

氏 名	岸 本 巖
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2416 号
学位授与の日付	平 成 14 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Existence of closed quasigeodesic in Alexandrov spaces of some types (あるタイプのアレクサンドロフ空間における閉擬測地線の存在について)
論文調査委員	(主 査) 教 授 深 谷 賢 治 教 授 河 野 明 教 授 中 島 啓

論 文 内 容 の 要 旨

なめらかなリーマン多様体の測地線とは、局所的には2点間の最短距離を与える曲線を指す。閉測地線とは、円周からの写像で測地線であるものを指す。

大域変分法のもっとも基本的な問題が、リーマン多様体の閉測地線を調べる問題である。

リーマン多様体の基本群が自明でないときは、自明でないホモトピー類を表す閉曲線の内、長さが最小のものが閉測地線であるので、閉測地線の存在は容易に証明される。基本群が自明である場合には、多様体の高次のホモロジー群やホモトピー群を用いて同様の定理が証明されている。(ルステルニックら。)

大域リーマン幾何学を、なめらかなリーマン多様体の範囲を超えたより一般の空間に拡張することは、現在非常に活発に研究されている。それらの研究の中心はアレクサンドロフ空間の研究である。アレクサンドロフ空間は断面曲率がマイナス無限大にはならない(しかしプラス無限大になることはありうる)空間である。アレクサンドロフ空間の典型例は、ユークリッド空間の凸集合の境界である。(境界がなめらかな場合には、これは正の曲率を持つ空間であるが、境界がなめらかでない場合がここで問題にされている。)

3次元ユークリッド空間の凸集合の境界である(必ずしもなめらかとは限らない)曲面の幾何学は、20世紀前半に様々なひとによって、研究されていたが、そこで示された重要な定理の一つが、ポゴレロフによる定理で、これは、そのような曲面には必ず quasi geodesic (以下擬測地線と訳す)が存在するというものである。

距離空間に対して、測地線概念を同様に定義することができるが、ほとんどすべての凸集合の境界に対して、測地線は存在しないことが知られている。

その為に、測地線概念の何らかの一般化を行う必要がある。擬測地線とは、(もともと凸曲面の場合に)この目的で考えられた概念で、空間がなめらかな場合には、普通の測地線と一致している。

近年、バトルーニンやペレルマンによって、擬測地線概念は、高次元のアレクサンドロフ空間に一般化され、いくつかの結果が得られてる。

主論文の主要な結果は、次の定理である。

定理：曲率が下から評価される、なめらかなリーマン多様体でリプシッツ距離の意味で近似されるアレクサンドロフ空間には、閉擬測地線が存在する。

定理の系として、任意の次元のユークリッド空間の凸集合の境界にたいしては、閉擬測地線が存在することが示される。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

岸本巖の学位申請論文は、必ずしもなめらかとは限らない空間(アレクサンドロフ空間)で、閉測地線の存在という、リーマン幾何学の基本問題を考察し、なめらかな多様体のリプシッツ距離による極限という、重要な場合について、この問題

を解決したものである。

同様な問題は一般のアレクサンドロフ空間に対しても考えられる。

なめらかなリーマン多様体の閉測地線の存在定理の証明には、道の空間でのモース理論が用いられる。空間が単連結でない場合は、これは、最小値の存在を用いて閉測地線を構成することになり、一般のアレクサンドロフ空間（さらに一般に任意の Length space）に対しても、容易に拡張される。

単連結な場合は、なめらかな多様体の場合の証明では、高次のホモロジー群やホモトピー群が用いられた。言い換えると峠の補題を用いて、（極小値ではない）極値の存在が示された。

アレクサンドロフ空間に対しても、同様なアプローチが考えられる。しかし、なめらかではない空間での道の空間に対するモース理論を建設すること、特に、極小値ではない極値を探すことは著しく困難である。しかし、大変重要な問題として、今後必ずしもなめらかとは限らない空間の、リーマン幾何学の主要問題の一つとして、研究されていくべき問題であると思われる。

岸本の学位申請論文は、この方向の研究に対して、重要な端緒を与えるものであり、凸集合の境界のような、基本的に重要な場合について、すでに回答を与えている。

岸本は、既述の道の空間でのモース理論の困難を避けるために、なめらかなリーマン多様体による近似を用いた。すなわち、問題となるアレクサンドロフ空間 X をなめらかなリーマン多様体 X_i で近似し、 X_i の閉測地線の極限として、 X の閉測地線を構成した。しかし、 X_i の閉測地線の列には極限が存在するとは限らないので、これを実行するには、 X_i の閉測地線を勝手にとるのではなく、 X の高次のホモトピー群の元を決めて、その元と関わるような、 X_i の閉測地線列をとる必要がある。

一般には、なめらかな空間でない場合には、閉測地線列の極限は、からなずしも、閉測地線ではない。このために、閉測地線概念を擬閉測地線に一般化しないと、閉測地線の存在定理は成り立たないことが知られている。したがって、主定理の結論は擬閉測地線の存在定理である。

このように、岸本巖の学位申請論文は、閉測地線の存在問題という、重要な問題を、凸集合の境界を含む、アレクサンドロフ空間の重要な場合に考察し、解決したものである。さらに、その解決法は、大域変分法の種々の考え方を巧みに用いた、正統的で本格的なものである。よって、本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。

なお、主論文および参考論文に報告されている研究を中心とし、それに関連した研究分野について諮問した結果、合格と認めた。