

移動平均過程の母数推定量の漸近的性質について

東大 I 西尾 敦

1. $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ は次式によつて生成される定常 ARMA (p, q) 過程とする。

$$x_t - \sum_{s=1}^p \beta_s x_{t-s} = \varepsilon_t - \sum_{s=1}^q \alpha_s \varepsilon_{t-s}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

ただし $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2)$. 観測値 $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)'$ の確率密度関数 (p.d.f.) は

$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \underline{x}' \Sigma^{-1} \underline{x}\right\} \quad (2)$$

で与えられる. ここで $\Sigma = \text{Toep}(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$, $\sigma^2 \sigma_i = E x_t x_{t+i}$ である. 母数 $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)$, σ^2 の最尤推定量は (2) 式の最大化により得られる. しかし (2) 式は $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ に関して著しく非線型でありこれを正確に求めることは複雑な計算を必要とする. Hannan, Anderson⁽¹⁾ は (2) 式中の $\underline{x}' \Sigma^{-1} \underline{x}$ をそれぞれの方法により近似した量をもとに反復法を用いて推定量を得ることを提案しそれらが漸近的に最尤推定量と同等であることを示した. Anderson はまた⁽²⁾ それぞれの近似が (1) 式において $x_0 = x_n, x_{-1} = x_{n-1}, \dots, x_{1-p} =$

$x_{n-p+1}, \varepsilon_0 = \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_{n-g} = \varepsilon_{n-g+1}$ あるいは, $x_0 = x_{-1} = \dots = x_{-p} = 0,$
 $\varepsilon_0 = \dots = \varepsilon_{-g} = 0$ としたモデルの分散行列 Ω を Σ の代わり
 に用いたものであることを示した. また, Box-Jenkins は Back-
 ward forecasting を用いて $x' \Sigma^{-1} x$ を正確に計算する方法を提案し
 た. これは 一般最小二乗法と呼ばれる. 近年は 計算機の
 発達により 比較的複雑な計算も処理可能となった. このこ
 とに応じて正確な尤度と求めるアルゴリズムも研究され 正
 確な最尤推定も行なわれている. 本稿では MA(1) 過程の母
 数 α の推定量のバイアス, 平均二乗誤差をそれぞれ $O(n^{-1}), O(n^{-2})$
 まで求めることを試みるが 対象とする推定量は前述のこと
 がらとふまえて, (i) 初期値を 0 とするモデルの最尤推定量 $\hat{\alpha}_{LE}$
 (ii) Box-Jenkins の一般最小二乗推定量 $\hat{\alpha}_{BJ}$ (iii) 正確な最尤推定
 量 $\hat{\alpha}_{ML}$ の三種とした.

2. ここでの議論に便利なように 上述の 3 推定量を導く
 ため $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ を MA(1) 過程と仮定する

$$x_t = \varepsilon_t - \alpha \varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2) \quad (2)$$

とする. 簡単のため $\sigma^2 = 1$ と仮定とする. σ^2 が未知の場合
 については後に触れる. ε_0 と与えられたものとし (2) 式を再
 帰的に用いると, $x_t = \varepsilon_t + \alpha x_{t-1} + \dots + \alpha^{t-1} x_1 + \alpha^t \varepsilon_0$ である.
 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ の p.d.f. は $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{1}{2} \varepsilon' \varepsilon)$ であり ε と
 x の変換のヤコビアンは 1 であるから x の ε_0 と与えたとき

の条件付 p. d. f. は

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \{ \hat{\varepsilon}_t^{(\varepsilon_0)}(\alpha) \}^2 \quad (4)$$

$$\hat{\varepsilon}_t^{(\varepsilon_0)}(\alpha) = x_t + \alpha x_{t-1} + \dots + \alpha^{t-1} x_1 + \alpha^t \varepsilon_0$$

x の p. d. f. は (4) を ε_0 の周辺分布について積分することによって求まる. $\hat{\varepsilon}_t^{(\varepsilon_0)}(\alpha) = \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) + \alpha^t \varepsilon_0$ で $\hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha)$ は $\varepsilon_0 = 0$ 場
合に注意可なり

$$\begin{aligned} f(x, \alpha) &= \int (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \{ \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) + \alpha^t \varepsilon_0 \}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \right] d\varepsilon_0 \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (1-\alpha^2)(1-\alpha^{2n+2})^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \{ \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) \}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (1-\alpha^2)(1-\alpha^{2n+2})^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{t=1}^n \alpha^t \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

となる. このことから $\hat{\alpha}_{\pi_0}$, $\hat{\alpha}_{\pi_1}$, $\hat{\alpha}_{\pi_2}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mu(\alpha) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \{ \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) \}^2 \\ \lambda(\alpha) &= \mu(\alpha) + \frac{1}{2} (1-\alpha^2)(1-\alpha^{2n+2})^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{t=1}^n \alpha^t \hat{\varepsilon}_t^{(0)}(\alpha) \right\}^2 \\ \nu(\alpha) &= \lambda(\alpha) + \frac{1}{2} \log(1-\alpha^2)(1-\alpha^{2n+2})^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

の最大化により得られる推定量であることがわかる.

2. $L(\alpha)$ を $\mu(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$, $\nu(\alpha)$ のいずれかとし $\hat{\alpha}$ を $L(\alpha)$ に基づく α の推定量とする. $\hat{\alpha}$ は $\frac{\partial}{\partial \alpha} L(\hat{\alpha}) = 0$ を満足する. 簡単のため以下では $\frac{\partial^i}{\partial \alpha^i}$ を ∂^i で表わす. $\partial L(\alpha)$ を α のまわりで展開し 方程式 $\partial L(\hat{\alpha}) = \partial L(\alpha) + (\hat{\alpha} - \alpha) \partial^2 L(\alpha) + \frac{1}{2} (\hat{\alpha} - \alpha)^2 \partial^3 L(\alpha) + \dots = 0$ によりラングランジュの展開公式を適用して $(\hat{\alpha} - \alpha)$ について解くと

(Shenton & Brownian 参照)

$$\hat{\alpha} - \alpha = \sum_{j=1}^n A_j^i B_j \quad (7)$$

と表わされる. ここで, $A_i = \partial^i L(\alpha) / \partial^2 L(\alpha)$, ($i=1, \dots$)

$B_1 = -1$, $B_2 = -A_2/2$, $B_3 = (A_4 - 3A_2^2)/6$, $\dots$ である.

記号 I_i , $\Delta \partial^i L$, $P_{i_1 \dots i_p}$ 等を次式のように定義する.

$$I_i = E \partial^i L(\alpha),$$

$$\Delta \partial^i L(\alpha) = \partial^i L(\alpha) - E \partial^i L(\alpha),$$

$$P_{i_1 \dots i_p} = E(\Delta \partial^{i_1} L(\alpha))(\Delta \partial^{i_2} L(\alpha)) \dots (\Delta \partial^{i_p} L(\alpha)).$$

(7) 式の右辺の各項に現われる A_i を

$$\begin{aligned} A_i &= \partial^i L(\alpha) / \partial^2 L(\alpha) = (I_i + \Delta \partial^i L(\alpha)) / (I_2 + \Delta \partial^2 L(\alpha)) \\ &= I_2^{-1} (I_i + \Delta \partial^i L(\alpha)) \{ 1 - \Delta \partial^2 L(\alpha) \cdot I_2^{-1} + (\Delta \partial^2 L(\alpha) I_2^{-1})^2 - \dots \} \end{aligned}$$

と表わして (7) 式の右辺の期待値を項別にとる. また, 6 節で示すように.

$$P_{i_1 \dots i_p} = O(n^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}), \quad I_2 = O(n)$$

である. ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x と越えない最大の整数とする. これより

$$E(\hat{\alpha} - \alpha) = -I_1 I_2^{-1} + (P_{12} + I_3/2) I_2^{-2} + O(n^{-2}) \quad (8)$$

を得る. (7) 式の両辺を 2 乗して 同様の操作を行うと.

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 &= (I_1^2 + P_{11}) I_2^{-1} - \{ I_1 \{ 4P_{12} + 3I_3 \} + 2P_{112} \\ &\quad + 3P_{12} \} I_2^{-3} + (I_3 P_{111} + P_{1113} + 2P_{1122}) I_2^{-4} \\ &\quad - \frac{1}{3} I_2^{-5} [4P_{1111} + \frac{5}{4} I_3^2 P_{1122} I_2^{-6} + O(n) \end{aligned}$$

假定のように

$$P_{1111} = 3P_{11}^2 = 3I_2^2 + O(n)$$

$$\Gamma_{1122} = 2\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22} + O(n) \quad (8)'$$

$$\Gamma_{1113} = 3\Gamma_{11}\Gamma_{13} + O(n)$$

であることを用いて整理すると、

$$\begin{aligned} E(\hat{d}-d)^2 &= (I_1^2 + \Gamma_{11}) I_2^{-2} - I_1 (4H_{12} + 3I_3) I_2^{-3} \\ &\quad - (2\Gamma_{112} + 3\Gamma_{22} + 3\Gamma_{13} + I_4) I_2^{-3} \\ &\quad + (I_3\Gamma_{111} + 6\Gamma_{12}^2 + 12I_3\Gamma_{12} + \frac{15}{4}I_3^2) I_2^{-4} \\ &\quad + O(n^{-3}) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。6節で述べる方法により (8), (9) 式中の各項を計算した結果を示すと、

$\hat{d}_{HL}$ について

$$I_1 = 0.$$

$$-I_2 = n(1-d^2)^{-1} - (1-d^2)^{-1} - 4d^2(1-d^2)^{-2}$$

$$\Gamma_{11} = -I_2.$$

$\hat{d}_{BJ}$ について、

$$I_1 = d(1-d^2)^{-1}$$

$$-I_2 = n(1-d^2)^{-1} - 2(1-d^2)^{-1} - 6d^2(1-d^2)^{-2}$$

$$\Gamma_{11} = n(1-d^2)^{-1} - (1-d^2)^{-1} - 4d^2(1-d^2)^{-2} \quad (9)'$$

$\hat{d}_{I_0}$ について、

$$I_1 = -d^3(1-d^2)^{-2}$$

$$-I_2 = n(1-d^2)^{-1} - (1-d^2)^{-1} + 4d^4(1-d^2)^{-3}$$

$$\Gamma_{11} = n(1-d^2)^{-1} - (1-d^2)^{-1} + 4d^4(1-d^2)^{-3}$$

$$+ \alpha^4(1-\alpha^2)^{-3} + 2\alpha^6(1-\alpha^2)^{-4}$$

また 他の項は 3 推定量について共通に

$$I_3 = -6n\alpha(1-\alpha^2)^{-2} + O(1)$$

$$I_4 = -12n\{(1-\alpha^2)^{-2} + 4\alpha^2(1-\alpha^2)^{-3}\} + O(1)$$

$$I_{12} = 4n\alpha(1-\alpha^2)^{-2} + O(1) \quad (9')$$

$$I_{13} = 6n\alpha\{(1-\alpha^2)^{-1} + 4\alpha^2(1-\alpha^2)^{-3}\} + O(1)$$

$$I_{22} = 2n\{3(1-\alpha^2)^{-2} + 10\alpha^2(1-\alpha^2)^{-3}\} + O(1)$$

$$I_{111} = -6n\alpha(1-\alpha^2)^{-2} + O(1)$$

$$I_{112} = -4n\alpha\{2(1-\alpha^2)^{-2} + 7\alpha^2(1-\alpha^2)^{-3}\} + O(1)$$

である。以上の諸結果を (8), (9) 式に代入して 各推定量の

バイアス, 平均二乗誤差は

$$E(\hat{\alpha}_{ML} - \alpha) = \alpha/n + O(n^{-2})$$

$$E(\hat{\alpha}_{BJ} - \alpha) = 2\alpha/n + O(n^{-2}) \quad (10)$$

$$E(\hat{\alpha}_{T_0} - \alpha) = \{\alpha - \alpha^3(1-\alpha^2)^{-1}\}/n + O(n^{-2})$$

$$E(\hat{\alpha}_{ML} - \alpha)^2 = (1-\alpha^2)^{-1}/n + (9 + 2\alpha^2)/n^2 + O(n^{-3})$$

$$E(\hat{\alpha}_{BJ} - \alpha)^2 = (1-\alpha^2)^{-1}/n + (11 + 3\alpha^2)/n^2 + O(n^{-3}) \quad (11)$$

$$E(\hat{\alpha}_{T_0} - \alpha)^2 = (1-\alpha^2)^{-1}/n + \{9 - \alpha^2 - 8\alpha^4(1-\alpha^2)^{-1} + 2\alpha^6(1-\alpha^2)^{-2}\}/n^2 + O(n^{-3})$$

で与えられる。

4. さて バイアスが (10) 式によって与えられるので
これを用いて バイアス修正した 推定量が考えられる。以

下では 修正推定量と * をつけて表わす. 一般に 適当な
正則条件の下で 母数 α の推定量について 十分滑らかな関
数 $f(\alpha)$ があって

$$E(\hat{\alpha} - \alpha) = f(\alpha)/n + O(n^{-2})$$

であることがわかっていゝ場合 $\hat{\alpha}$ を修正した推定量 $\hat{\alpha}^*$ を

$$\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha} - f(\hat{\alpha})/n$$

とおけば 容易に

$$E(\hat{\alpha}^* - \alpha) = O(n^{-2})$$

$$E(\hat{\alpha}^* - \alpha)^2 = \{1 - 2f'(\alpha)/n\}^2 V(\hat{\alpha}) + O(n^{-3}) \quad (12)$$

であることがわかる. 考へていゝ 3 推定量について (12) 式は

$$E(\hat{\alpha}_{HL}^* - \alpha)^2 = (1 - d^2)^{-1}/n + (7 + 3d^2)/n^2 + O(n^{-3})$$

$$E(\hat{\alpha}_{BT}^* - \alpha)^2 = E(\hat{\alpha}_{HL}^* - \alpha)^2 \quad (13)$$

$$E(\hat{\alpha}_{I_0}^* - \alpha)^2 = (1 - d^2)^{-1}/n + \{7 + 3d^2(1 - d^2)^{-1} + 2d^4(1 - d^2)^{-2}\}/n^2 + O(n^{-3})$$

となる. $\hat{\alpha}_{HL}^*$ と $\hat{\alpha}_{BT}^*$ が同等である理由は バイアス修正を次の
ように行つてもよいことから理解される. すなわち (4) 式に
おいて $\mu(a)$ が 0 となるように I_1 を定める. これは $\tau - \eta$
に依存せず 母数の関数として与えられる. $\hat{\alpha}_{HL}$ と $\hat{\alpha}_{BT}$ の差は
すなわち $\mu(a)$ と $\nu(a)$ の差は $\tau - \eta$ に依存しないから バ
イアス修正を上のように行えば全く同じ推定量となる.

5. $\sigma^2 = E \varepsilon_t^2$ が未知の場合について若干考察を加へる.
簡単のため $\sigma^2 = 1$ とする. (4), (5) 式を σ^2 を含む式に書き

直すと 容易に $\hat{\alpha}_{BT}, \hat{\alpha}_{T0}$ は σ^2 が未知であっても変わらないことがわかる. σ^2 を含む正確な対数尤度 $L(\alpha, \sigma^2)$ は (6) 式の $\lambda(\alpha)$ を用いて.

$$L(\hat{\alpha}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 + \frac{1}{2} \log(1 - \hat{\alpha}^2) + \frac{1}{\sigma^2} \lambda(\hat{\alpha})$$

となる. α, σ^2 について偏微分して 0 とおくと 最尤推定量 $\hat{\alpha}, \hat{\sigma}^2$ は 次式により得られる.

$$-\hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha}^2)^{-1} + \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \partial \lambda(\hat{\alpha}) = 0 \quad (14)$$

$$-\frac{n}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} - \frac{1}{\hat{\sigma}^4} \lambda(\hat{\alpha}) = 0 \quad (15)$$

(15) 式を (14) 式に代入して

$$\hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha}^2)^{-1} \frac{2}{n} \lambda(\hat{\alpha}) + \partial \lambda(\hat{\alpha}) = 0 \quad (16)$$

となる. (16) 式の左辺を $\partial v'(\hat{\alpha})$ として 3 節の議論をそのまま適用できる. α を真の値とすると $E \lambda(\alpha) = -\frac{n}{2}$ であることがわかるから

$$\begin{aligned} \partial v'(\alpha) &= \alpha(1 - \alpha^2)^{-1} \frac{2}{n} (\lambda(\alpha) + \frac{n}{2}) - \alpha^2(1 - \alpha^2)^{-1} + \partial \lambda(\alpha) \\ &= \alpha(1 - \alpha^2)^{-1} \frac{2}{n} (\lambda(\alpha) - E \lambda(\alpha)) + \partial v(\alpha) \end{aligned}$$

$E \partial \lambda(\alpha) = 0(1)$, $E(\lambda(\alpha) - E \lambda(\alpha))(\partial \lambda(\alpha)) = 0(1)$, $E(\lambda(\alpha) - E \lambda(\alpha))^2 = 0(n)$ であることが示されるから

$$E \partial v'(\alpha) = E \partial v(\alpha) = 0$$

$$E \partial^2 v'(\alpha) = E \partial^2 v(\alpha) + \alpha(1 - \alpha^2)^{-1} \cdot \frac{2}{n} E \partial \lambda(\alpha) = E \partial^2 v(\alpha) + 0(n^{-1})$$

$$\begin{aligned} E(\partial v'(\alpha))^2 &= E(\partial^2 v(\alpha))^2 + \alpha(1 - \alpha^2)^{-1} \frac{4}{n} E(v(\alpha) - E v(\alpha)) \cdot \partial v(\alpha) \\ &\quad + \frac{4}{n^2} \alpha^2(1 - \alpha^2)^{-1} E(\lambda(\alpha) - E \lambda(\alpha))^2 \end{aligned}$$

$$= E(\partial V(\alpha))^2 + O(n^{-1})$$

である. (8), (9) 式に 現われる他の項への影響も higher order になるから σ^2 が未知のとき (10), (11) 式の結果は変更されないことがわかる.

6. 最後に途中で用いた尤度の微係数のモーメントの導出などについて述べる. $y = (y_1, \dots, y_p)'$ とする. このモーメント $\mu_{i_1 \dots i_k} = E y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k} \quad k=1, 2, \dots, i_1, i_2, \dots, i_k = 1, \dots, p$ は y のキュムラント $\lambda_{j_1 \dots j_\ell} \quad \ell \leq k$ を用いて表わされる. とくに 中心モーメント $\mu'_{i_1 \dots i_k}$ は

$$\mu_{i_1 i_2} = \lambda_{i_1 i_2}$$

$$\mu_{i_1 i_2 i_3} = \lambda_{i_1 i_2 i_3}$$

$$\mu_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \lambda_{i_1 i_2 i_3 i_4} + \lambda_{i_1 i_2} \lambda_{i_3 i_4} + \lambda_{i_1 i_3} \lambda_{i_2 i_4} + \lambda_{i_1 i_4} \lambda_{i_2 i_3}$$

...

一般に $\mu_{i_1 \dots i_k}$

$$= \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_\ell = k \\ i_1, \dots, i_\ell \geq 2}} \sum' \lambda_{j_1 \dots j_{r_1}} \lambda_{i_{r_1+1} \dots i_{r_1+r_2}} \dots \lambda_{i_{r_1+\dots+r_{\ell-1}+1} \dots i_k} \quad (17)$$

である. ただし $j_1, \dots, j_{r_1}$ は $i_1, \dots, i_k$ の並べかえであり

$\sum'$ は $i_1, \dots, i_k$ を それぞれの個数が $r_1, \dots, r_\ell$ である ℓ 個の組に分ける (b) をすべてについての和を表わす.

$$y \sim N_p(0, \Sigma), \quad \Sigma = (\sigma_{ij}) \quad \text{とし} \quad z = (z_1, \dots, z_p)$$

$= (y_1^2, \dots, y_p^2)$ とすると z は y から生成される Wishart

行列の対角成分からなるベクトルである。この Wishart 行列の
キムラニト母関数 $\psi(T)$ ($T = (t_{ij})$) は

$$\begin{aligned}\psi(T) &= \log E \exp t_{ij} y_i y_j \\ &= -\frac{1}{2} \log |I - 2T\Phi| \\ &= \text{tr } T\Phi + \frac{2}{2} \text{tr}(T\Phi)^2 + \frac{2^2}{3} \text{tr}(T\Phi)^3 + \dots\end{aligned}\quad (18)$$

であるから Σ の キムラニト $\lambda_{i_1 \dots i_k}$ は (18) で $t_{i_1 i_1} \dots t_{i_k i_k}$
の係数から

$$\lambda_{i_1 \dots i_k} = \frac{2^{k-1}}{k} \sum \sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_2 i_3} \dots \sigma_{i_k i_1} \quad (19)$$

である。ただし $i_1, \dots, i_k$ は $1, 2, \dots, k$ の並べかえであり
 $\sum$ はすべての順列についての和である。4次までのキムラ
ニトは

$$\begin{aligned}\lambda_{i_1} &= \sigma_{i_1 i_1}, \quad \lambda_{i_1 i_2} = 2 \sigma_{i_1 i_2}^2, \quad \lambda_{i_1 i_2 i_3} = 8 \sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_2 i_3} \sigma_{i_3 i_1}, \\ \lambda_{i_1 i_2 i_3 i_4} &= 16 (\sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_2 i_3} \sigma_{i_3 i_4} \sigma_{i_4 i_1} + \sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_2 i_4} \sigma_{i_4 i_3} \sigma_{i_3 i_1} \\ &\quad + \sigma_{i_1 i_3} \sigma_{i_3 i_2} \sigma_{i_2 i_4} \sigma_{i_4 i_1})\end{aligned}\quad (19)'$$

である。

さて、本稿で用いた(擬似)尤度 $L(a)$ の微係数のモーメント
は次のようにすれば求まる。 I_k は $\phi(a) = E L(a)$ とすると
 $L(a)$ は a の関数として多項式であるから微分と期待値の順
序と交換して

$$I_k = E \partial^k L(a) = \frac{\partial^k}{\partial a^k} \phi(a),$$

$$I_{i_1 \dots i_k} \text{ は } \phi(a_1, \dots, a_k) = E \prod_{j=1}^k (L(a_j) - E L(a_j)) \text{ として}$$

$$P_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^{i_1}}{\partial a_{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_k}}{\partial a_{i_k}} \phi(a, \dots, a)$$

である。以下の記述では $L(a) = \mu(a)$ とする。他の場合もほとんど同様である。

$$L(a) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^{\omega^2}(a)$$

であるから

$$\phi(a_1, \dots, a_k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{t_1=1}^n \dots \sum_{t_k=1}^n E \prod_{j=1}^k \left\{ \hat{\varepsilon}_{t_j}^{\omega^2}(a_j) - E \hat{\varepsilon}_{t_j}^{\omega^2}(a_j) \right\}. \quad (20)$$

$\hat{\varepsilon}_t(a)$ は正規過程 $\{x_t\}$ の線型関数であるから、平均 0 の正規分布を (

$$\begin{aligned} E \hat{\varepsilon}_{t_{i_1}}^{\omega^1}(a_{i_1}) \hat{\varepsilon}_{t_{i_2}}^{\omega^1}(a_{i_2}) \\ = 1 + (a_{i_1} - d)(a_{i_2} - d)(1 - a_{i_1} a_{i_2})^{-1} (1 - (a_{i_1} a_{i_2})^{t_{i_1}-1}) + d^2 (a_{i_1} a_{i_2})^{t_{i_1}-1}, \quad t_{i_1} = t_{i_2} \\ (a_{i_1} - d) a_{i_1}^{t_{i_1}-t_{i_2}-1} + (a_{i_1} - d)(a_{i_2} - d)(1 - a_{i_1} a_{i_2})^{-1} (1 - (a_{i_1} a_{i_2})^{t_{i_2}-1}) \\ + d^2 a_{i_1}^{t_{i_1}-1} a_{i_2}^{t_{i_2}-1}, \quad t_{i_1} > t_{i_2} \end{aligned} \quad (21)$$

である。 $\mathbf{x} = (\hat{\varepsilon}_{t_1}^{\omega^2}(a_1), \dots, \hat{\varepsilon}_{t_p}^{\omega^2}(a_p))$ かつ $\mathbf{t} = (t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ とするとこれは (21) 式を (14) 式に代入して得られる。(17) 式

より (20) 式中の

$$\begin{aligned} E \prod_{j=1}^k \left\{ \hat{\varepsilon}_{t_j}^{\omega^2}(a_j) - E \hat{\varepsilon}_{t_j}^{\omega^2}(a_j) \right\} \\ = \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \sum_{r_1 + \dots + r_\ell = p} \sum_{r_1, \dots, r_\ell \geq 2} \lambda_{i_1 \dots i_{r_1}}(t_{j_1}, \dots, t_{j_{r_1}}) \dots \lambda_{i_{r_{\ell-1}+1} \dots i_p}(t_{j_{r_{\ell-1}+1}}, \dots, t_{j_p}) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。さて、証明は省略するが k についての帰納法により下の補題が成立する。

補題 上で定義された $\lambda_{i_1 \dots i_k}(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ について、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \lambda_{i_1 \cdots i_k} (x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}) \\
&= A(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}) n + B(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}) \\
&\quad + C_1(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}, n) b_1^n + \cdots + C_\ell(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}, n) b_\ell^n \quad (23)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし $A, B, C_1, \cdots, C_\ell$ は $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ について何回でも微分可能。 $C_1, \cdots, C_\ell$ は n については多項式、 ℓ はある整数、 $b_1, \cdots, b_\ell$ は $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ によって定まる絶対値が 1 より小さい定数である。

(22) 式を $x_1, \cdots, x_p$ について加えることによって $\phi(a_1, \cdots, a_p)$ が求まるが (22) 式中 右辺の各項で x_i は 1 度しか現われないことに注意して補題を用いると $\phi(a_1, \cdots, a_p)$ は (23) の形の関数。たかだか $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 個の積の関数の有限個の和で表われることがわかる。したがって

$$f_{i_1 \cdots i_p} = O(n^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor})$$

が証明される。 $\phi(a), \phi(a_1, \cdots, a_k), k=2, 3, 4$ を上述の方法により (21) 式を用いて具体的に計算すれば (8)', (9)' 式などに記した結果が得られる。

参考文献

Anderson, T. W. [1] (1975) Maximum likelihood estimation of parameters of autoregressive processes with moving average residuals and other covariance matrices with linear structure.

Ann. Stat. 3, 1283-1304

Anderson, T. W. [27]. (1977). Estimation for autoregressive moving average models in the time and frequency domains. Ann. Stat. 5, 842-865.

Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. (1970). Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden-Day.

Hannan, E. J. (1969). The estimation of mixed moving average autoregressive systems. Biometrika 56, 579-584.

Shenton, L. R. & Bowman, K. O. (1977). Maximum Likelihood Estimation in Small Samples. Griffin.