

歪 mitosis 作用素の組合せ論

熊本大学 大学院先端科学研究部 藤田 直樹 (Naoki Fujita)*

Faculty of Advanced Science and Technology, Kumamoto University

概要

本稿は RIMS 共同研究「変換群の幾何とトポロジー」における講演内容をまとめたものである。C 型シューベルト多様体の半トーリック退化を歪パイプ・ドリームという組合せ論的対象と関連付け、退化先に現れる歪パイプ・ドリームが歪 mitosis 作用素によって構成されることを紹介する。加えて歪パイプ・ドリームをある種のパスを用いて表示し、パスの言葉で退化先に現れる歪パイプ・ドリームを特徴付ける。本稿の内容は西山雄太氏との共同研究 [7] に基づく。

1 導入

トーリック幾何はトーリック多様体という良いトーラス対称性を持つ多様体の幾何学と凸多面体の組合せ論を結ぶ架け橋であり、トーリック多様体への退化 (トーリック退化) を考えることでトーリック幾何をトーリックでない他の多様体へ応用することができる。本稿では旗多様体のトーリック退化に着目する。旗多様体のトーリック退化については標準単項式理論を契機として様々な研究がなされており、特に表現論と密接な関係がある ([4] 参照)。旗多様体のいくつかのトーリック退化はシューベルト多様体からトーラス不変な (既約とは限らない) 閉部分多様体への退化を誘導しており、これを半トーリック退化という ([11, 13] 参照)。

半トーリック退化はシューベルト・カルキュラスと密接な関係がある。シューベルト・カルキュラスはシューベルト多様体の交叉の明示的な記述を目指す研究分野であり、シューベルト多項式などの組合せ論的モデルによるシューベルト類の具体的な実現が重要な役割を果たしている。A 型旗多様体から Gelfand–Tsetlin 多面体に対応するトーリック多様体への退化を考えると、これはシューベルト多様体の半トーリック退化を誘導する。ここでシューベルト多様体の退化先の既約成分は簡約なパイプ・ドリームという組合せ論的対象を通して、シューベルト多項式に現れる単項式と 1 対 1 に対応している ([10, 11, 6] 参照)。本稿ではこの A 型シューベルト多様体の半トーリック退化と簡約なパイプ・ドリームの関係を C 型の場合まで拡張する。

2 シンプレクティック群

まずシンプレクティック群について基本的な用語を準備する。 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\tilde{G} = SL_{2n}(\mathbb{C})$ とし、 $\tilde{B} \subseteq \tilde{G}$ を上三角行列全体のなす部分群、 $\tilde{H} \subseteq \tilde{B}$ を対角行列全体のなす部分群とする。

*E-mail address: fnaoki@kumamoto-u.ac.jp

$\tilde{H}$ の $\tilde{G}$ における正規化群を $N_{\tilde{G}}(\tilde{H})$ とするとき, $\tilde{G}$ のワイル群 $\widetilde{W}$ は $\widetilde{W} := N_{\tilde{G}}(\tilde{H})/\tilde{H}$ と定義される. ワイル群 $\widetilde{W}$ は $2n$ 次の対称群 $\mathfrak{S}_{2n}$ と同型である. 実際 $\tilde{G}$ の $\mathbb{C}^{2n}$ への自然な左作用によって, ワイル群 $\widetilde{W}$ は 1 次元部分空間たち $\mathbb{C}e_1, \dots, \mathbb{C}e_{2n} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ の対称群とみなすことができる; ただし $\{e_1, \dots, e_{2n}\} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ は標準基底である. $f_{-n} := e_1, \dots, f_{-1} := e_n, f_1 := e_{n+1}, \dots, f_n := e_{2n}$ と書き, $\widetilde{W}$ を自然に $I := \{\pm i \mid i \in [n]\}$ の対称群とみなす; ただし $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ である. n 次対称行列 J_n を

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と定義し, $2n$ 次交代行列 $\bar{w}_0$ を

$$\bar{w}_0 := \begin{pmatrix} O_n & J_n \\ -J_n & O_n \end{pmatrix}$$

と定める; ただし O_n は $n \times n$ 零行列である. $\bar{w}_0$ を用いて, 群 $\tilde{G}$ の自己同型 $\omega: \tilde{G} \xrightarrow{\sim} \tilde{G}$ を $g \in \tilde{G}$ に対して

$$\omega(g) := (\bar{w}_0)^{-1} \cdot (g^T)^{-1} \cdot \bar{w}_0$$

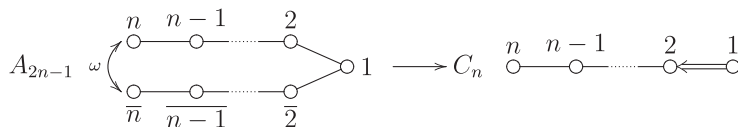
と定義する; ただし g^T は g の転置行列である. このとき固定点部分群

$$G := (\tilde{G})^\omega = \{g \in \tilde{G} \mid \omega(g) = g\}$$

は交代行列 $\bar{w}_0$ に関するシンプレクティック群

$$Sp_{2n}(\mathbb{C}) = \{g \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid g^T \bar{w}_0 g = \bar{w}_0\}$$

と一致する. $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ は C_n 型の単純代数群である. $B := \tilde{B} \cap (\tilde{G})^\omega$, $H := \tilde{H} \cap (\tilde{G})^\omega$ とおくと, B は G のボレル部分群であり, H は G の極大トーラスである. すると C_n 型の旗多様体 G/B は自然に A_{2n-1} 型の旗多様体 $\tilde{G}/\tilde{B}$ の閉部分多様体とみなすことができる. 以上のことは下図のようにディンキン図形の言葉で理解することができる: A_{2n-1} 型のディンキン図形を ω に対応する位数 2 の自己同型で折りたたむことで C_n 型のディンキン図形が得られている.



C_n 型のディンキン図形の頂点集合を上図のように $[n]$ を用いて添え字付ける. このとき C_n 型のカルタン行列 $(c_{i,j})_{i,j \in [n]}$ は次のようになる:

$$\begin{aligned} c_{2,1} &= -2, \quad 2 \leq k \leq n-1 \text{ に対し } c_{1,2} = c_{k,k+1} = c_{k+1,k} = -1, \\ 1 \leq k \leq n \text{ に対し } c_{k,k} &= 2, \quad |i-j| \geq 2 \text{ のとき } c_{i,j} = 0 \text{ である.} \end{aligned}$$

$N_G(H)$ を H の G における正規化群とし, G のワイル群 $W := N_G(H)/H$ を考える. $\omega(\tilde{H}) = \tilde{H}$ かつ $\omega(N_{\tilde{G}}(\tilde{H})) = N_{\tilde{G}}(\tilde{H})$ なので, ω はワイル群 $\tilde{W}$ の自己同型を誘導する. このとき固定点部分群 $(\tilde{W})^\omega$ はワイル群 W と自然に同型である. すべての $i \in [n]$ に対し $\sigma(-i) = -\sigma(i)$ となるような I の置換 $\sigma \in \tilde{W}$ を符号付き置換という. 固定点部分群 $W = (\tilde{W})^\omega$ は I の符号付き置換全体のなす群と一致する. ワイル群 W は群として単純鏡映 $\{s_i \mid i \in [n]\}$ により生成される. 符号付き置換としては

$$s_1 = (1 \ -1), \quad s_k = (k-1 \ k)(-(k-1) \ -k), \quad 2 \leq k \leq n,$$

である; ただし $(i \ j)$ は i と j の互換とする. $w \in W$ に対して, $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$ という表示の中で m が最小であるものを簡約表示といい, 対応する列 $\mathbf{i} := (i_1, i_2, \dots, i_m) \in [n]^m$ を簡約語という. 簡約語の長さ m を w の長さといい, $\ell(w)$ で表す. $w \in W$ の簡約語全体のなす集合を $R(w)$ と書く.

例 2.1. 符号付き置換 $w_0 \in W$ を $w_0(k) = -k$, $k \in I$, により定義する. このとき

$$\mathbf{i}_C := (1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, \dots, \underbrace{n, n-1, \dots, 1, \dots, n-1, n}_{2n-1}) \quad (2.1)$$

は w_0 の簡約語であり, $\ell(w_0) = n^2$ となる.

w_0 の長さ $\ell(w_0) = n^2$ を N と記し, $\mathbf{i}_C = (i_1, i_2, \dots, i_N)$ と書く. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して, 凸多面体 $\Delta(\lambda)$ を以下を満たす $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ 全体のなす集合として定義する:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0, \quad \dots, \quad x_{N-2n+2} \geq \dots \geq x_N \geq 0, \\ \lambda_{i_j} - x_j - \sum_{j < k \leq N} c_{i_j, i_k} x_k &\geq 0 \quad (1 \leq j \leq N). \end{aligned}$$

Littelmann [12] はこの凸多面体 $\Delta(\lambda)$ が簡約語 $\mathbf{i}_C$ と λ に対応するストリング多面体と一致することを証明した. 凸多面体 $\Delta(\lambda)$ に対応する正規射影トーリック多様体を $Z(\Delta(\lambda))$ と書く. $w \in W = N_G(H)/H$ に対し, リフト $\bar{w} \in N_G(H)$ を取る. このとき B の G/B への自然な左作用の軌道分解は次のようになる:

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} B\bar{w}B/B.$$

$w \in W$ に対して,

$$X_w := \overline{B\bar{w}B/B} \subseteq G/B$$

とおき, これをシューベルト多様体という ([2, Section 1.2] 参照). Caldero [3] は Lusztig 双対標準基底が持つ乗法的性質を応用して, 旗多様体 G/B から $Z(\Delta(\lambda))$ への平坦な退化 (トーリック退化) を構成した. この退化について Morier-Genoud [13] は次を証明した.

定理 2.2 ([13, Theorem 3.7]). $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ とし, $w \in W$ を取る. Caldero [3] による G/B から $Z(\Delta(\lambda))$ へのトーリック退化はシューベルト多様体 X_w の半トーリック退化を誘導する.

X_w の退化先は $\Delta(\lambda)$ のいくつかの面の和集合に対応する. この和集合に含まれる極大な面全体のなす集合を $\mathcal{F}(X_w)$ とおく. 以下では $\mathcal{F}(X_w)$ が歪パイプ・ドリームに対する歪 mitosis 作用素と密接な関係にあることを紹介する.

3 歪パイプ・ドリームと歪 mitosis 作用素

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し

$$SY_n := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq n, i \leq j \leq 2n - i\}$$

とし, 次の例のように SY_n を shifted ヤング図形とみなす:

$$SY_4 = \begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ & \square & \square & \square & \square & \\ & & \square & \square & \square & \\ & & & \square & \square & \\ & & & & \square & \end{array}$$

SY_n の冪集合を SPD_n とおき, その元を歪パイプ・ドリームと呼ぶ ([9, Section 5.2] 参照). これは Knutson–Miller [10] によるパイプ・ドリームの類似である. 次の例のように $D \in SPD_n$ を対応する箱に + を入れて表す: $D = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3)\} \in SPD_3$ を

$$D = \begin{array}{ccccc} \square & + & \square & \square & + \\ & & \square & + & \square \\ & & & \square & \end{array}$$

と記す. SY_n の元を

$$(T_1, \dots, T_N) := ((n, n), (n-1, n+1), (n-1, n), (n-1, n-1), (n-2, n+2), \dots, (1, 2), (1, 1))$$

と並べ, $T_k = (p_k, q_k)$ と記す. $D \in SPD_n$ に対し, $T_k \in D$ となる $1 \leq k \leq N$ を小さい順に並べたものを $\mathbf{k}_D$ とし, $T_k \notin D$ となる $1 \leq k \leq N$ を小さい順に並べたものを $\mathbf{k}'_D$ とする. 例えば $D = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3)\} \in SPD_3$ に対し, $\mathbf{k}_D = (3, 5, 8)$, $\mathbf{k}'_D = (1, 2, 4, 6, 7, 9)$ である. (2.1) の簡約語 $\mathbf{i}_C = (i_1, \dots, i_N)$ を考え, $w \in W$ に対し

$$R(\mathbf{i}_C, w) := \{(k_1, \dots, k_{\ell(w)}) \in [N]^{\ell(w)} \mid k_1 < \dots < k_{\ell(w)}, (i_{k_1}, \dots, i_{k_{\ell(w)}}) \in R(w)\}$$

とおく. $R(\mathbf{i}_C, w)$ の辞書式順序に関する最小元を $\mathbf{k}_w$ と記す; ただし単位元 $e \in W$ に対しては $\mathbf{k}_e = \emptyset$ とする. $\mathbf{k}'_D = \mathbf{k}_w$ により定まる歪パイプ・ドリーム $D \in SPD_n$ を $D(w)$ とおく. 筆者 [6, Proposition 6.3] はある $m(w, 1), \dots, m(w, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して

$$D(w) = \{(i, j) \in SY_n \mid j \leq m(w, i) + i - 1\}$$

と表せることを見出した. ここで $m(w, i)$ は条件 $m(w, i) \leq 2n - 2i + 1$ を課すことで一意に定まる. この $m(w, i) \leq 2n - 2i + 1$ は次のように計算することができる.

命題 3.1 ([7, Proposition 3.3] 参照). $w \in W$ および $i \in [n]$ に対し, $m(w, i)$ は $w^{-1}(j) < w^{-1}(n - i + 1)$ となるような $\{j \in I \mid -(n - i + 1) \leq j < n - i + 1\}$ の数と一致する.

例 3.2. $n = 3$ とし,

$$w = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in W$$

とする. このとき $m(w, 1) = m(w, 2) = m(w, 3) = 1$ なので,

$$D(w) = \begin{array}{ccccc} + & \square & \square & \square & \square \\ & + & \square & \square & \\ & & + & \square & \\ & & & \square & \end{array}$$

となる. 特に $\mathbf{k}_w = \mathbf{k}'_{D(w)} = (2, 3, 5, 6, 7, 8)$ であり, 簡約表示 $w = s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_2$ を得る.

歪パイプ・ドリームに対して, Bergeron–Billey [1] によるパイプ・ドリームに対する ladder move の類似を導入する.

定義 3.3 ([6, Section 6] 参照). $(i, j) \in SY_n$ とし, $1 \leq k \leq N$ を $(p_k, q_k) = (i, j)$ により定める. 歪パイプ・ドリームに対する作用素 $L_{i,j}$ を以下のように定義する. まず $L_{i,j}(D)$ が定義されるのは, 歪パイプ・ドリーム $D \in SPD_n$ が以下の条件を満たすときである:

- $(i, j) \in D, (i, j+1) \notin D,$
- ある $k+1 \leq \ell \leq N$ が存在して, $q_\ell \in \{j, 2n-j\}, (p_\ell, q_\ell), (p_\ell, q_\ell+1) \in SY_n \setminus D$ であり, $q_r \in \{j, 2n-j\}$ となるすべての $k+1 \leq r \leq \ell-1$ に対して $(p_r, q_r), (p_r, q_r+1) \in D$ が成り立つ.

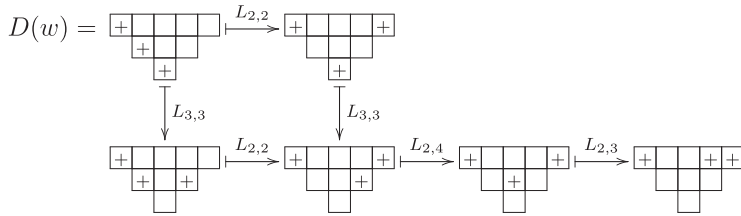
このとき $L_{i,j}(D) \in SPD_n$ を

$$L_{i,j}(D) := D \cup \{(p_\ell, q_\ell+1)\} \setminus \{(i, j)\}$$

と定義する. この作用素 $L_{i,j}$ を (シンプレクティック) ladder move という.

$D(w)$ から ladder move の繰返しで得られる歪パイプ・ドリーム全体のなす集合を $\mathcal{L}(D(w))$ と記す.

例 3.4. $n=3$ とし, $w = s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_2 \in W$ とする. このとき



であり, $\mathcal{L}(D(w))$ はこれら 6 個の歪パイプ・ドリームからなる.

$i \in [n]$ とする. Kiritchenko [9, Section 5.2] は歪パイプ・ドリームに対する (転置) 歪 mitosis 作用素 $\text{mitosis}_i^\top$ を導入した. これは Knutson–Miller [10] によるパイプ・ドリームに対する (転置) mitosis 作用素の類似となっている. $\text{mitosis}_i^\top$ の定義を説明する.

$$r_0 := \max\{1 \leq r \leq N \mid q_r \in \{n-i+1, n+i-1\}, (p_r, q_r+1) \notin D\}$$

とおき, 次の条件を考える:

$$\{(p_r, q_r) \mid q_r \in \{n-i+1, n+i-1\}, r_0 \leq r \leq N\} \subseteq D. \quad (\dagger)$$

条件 $(\dagger)$ が成り立たない場合は $\text{mitosis}_i^\top(D) := \emptyset$ とする. 条件 $(\dagger)$ が成り立つと仮定し,

$$\text{start}_i^\top(D) := \min(\{p \mid (p, n-i+1) \in SY_n \setminus D\} \cup \{p+1 \mid (p, n+i-1) \in SY_n \setminus D\} \cup \{n-i+2\})$$

とおく. このとき $q \in \{n-i+1, n+i-1\}$ かつ $p < \text{start}_i^\top(D)$ となる ladder move $L_{p,q}$ の繰返しで $D \setminus \{(p_{r_0}, q_{r_0})\}$ から得られる歪パイプ・ドリーム全体のなす集合を $\text{mitosis}_i^\top(D) \subseteq SPD_n$ とする. 部分集合 $\mathcal{A} \subseteq SPD_n$ に対して, $\text{mitosis}_i^\top(\mathcal{A}) := \bigcup_{D \in \mathcal{A}} \text{mitosis}_i^\top(D)$ とおく. 次が本稿の一つ目の主結果である.

定理 3.5. すべての $w \in W$ および $(j_1, \dots, j_\ell) \in R(w)$ に対し, 次が成り立つ:

$$\mathcal{L}(D(w)) = \text{mitosis}_{j_\ell}^\top \cdots \text{mitosis}_{j_1}^\top (SY_n).$$

$\Delta(\lambda)$ の余次元 1 の面 $F_1(\Delta(\lambda)), \dots, F_N(\Delta(\lambda))$ をそれぞれ方程式

$$x_1 = 0, x_2 = x_3, x_3 = x_4, x_4 = 0, x_5 = x_6, \dots, x_{N-1} = x_N, x_N = 0$$

により定める.

$$\mathcal{K} := \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_\ell) \mid 0 \leq \ell \leq N, 1 \leq k_1 < \dots < k_\ell \leq N\}$$

とする. $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_\ell) \in \mathcal{K}$ に対し, $\Delta(\lambda)$ の面 $F_{\mathbf{k}}(\Delta(\lambda))$ を

$$F_{\mathbf{k}}(\Delta(\lambda)) := F_{k_1}(\Delta(\lambda)) \cap \dots \cap F_{k_\ell}(\Delta(\lambda))$$

と定める. $D \in SPD_n$ に対し, $\Delta(\lambda)$ の面 $F_D(\Delta(\lambda))$ を

$$F_D(\Delta(\lambda)) := F_{\mathbf{k}_D}(\Delta(\lambda))$$

と定義し, 歪パイプ・ドリームの集合 $\mathcal{M}(w) \subseteq SPD_n$ を

$$\mathcal{F}(X_w) = \{F_D(\Delta(\lambda)) \mid D \in \mathcal{M}(w)\}$$

と定める. 筆者 [6, Section 6] は $\text{mitosis}_i^\top$ の類似の作用素 M_i を導入し, $\mathcal{M}(w)$ がこの作用素を用いて記述できることを見出した. この結果と定理 3.5 を組み合わせることで次を得る.

系 3.6. すべての $w \in W$ に対し,

$$\mathcal{L}(D(w)) = \mathcal{M}(w)$$

が成り立つ. 特に Morier-Genoud [13] による X_w の半トーリック退化において, 退化先の部分多様体は

$$\bigcup_{D \in \mathcal{L}(D(w))} F_D(\Delta(\lambda)) \subseteq \Delta(\lambda)$$

に対応する.

例 3.7. $n = 2$ とする. このとき

$$D(s_2s_1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & & \\ \hline & & \\ \hline + & & \\ \hline \end{array}, \quad \mathcal{L}(D(s_2s_1)) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & & \\ \hline + & & \\ \hline & & + \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & + & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right\}$$

である. また

$$\text{mitosis}_2 \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline + & & \\ \hline & & \\ \hline + & & \\ \hline \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right\}, \quad \text{mitosis}_2 \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline + & & \\ \hline + & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & + \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & + & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right\}$$

なので,

$$\mathcal{L}(D(s_2s_1s_2)) = \text{mitosis}_2(\mathcal{L}(D(s_2s_1))) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline + & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & + \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & + & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right\}$$

となる.

4 歪パイプ・ドリームのパスによる表示

この節では歪パイプ・ドリームのパスによる表示を紹介し、 $\mathcal{L}(D(w))$ の特徴付けを与える.

$$\widetilde{SY}_n := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq 2j - 1\}$$

とし、次の例のように表す:

$$\widetilde{SY}_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \hline & & \square \\ \hline & & \square \\ \hline \end{array}.$$

$\widetilde{SY}_n$ の冪集合を $\widetilde{SPD}_n$ とし、 $D \in \widetilde{SPD}_n$ を歪パイプ・ドリームのように対応する箱に + を入れることにより表す. 各 $D \in \widetilde{SPD}_n$ に対し、 $\Omega(D) \in \widetilde{SPD}_n$ を次で定義する: $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、 D の第 k 行の左側 $(n - k + 1)$ 個の箱を $\Omega(D)$ の第 $(2k - 1)$ 行とし、 D の第 k 行の右側 $(n - k)$ 個の箱の左右を入れ替えたものを $\Omega(D)$ の第 $2k$ 行とする.

例 4.1. $n = 3$ とし、 $D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 3)\} \in \widetilde{SPD}_3$ とする. このとき

$$D = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & + & & & + \\ \hline & + & + & & \\ \hline & & \square & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\Omega} \Omega(D) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & + & \\ \hline & + & \\ \hline & & + \\ \hline & & + \\ \hline \end{array}$$

となる.

定義 4.2.

$$\widetilde{SY}_n^{(\text{ex})} := \widetilde{SY}_n \sqcup \{(2k, k) \mid 1 \leq k \leq n\} \sqcup \{(k, n+1) \mid 1 \leq k \leq 2n\} \subseteq \mathbb{Z}_{>0}^2$$

とおき、歪パイプ・ドリーム $D \in \widetilde{SPD}_n$ のパスによる表示 $\mathcal{G}(D)$ を以下で定義する:

- まず $\Omega(D)$ 内のすべての $\boxplus$ を $\vdash$ で置き換える.
- 次に $(i, j) \in \widetilde{SY}_n^{(\text{ex})} \setminus \Omega(D)$ に対し、 $j \leq n$ で i が奇数となるか、または $j = n+1$ で i が偶数となるとき、 (i, j) の場所にある箱 $\square$ を $\lrcorner$ で置き換える.
- 残りの $(i, j) \in \widetilde{SY}_n^{(\text{ex})} \setminus \Omega(D)$ の場所にある箱 $\square$ は $\lceil$ で置き換える.

これらの置き換えられた部分を繋げることで、いくつかのパスからなる図 $\mathcal{G}(D)$ が得られる.

各 $1 \leq k \leq n$ に対し、 $\mathcal{G}(D)$ のパスの中で $\widetilde{SY}_n^{(\text{ex})}$ の第 $(2k - 1)$ 行の左端から始まるものを ℓ_k と記す. パス ℓ_k のもう一つの端は $\widetilde{SY}_n^{(\text{ex})}$ のいずれかの列の上端にある. この列を第 $(n + 1 - v_D(k))$ 列とすることで、置換 $v_D: [n] \rightarrow [n]$ が定義される. ℓ_k を $L_{v_D(k)}$ とも書くことにする.

定義 4.3. 各 $D \in \mathcal{SPD}_n$ に対し, 符号付き置換 $w_D \in W$ を $j \in [n]$ に対して

$$w_D(j) := (-1)^{\text{sign}(L_j)+1} v_D^{-1}(j)$$

および $w_D(-j) = -w_D(j)$ とすることで定義する; ただし $\text{sign}(L_j)$ は $\mathcal{G}(D)$ におけるパス L_j の自己交差の回数である. $|D| = \ell(w_0) - \ell(w_D)$ のとき, 歪パイプ・ドリーム D は簡約であるという. $w \in W$ に対し, $w_D = w$ となる簡約な歪パイプ・ドリーム $D \in \mathcal{SPD}_n$ 全体のなす集合を $RSP(w)$ とおく.

すべての $D \in \mathcal{SPD}_n$ に対し, $|D| \geq \ell(w_0) - \ell(w_D)$ となるので, $RSP(w)$ は $w_D = w$ となる歪パイプ・ドリーム $D \in \mathcal{SPD}_n$ の中で $|D|$ が最小であるものたち全体のなす集合である.

例 4.4. $n = 3$ とし, 例 4.1 のように $D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 3)\} \in \mathcal{SPD}_3$ とする. このときパスによる表示 $\mathcal{G}(D)$ は図 1 で与えられる. すると $\ell_1 = L_2$, $\ell_2 = L_3$, $\ell_3 = L_1$ なので,

$$v_D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_D = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる. 特に $\ell(w_0) - \ell(w_D) = 9 - 4 = 5 = |D|$ なので, D は簡約である.

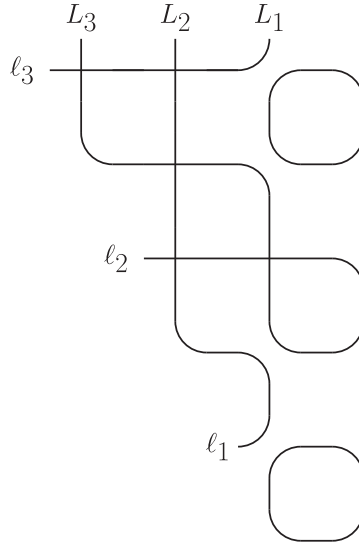


図 1: $D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 3)\} \in \mathcal{SPD}_3$ のパスによる表示 $\mathcal{G}(D)$.

次が本稿の二つ目の主結果である.

定理 4.5. すべての $w \in W$ に対し, $\mathcal{L}(D(w)) = RSP(w)$ が成り立つ.

A 型の場合, 簡約なパイプ・ドリームは特別な簡約語の簡約な部分語と自然に対応する. しかし C 型の場合には, 簡約な歪パイプ・ドリームと簡約な部分語との自然な対応は得られない. ただしシューベルト多様体ではなく opposite シューベルト多様体の半トーリック退化を考えると, C 型の場合にも半トーリック退化と簡約な部分語との自然な対応を得ることができる ([6, Section 4] 参照). このことはシューベルト多様体と opposite シューベルト多様体の半トーリック退化先には異なる組合せ論的構造が現れ得るということを意味している.

注意 4.6. C 型のパイプ・ドリームは C 型のシューベルト多項式や二重 Grothendieck 多項式を研究する過程で既に導入されている ([5, 8, 14] 参照). しかしながら [5, 8, 14] で扱われている C 型のパイプ・ドリームは簡約な部分語と自然に対応しており, 本稿の簡約な歪パイプ・ドリームとは異なる組合せ論的对象である.

参考文献

- [1] N. Bergeron and S. Billey, RC-graphs and Schubert polynomials, *Experiment. Math.* **2** (1993), no. 4, 257–269.
- [2] M. Brion, Lectures on the geometry of flag varieties, in *Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2005, 33–85.
- [3] P. Caldero, Toric degenerations of Schubert varieties, *Transform. Groups* **7** (2002), 51–60.
- [4] X. Fang, G. Fourier, and P. Littelmann, On toric degenerations of flag varieties, in *Representation Theory—current trends and perspectives*, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2017, 187–232.
- [5] S. Fomin and A. N. Kirillov, Combinatorial B_n -analogues of Schubert polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), no. 9, 3591–3620.
- [6] N. Fujita, Schubert calculus from polyhedral parametrizations of Demazure crystals, *Adv. Math.* **397** (2022), Paper No. 108201, 42 pages.
- [7] N. Fujita and Y. Nishiyama, Combinatorics of semi-toric degenerations of Schubert varieties in type C, preprint 2023, arXiv:2306.14485v1.
- [8] A. N. Kirillov and H. Naruse, Construction of double Grothendieck polynomials of classical types using idCoxeter algebras, *Tokyo J. Math.* **39** (2017), no. 3, 695–728.
- [9] V. Kiritchenko, Geometric mitosis, *Math. Res. Lett.* **23** (2016), no. 4, 1069–1096.
- [10] A. Knutson and E. Miller, Gröbner geometry of Schubert polynomials, *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), no. 3, 1245–1318.
- [11] M. Kogan and E. Miller, Toric degeneration of Schubert varieties and Gelfand–Tsetlin polytopes, *Adv. Math.* **193** (2005), no. 1, 1–17.
- [12] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, *Transform. Groups* **3** (1998), no. 2, 145–179.
- [13] S. Morier-Genoud, Geometric lifting of the canonical basis and semitoric degenerations of the Richardson varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), no. 1, 215–235.
- [14] E. Smirnov and A. Tutubalina, Pipe dreams for Schubert polynomials of the classical groups, *European J. Combin.* **107** (2023), Paper No. 103613, 46 pages.