for $\forall G$ reductive

これに關して次のことが知られてゐる。

定理 3.2 (Bass-Hausdorff 1987) $VE(G(V, W))$ の任意の元は stable には自明。つまり、 $\forall E \in VE(G(V, W))$ に対し、 $\exists Z: G \text{ module}$ s.t. $E \oplus \mathbb{H}_Z = \mathbb{H}_{W \times Z}$ 。

定理 3.1 と 3.2 を合わせれば、Equivariant Serre 予想に反例があると思ひにくく。これについては次節で述べるとして、以下の命題は、~~これ~~上の予想の反例は、Linearity 予想の反例を供給することを見せてくれる。 $E \in VE(G(V, W))$ は G 作用の他に、 $\mathbb{C}^*$ が fiber 上の scalar multiplication として作用してゐる。これら 2 つの作用は可換より、 E は $G \times \mathbb{C}^*$ variety と見なせる。定理 3.1 より、作用を忘れると E はある $\mathbb{C}^n$ と同型であることに注意する。

命題 (Kraft) $E \neq \mathbb{H}_W \Rightarrow E$ 上の $G \times \mathbb{C}^*$ action は linearize されない。

(注) 上の命題は一般化される。例えば $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{Z}_k$ ($k \geq 2$) で置き換えられる。

§4. Schwarz の結果

G module V の coordinate ring $\mathbb{C}(V)$ (=の場合は polynomial ring) には、 G が自然に作用している。その固定点集合 $\mathbb{C}(V)^G$ (つまり invariant polynomial) は、Hilbert により有限生成となること知られている (G : reductive が重要!)。従って、 $\mathbb{C}(V)^G = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]/I$ (I : ideal) と書ける。この I が定める algebraic variety $\in V$ の algebraic quotient と言ひ、 $V//G$ と書く。幾何学的には、 V の中の G -orbit の Zariski closed なものからなる集合と思ふことができる。

例 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ に $\mathbb{C}^*$ が $\mathbb{C}^n$ 上自明、 $\mathbb{C}^m$ 上 scalar multiplication として作用しているとすると、 $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m) // \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^n$ 。

$VE_{G_1}(V, W)$ を調べる際 (又、Linearity 予想を証明しようとする際)、invariant polynomial が多い (つまり、algebraic quotient が小さい) 場合から取り組むのが筋らしい。 $V//G$ の次元の小さい方から考える。 $\dim_{\mathbb{C}} V//G = 0$ の時、容易に Equiv. Serre 予想が正しいことが分かる。しかし、 $\dim_{\mathbb{C}} V//G = 1$ の時、反例が起こる。

定理 4.1 (Schwarz [4]). $\dim_{\mathbb{C}} V//G = 1$ とする.

$$(1) \quad \text{VEC}_G(V, W) \xleftrightarrow{\text{全単射}} \mathbb{C}^r \quad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

(実際には、 $\text{VEC}_G(V, W)$ に群構造を加えり $\mathbb{C}^r$ と同型)。

(2) $\text{VEC}_G(V, W)$ の $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{C}^W$ の category ではすべて自明。

(注) $\dim_{\mathbb{C}} V//G \geq 2$ の時、 $\text{VEC}_G(V, W)$ は“無限次元”になり得る。

Schwarz は $r > 0$ となり得ることを例証している。

これを述べるために記号を準備する。

$$\text{記号 (1)} \quad \overset{O_2}{\parallel} \mathbb{C} : A = \begin{pmatrix} g & \\ & g^{-1} \end{pmatrix} \quad (g \in \mathbb{C}^*) \quad \text{と} \quad B = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \text{で生成}$$

される群。 ($O_2 \cong \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}/2$)

(2) V_2 : 2次元 O_2 module

$$A \text{ 作用は } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B \text{ 作用は } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる。

定理 4.2 (Schwarz [4]).

$$(1) \quad \text{VEC}_{O_2}(V_1, V_m) \xleftrightarrow{\text{全単射}} \mathbb{C}^{m-1}.$$

(2) $E \oplus \bigoplus_{\mathbb{C}} \mathbb{C}, \quad E \oplus \bigoplus_{V_1} V_1$ は自明。

(3) E は $\mathbb{C}^*(\subset O_2)$ vector bundle とは自明。

(注) $VE(O_2(V_2, V_m))$ の場合も同様の結果を得ている。

その他、 $SL_2(\mathbb{C})$, $SO_3(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/i\gamma$ のある場合には、 r の具体的な計算結果が述べられている。また彼は、^{位相の}classical group, spin group G に対して、ある適当な V, W とすれば $VE_G(V, W) \neq \emptyset$ となり得ると主張している。

定理 4.2 (1) の対応は以下のように与えられる。

$(a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}$ に対し、多項式 $f(t) = 1 + a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1} \in \mathbb{C}[t]$ を対応させる。 $p: V_1 \rightarrow V_1/O_2 \in \text{projection}$ とする。 実際、

$V_1/O_2 = \mathbb{C}$ となり p は $(a, u) \rightarrow au$ で与えられる。

$$U = p^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$$

$$U_f = p^{-1}(\mathbb{C} - \{t \in \mathbb{C} \mid f(t) = 0\}) \quad \text{と置く。}$$

これらは V の Zariski open set で O_2 不変。又、 $f(0) = 1 \neq 0$ より

$$U \cup U_f = V, \quad U \times V_m \text{ と } U_f \times V_m \text{ の共通部分 } (U \cap U_f) \times V_m \text{ 上}$$

次の Φ_f ではり合わせる。

$$\begin{array}{ccc} U \times V_m & & U_f \times V_m \\ \cup & & \cup \\ (U \cap U_f) \times V_m & \xrightarrow{\Phi_f} & (U \cap U_f) \times V_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((a), (z)) & \longmapsto & ((a), M_f(a, u)(z)) \end{array}$$

ここで、

$$M_f(a, u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f+1 & a^{2m} t^{-m}(f-1) \\ t^{2m} t^{-m}(f-1) & f+1 \end{pmatrix} \quad (t=au).$$

t^m の項があるから $M_f(a, u)$ は U 上定義され. $\det M_f(a, u) = f$ より U, U_f 上可逆であることに注意. 所収このような行列が出てくるかは Schwarz の原論文 [4] を参照されたい. 上の重 f で作り合わせたものが求まる $VEC_{O_2}(V_1, V_m)$ の $\bar{E}$ である. 以後これを $E(f)$ と書く.

(注) 正確には $E(f)$ が algebraic G variety となることを示さねばならないが. これは一般論よりわかる (らしい).

§5 見直し

この節で Schwarz の結果の見直しについて述べる.

これは筆者と T. Petre 氏の共同研究である. 定理 4.2 (2) によると $E(f)$ は $V_1 \times V_m \times \mathbb{C}$ の中に実現できる. しか $E(f)$ はどのように記述されるのだろうか. しか我々の研究の出发点であった. 答えは次の通り.

$$E(f) = \{ (a, u, x, y, z) \in V_1 \times V_m \times \mathbb{C} \mid f(a, u)z = a^m y + u^m x \}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ V_1 & \ni & (a, u) \end{array}$$

各点 (a, u) 上の fiber は $V_m \times \mathbb{C}$ の中の 2 次之部分空間を定めて

いる. 2. 上の定義多項式は O_2 不変故 $E(f)$ は O_2 variety.

これが前節のものと一致することは局所自明性によりわかる.

実際それは次で与えられる。

$$\begin{array}{ccc} U \times V_m & \longrightarrow & E(f) \subset V_1 \times V_m \times \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((a), (x)) & \longmapsto & ((a), M_f(a, e)(x), a^m y + e^m x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U_f \times V_m & \longrightarrow & E(f) \subset V_1 \times V_m \times \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((A), (X)) & \longmapsto & ((A), (X), (A^m Y + B^m X)/f) \end{array}$$

これにより、やはり合わせ写像が §4 のものであることが見てとれる。

上の $E(f)$ の記述は前節のそれと比べると簡明である。このことは、Schwartz の見方 (vector bundle とは合わせとして捉える) と異なる見方があることを示唆していると思われる。実際

$$F(f): \textcircled{H}_{V_m \times \mathbb{C}} \longrightarrow \textcircled{H}_{\mathbb{C}}$$

で (a, e) の fiber 上

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto (e^m, a^m, -f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と定義すると、全射となり kernel が $E(f)$ となる。つまり

short exact sequence

$$0 \longrightarrow E(f) \longrightarrow \textcircled{H}_{V_m \times \mathbb{C}} \xrightarrow{F(f)} \textcircled{H}_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

を得る。この見方はいくつかよい点がある。例えば、

この exact sequence が split することには注意すれば (一般論からわかるが、具体的に splitting を構成することができる).
 $E(f) \oplus \mathbb{H}_\mathbb{C} = \mathbb{H}_{V_m \times \mathbb{C}}$ を得る。これは定理 4.2 (2) の前半部を示している。又、splitting の事実より次を得る。

補題 $E(f)$ と $E(h)$ が同型ならば、その同型写像は $\mathbb{H}_{V_m \times \mathbb{C}}$ の同型写像に拡張する。

この補題は有用である。 $\mathbb{H}_{V_m \times \mathbb{C}}$ の同型写像は次の 3 つの性質をみたす:

- (1) V_1 の座標 (a, ϵ) の polynomial を成分とする 3 次の行列
- (2) D_2 作用に関する equivariance の条件をみたす。
- (3) $\det = \text{const} (\neq 0)$

<証> (1) は同型写像が algebraic ということより。(2) は明らか。
 (3) は $\forall (a, \epsilon)$ について $\det \neq 0$ であるか、 $\det$ は a, ϵ の polynomial より 定数以外あり得ない。 $\square$

これらのことを用いると、 $E(f)$ と $E(h)$ にうつす $\mathbb{H}_{V_m \times \mathbb{C}}$ の同型写像があったとすると $f = h$ が初等的に示せる。

以上、一つの例に話を限ったが、定理 3.2 を用いれば、上の見方は一般化できる。

参考文献.

- [1] H. Bass, Algebraic group actions on affine spaces, *Contemp. Math.* 43 (1985), 1-23.
- [2] H. Kraft, Algebraic automorphisms of affine space, *Progress in Math.* 80 Birkhäuser Verlag 1989, 81-105.
- [3] T. Kambayashi, Automorphism group of a polynomial ring and algebraic actions on affine space, *J. Alg.* 60 (1979), 439-451.
- [4] G. Schwarz, Exotic algebraic group actions, *C.R. Acad. Sci. Paris* (to appear).