

3次元 Fano 多様体のモジュライと モジュライ論的記述

名古屋大学大学院
多元数理科学研究科

岡井 茂

ある代数多様体が何かをパラメータ付けていることは、
多様体とパラメータ付けられている対象の両方にとって
幸福なことである。ここでは 3次元 Fano 多様体を
論じるが、

(1) それらの多くが (代数曲系上の) ベクトル束
をパラメータ付けていたり

(2) それらの中の特別なものは アーベル曲面をパラ
メータ付けている

ことが観察される。前者に関しては拙著 [論 9] §8, 9 において曲系の側から説明したが、ここでは Fano 多様体の側からの必然として (1) やその類似が成立することを説明したい。ポイントは

普遍ベクトル束による変換でもって、Fano 多様体の幾何がより簡単な多様体上のベクトル束や有理曲系の話に帰着される

ことにある。応用としては、種数 9 の場合に

Fano 多様体の変形 (や退化) がより簡単な多様体の変形とその上のベクトル束の変形に分解でき、

他の高種数の場合も似たことでできることがある。

§1, 2 で必要な準備と系型切断定理の復習をした後、§3, 4 でモジュライ論的記述も説明する。講演では時間がなくて略したが、系型切断定理とモジュライ論的記述の間にはある種の双対性が観察される。最終節ではこれに関して述べる。

多くの事実の発見や証明は $K3$ 曲面上のベクトル束
 において行われるが、これについては触れられなかった。

なお、(2) の方は レベルの小さい モジュラー曲線
 が P^1 に落ちたり、判別式の小さい Hilbert モジュラー
 曲面 が有理的であることと 3次元 に拡張する試み
 である。これに関しては 拙著 [論説95] 58 と [24] を
 参照されたい。

記号と用語 固定された n 次元 ベクトル空間の
 中の r 次元 部分空間全体のなす Grassmann 多様体
 を $G(r, n)$ で表す。曲線とは 完備代数曲
 線のことで、特に断わらなければ 非特異とする。殆
 んどのことが一般の標数零の体上でできる。その
 ことが ベクトル束法の利点の1つであるが、記述
 の煩と読みづらさを避けるために 全て複素数体
 $\mathbb{C}$ 上で考える。部分多様体 $X \subset Y$ は、 Y 上の
 ベクトル束 E の 大域切断 の 零スキームと一致し、
 Y とき、 Y の中で E に 関して 完全交叉で なるという。

余次元 が E の階数に等しい。

§ 1 準備

3次元 Fano 多様体 (の反標準モデル) $X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ の研究は G. Fano (1871-1952) が直系束からの2重射影

$$X_{2g-2} \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-6}$$

を用いて種数 $g \geq 10$ のものの有理性を示したことに始まる。以下で述べる結果は Fano 多様体上の直線という部分多様体の替りにその上のベクトル束を使う点で Fano 自身やそれを引き継ぎ発展させた Iskovskikh, Shokurov, 森等の結果と異なる。ベクトル束の方法には以下で見るように2種あるが、このうち Fano 多様体のカノニカルを表現と与えるので、これによってそれらの変形や退化を精密に調べるここからである。

以下では Picard 数が1で Fano 指数が1の非特異3次元 Fano 多様体を考察する。言換えると、反標準直系束

$$\mathcal{O}_X(-K_X) := \bigwedge^3 T_X$$

が豊富で Picard 群を生かしている射影的代数多様体である。これを単に 3 次元 Fano 多様体と呼びこにする。(2 次元以下では $\text{Pic } X \cong \mathbb{Z}(K_X)$ なる多様体は存在しない。)

Riemann-Roch 型定理や小平の消滅定理等により

$$\dim H^0(\mathcal{O}_X(-K_X)) = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 3$$

が成立する。これに現われる自己交点数の替りに種数

$$g := \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$$

でもって 3 次元 Fano 多様体 X の "大まか" を計ることにする。別の重要な離散的な不変量として

$$p := \dim H^1(X, \Omega^2)$$

がある。これは X の第 3 Betti 数の半分であり、中間次元 Jacobi 多様体の次元に等しい。以下では Hodge 数と呼ぶ。3 次元 Fano 多様体の変形同値類は丁度 10 個で、それらの不変量 g と p は次の通りである。

表 1

g	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
p	52	30	20	14	10	7	5	3	2	0

これらのうち種数が 5 以下のものは次のように荷重射影空間内で超曲面の完全交叉になっている。

表 2

g	2	3	4	5
X	$(6) \subset \mathbb{P}(1^3)$ $(2)_n(4) \subset \mathbb{P}(1^5 2)$	$(4) \subset \mathbb{P}^4$	$(2)_n(3) \subset \mathbb{P}^5$	$(2)_n(2)_n(2) \subset \mathbb{P}^5$

反標準線型系 $| -K_X |$ の中には非特異 K3 曲面が存在する ([Sho])。この上の rigid ベクトル束を X 上のベクトル束に拡張し、これにおいて Grassmann 埋込みをすることによって次の結果を得る。

線型切断定理

X は種数 g が 7 以上の 3 次元

Fano 多様体とする。このとき、Grassmann 多様体 $\mathcal{G}_g$ と X 上の等質ベクトル束 E_g 、そして、 E_g に関して完全交叉になっている $(p+3)$ 次元部分多様体 $\Sigma_{2g-2} \subset \mathcal{G}_g$ が存在して、 X は $\Sigma_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+p+1}$ (自然な埋込み) を p 回横断的に超平面切断したものと同型である。

§2 線型切断定理

(はらくは種数 g の 3 次元 Fano 多様体 X に対して線型切断定理を復習しよう。

命題 X の上には階数 3 の安定ベクトル束 A であって、定数 n もものが同型を除いて唯一つ存在する。

$$1) \det A \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$$

$$2) h^0(A) = 6$$

3) A は大域切断でもって生成される。

コホモロジー群 $H^1(A \otimes A^*)$ が消えているので、変形が全くない。そこで、これを rigid 束と呼ぶ。

この階数 3 のベクトル束 A とそれの 6 個の大域切断より g 次元 Grassmann 多様体への射

$$\Phi_A : X \longrightarrow G(3, 6)$$

がえられる。

命題 (1) Φ_A は埋込みである。(以下, Φ_A でも, X とその像を同一視する。)

(2) X は Lagrangian Grassmann 多様体 $G(3, 6, \sigma)$ に含まれる。ただし, σ は 6次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^6$ (正確には $H^0(A)$ の双対) の上の非退化歪対称双線型形式で, $G(3, 6, \sigma)$ は $\mathbb{C}^6$ の中の 3次元部分空間 U で $\sigma|_{U \times U} \equiv 0$ なるものの全体のうち $G(3, 6)$ の部分多様体である。

$G(3, 6, \sigma)$ は シンプレクティック群 $Sp(3)$ の作用する 6次元等質空間である。9次元 Grassmann 多様体 $G(3, 6)$ は Plücker 座標でもって

$$\mathbb{P}^{19} = \mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathbb{C}^6)$$

に埋め込まれているが, $G(3, 6, \sigma)$ はその中で 13次元の射影空間と張り合っている。これは $Sp(3)$ の 14次元既約表現 U^4 の射影化になっている。

線型切断定理 ($g=9$) 3次元 Fano 多様体 X は 6次元 Lagrangian Grassmann 多様体 $G(3, 6, \sigma) \subset \mathbb{P}^{19}$ とそれに横断的な余次元 3 ($=p$) の部分線型空間との交わりと同型である。

$\mathbb{P}$

$\mathcal{F}$ を Grassmann 多様体 $G(3,6)$ 上の 普遍部分束 の双対としよう。埋込の構成より、 $\mathcal{F}$ の X への制限は rigid 束 A と同型である。また、 $G(3,6,\sigma)$ は $G(3,6)$ の中で等値ハフトル束

$$\bigwedge^2 \mathcal{F}$$

に関して完全交叉になっている。よって §1 での記号との関係は

$$\mathcal{E}_9 = G(3,6), \quad \mathcal{E}_9 = \bigwedge^2 \mathcal{F}, \quad \Sigma_{16} = G(3,6,\sigma)$$

である。

また、上の記述 $X \cong G(3,6,\sigma)_\cap \mathcal{P}$ は一意的である。即ち、 $X \cong G(3,6,\sigma)_\cap \mathcal{P}'$ なる線型部分空間は $Sp(3)$ の作用をもって $\mathcal{P}$ に移り合う。よって、 X のモジュライ空間は軌道空間の中の閉部分集合である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{種数 9 の 非特異} \\ \text{3次元 Fano 多様体} \end{array} \right\} / \text{同型} \xrightarrow{\text{開}} G(3, U^{14}) / Sp(3)$$

$$3(14-3)-21=12 \text{次元}$$

他の種数も同様である。

表 3

種数 g	7	8
Hodge 数 ρ	7	5
Graessmann 多様体 $\mathcal{G}_g$	$G(5, 10)$	$G(2, 6)$
等質 $\wedge^7 \mathcal{T}$ 束 $\mathcal{E}_g$	$S^2 \mathcal{F}$	$\mathcal{O}$
モジュライ	$G(7, U^{16})/SO(10)$	$G(5, \check{\Lambda}^6 \mathbb{C}^6)/PGL(6)$
モジュライ数	18	15

9	10	12
3	2	0
$G(3, 6)$	$G(5, 7)$	$G(3, 7)$
$\check{\Lambda}^2 \mathcal{F}$	$\check{\Lambda}^4 \mathcal{F}$	$3 \check{\Lambda}^2 \mathcal{F}$
$G(3, U^{14})/Sp(3)$	$G(2, \mathcal{G})/G_2$	$G(3, \check{\Lambda}^3 \mathbb{C}^7)/PGL(7)$
12	10	6

ただし, $\mathcal{F}$ は Grassmann 多様体 $G(r, n)$ 上の
 普遍部分ベクトル束の双対 (よって階数は n) である。
 ψ^{16} は 10 次スピノル群の 16 次元半スピノル表現
 を表わす。また, G_2 は G_2 型の例外型半単純代
 数群で, $\mathcal{F}$ はその Lie 環 (への随伴表現) で
 ある。

注 Grassmann 多様体 $\mathcal{G}_g$ の次元は 種数 g 以外
 のときは g に等しく, $\mathcal{G}_7$ の次元は $4 \times 7 - 3 = 25$ で
 ある。

§ 3 モジュライ論的記述 (種数 9)

前節と同様、種数 9 の 3 次元 Fano 多様体 X に対して説明しよう。前節の主役は (階数 3 の) rigid ベクトル束 A であったが、モジュライ論的記述では $H^1(B \otimes B^*)$ の次元が出来るだけ小さいベクトル束 B を使う。種数 9 では次のものが見つかる。

命題 Fano 多様体 X の上には階数 2 の安定ベクトル束 B でも、2 次をみるものが存在する。

- 1) $\det B \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$
- 2) $\chi(B) = 6$
- 3) B の (変形の) モジュライ空間は非同変平面 4 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ と同型である。

モジュライ数が 1 なので、semi-rigid 束と呼ぶことにする。

注 上の 4 次曲線 C は線型切断定理における記述

$$X = G(3, 6, r) \cap P, \quad \dim P = 10$$

から次のようにして得られる。 Legendre Grassmann 多様体 $G(3, 6, \sigma) \subset \mathbb{P}^{13}$ の射影所対は $\check{\mathbb{P}}^{13}$ 内の 4 次超曲面である。 X を切り出す 10 次元部分空間 $P \subset \mathbb{P}^{13}$ は双対空間内の平面 $P^\perp \subset \check{\mathbb{P}}^{13}$ を定める。命題の 4 次曲線は上の 4 次超曲面とこの $P^\perp$ の交わりである。

$\{B_t\}_{t \in C}$ を命題の semi-rigid 束の完備族としよう。これに対しては普遍ベクトル束が存在する。即ち、直積 $X \times C$ 上の階数 2 のベクトル束 $\mathcal{B}$ であって、各 $t \in C$ に対して

$$\mathcal{B}|_{X \times \{t\}} \cong B_t$$

となるものが存在する。モジュライ論的記述とえるためのアイデアはこのベクトル束 $\mathcal{B}$ を核とする次の関手と考えることにある。

Fano 多様体 X 上の (連接) 層 M に対して
曲線 C 上の層

$$\pi_{C,*} (\mathcal{B} \otimes \pi_X^* M)$$

を対応させる関手

$$(\mathrm{Coh} X) \longrightarrow (\mathrm{Coh} C)$$

を $\mathcal{F}$ で表わそう。

例 $\mathcal{M}$ が点 $x \in X$ に台をもつ 1次元摩天楼層 (sky-scraper sheaf) $\mathcal{L}(x)$ のときが最も簡単である。 $\mathcal{Q}(\mathcal{L}(x))$ は 普遍ベクトル束^Bの逆ファイバー $x \times C$ への制限で、曲線 C 上の階数 2 のベクトル束である。これを $\mathcal{B}^x$ で表わす。

前節の主役であった rigid 束 A の双対の $\mathcal{F}$ による変換を考えよう。説明は略すが、全ての $x \in C$ に対し

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(A, \mathcal{B}_x) = 2$$

が成立する。さて、順像 (direct image) に関する基底変換定理 (Base change theorem) により、 $\mathcal{Q}(A^*)$ は C 上の階数 2 のベクトル束である。これを $\mathcal{F}$ で表そう。

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(A^*, \mathcal{L}(x)) = 3 (= \mathrm{rk} A)$$

と自然な線型写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(A^*, \mathcal{L}(x)) \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{F}, \mathcal{B}^x)$$

より、次の期待を抱く。

★ $\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F, B^x) \geq 3$ が全ての $x \in X$ に
 対して成立する α ではないだろうか？ さらに欲張って、
 曲線 C 上のベクトル束の後 $\{B^x\}_{x \in X}$ はこの条件
 で特徴付けられるのだろうか？

この厚々ましい期待が実現してくれる。

定理 Fano 多様体 X と曲線 C , えて, C
 上のベクトル束 $F = \mathcal{O}(A^\vee)$ は上の通りとする。
 このとき, X は C 上のベクトル束の Brill-Noether
 軌跡. 対し $\alpha \mapsto B^x$ でもって

$$\operatorname{Br}_C(2, K: 3F) := \left\{ [E] \left| \begin{array}{l} E \text{ は階数 2 で安定} \\ \det E = \det F \otimes \mathcal{O}_C(K) \\ \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_C}(F, E) \geq 3 \end{array} \right. \right\} / \text{同型}$$

と同型である。([論説97] では II 型の B-N 軌跡に呼ん
 でいる。) また, F の次数は奇数である。(E
 も同様。)

普通ベクトル束 $\mathcal{B}$ は C 上の直線束のテンソル積
 を除いて一意に定まる。 $\mathcal{B}$ の替りに $\mathcal{B} \otimes \pi_C^* \zeta$

を普遍束にとると, F は $F \otimes \xi$ に替る。しかし,

$$E \in \mathcal{U}_c(2, K : 3F) \Leftrightarrow E \otimes \xi \in \mathcal{U}_c(2, K : 3F \otimes \xi)$$

であるから, 上の定理は $\mathcal{B}$ のとり方によっていい。

また, $\mathcal{B}$ のとり方は一意解ではないが, F を射影化した $\mathbb{P}^1$ 束 $\mathbb{P}(F)$ は X より一意に定まる。さて, 定理は, 逆にこの $\mathbb{P}^1$ 束より Fano 多様体 X が復元されると主張していると考えてもよい。

奇数次元の階数 2 のベクトル束が全て F として現われる限りではない。この状況に関して定理の続きを述べるために言葉を準備しよう。 C は種数 g の (非特異代数) 曲線とし, F はその上の階数 2 のベクトル束とする。よく知られているように, 全ての部分直線束 $\xi \subset F$ に対して

$$\deg \xi < \frac{1}{2} \deg F$$

が成立するとき, ベクトル束 F は安定であると言う。

これは $\mathbb{P}^1$ 束 $\mathbb{P}(F)$ に対して述べると, 全ての切断 $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(F)$ が正の自己交点数をもつこと, $(S^2) > 0$, と同値である。

定義 種数 g の曲線上の階数 2 のベクトル束

F は 全ての 切断 $S \subset \mathbb{P}(F)$ に対して

$$(S^2) \geq 0$$

が成立するとき、永田安定であると言う。

もとの設定に戻ろう。

定理 (続) C は 種数 3 の 曲線で F は C の 上の 階数 2 の ベクトル束とする。 C と F は 同値である。

(1) Brill-Noether 軌跡 $\mathcal{BU}_C(2, K:3F)$ は 非特異 3 次元多様体である。(自明な 種数 9 の Fano となる。)

(2) C は 超楕円的 でなく (平面 4 次曲線と言ってもいい)、 F は 永田安定 である。

以上により、Fano 多様体と 線織面 (ruled surface) の 間の 双射 がえられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{種数 } 9 \text{ の 非特異} \\ \text{3次元 Fano 多様体} \end{array} \right\} / \text{同型} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{永田安定で奇数次} \\ \text{曲線上の線織面} \end{array} \right\} / \text{同型}$$

$$X \longmapsto \mathbb{P}(F), \quad F = \pi_{C,*}(\mathcal{O} \otimes \pi_X^* A^*)$$

$$\mathcal{J}U_C(2, K:3F) \longleftarrow \mathbb{P}(F)$$

さらに付け加えると, $\mathcal{J}U_C(2, K:3F)$ の中間次元 Jacobian 多様体は (主偏極 アーベル多様体として) 曲系 C の Jacobian 多様体と同型である。よって, 周期写像

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{種数 } 9 \text{ の 非特異} \\ \text{3次元 Fano 多様体} \end{array} \right\} / \text{同型} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{3次元 主偏極} \\ \text{アーベル多様体} \end{array} \right\} / \text{同型}$$

の $[\text{Jac } C]$ 上のファイバーは C 上の永田安定な $\mathbb{P}^1$ 束のモジュライ空間と同型である。安定で奇数次 $\mathbb{P}^1$ 束のモジュライはコンパクトであるが, 永田安定でないものの全体は、その中で余次元 1 の部分多様体になっている。よって, この周期写像のファイバー (6次元) はコンパクトではない。(アフィン代数多様体になっている。)

§ 4 モジュライ論的記述 (種数 10, 7, 12, 8)

種数 10 の 3 次元 Fano 多様体 X の上には 階数 2 で $\det A \cong \mathcal{O}_X(-K_X)$ なる rigid 安定ベクトル束 A が存在し, これをもって X は 10 次元 Grassmann 多様体 $X_{10} = G(5, 7)$ に埋め込まれる。さて, X の中で 等質ベクトル束に因りて完全交叉になっている 3 次元部分多様体 $\Sigma_{10} \subset \mathbb{P}^{13}$ の線型切断と同型である。また, 階数 3 の semi-rigid 束が存在し, それらのモジュライ空間 C は 種数 2 の曲線に存する。種数 9 のときと同様に, A を 普遍ベクトル束と核とする関手を変換することにより C 上の階数 3 のベクトル束がえられる。これを F で表そう。

予想 種数 10 の 3 次元 Fano 多様体は曲線 C 上の階数 3 ベクトル束に対する Brill-Noether 軌跡

$$\mathcal{SU}_C(3, K: 3F) := \left\{ [E] \mid \begin{array}{l} \text{rk } E = 3, E \text{ は安定} \\ \det E \cong \det F \otimes \mathcal{O}_C(K) \\ \dim \text{Hom}(F, E) \geq 2 \end{array} \right\} / \text{同型}$$

と同型であろう。

これは種数9の場合と違,てまだ証明できていない。

種数7の3次元 Fano 多様体 X の上には階数5, $\det A \cong \mathcal{O}_X(-2K_X)$ なる安定 rigid ベクトル束 A が存在する。そして, この A によって X は 10次元ス
ベクトル多様体 $\sum_{12} \mathbb{C} G(5, 10)$ ^{$(= X_9)$} に埋込まれ, それ
の線型切断になっている。一方, X の上には階数2の semi-rigid 安定 ベクトル束が存在し, それらの
モジュライ空間 ^{C} は種数7の曲線である。この
semi-rigid 束の完備1次元族を $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$,
直積 $X \times C$ 上の普遍ベクトル束を $\mathcal{B}$ とする。
また, 逆ファイバー $X \times C$ への制限を B^2 で表す。
全ての $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(A, B_\lambda) = 1$$

が示せる。よって,

$$\pi_{C,*}(\mathcal{B} \otimes \pi_X^* A^*)$$

は曲線 C 上の直線束である。 $\mathcal{B}$ とこの直線束

の逆でねいたものに置き換えてよい。新しい普遍ベクトル束 $\mathcal{B}$ に対しては上の性質は自明な線束となる。簡単に計算より、 $\wedge^2 \mathcal{B}^\vee$ は $\mathcal{C}$ の標準直線束と同型になることがわかる。

定理 種数 7 の非特異 3 次元 Fan 多様体は、対応

$$\alpha \longmapsto \mathcal{B}^\alpha$$

でもって階数 2 のベクトル束に対する Brill-Noether 軌跡

$$\mathcal{M}_c(2, K: 5\mathcal{O}_c) := \left\{ [E] \left| \begin{array}{l} rk E = 2, E \text{ は安定} \\ \det E \cong \mathcal{O}_c(K) \\ \dim H^0(E) \geq 5 \end{array} \right. \right\} // \text{同型}$$

と同型である。

種数 9 のときと同様、大域切断の個数の指定に現われる 5 は rigid ベクトル束 A の階数である。

種数 12 の場合は階数 3 の rigid 安定ベクトル束でもって 12 次元 Grassmann 多様体に埋め

込まれ, Fano 多様体は階数 9 の等質ベクトル
 $S^2 \wedge^3$ に因して完全交叉になっている。(この場合
 は $p=0$ なので線型切断をとる必要がある。)

X 上には semi-rigid 束が見つかるが, 代わりに
 X 上には階数 2 の rigid 束も存在し, 2 つの
 rigid 束の関わり合いから, X のモジュライ論
 的記述がえられる ([PNAS]).

種数 8 の 3 次元 Fano 多様体 X は 3 次元
 Grassmann 多様体

$$G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$$

と余次元 5 ($=p$) の線型部分空間 $P \cong \mathbb{P}^9$
 との横断的な交わりである。 $G(2,6)$ の射影
 的双対は Pfaff 多項式で定義される $\check{\mathbb{P}}^{14}$ 内
 の 3 次超曲面で, P の定める 4 次元部分空間
 $P^\perp \subset \check{\mathbb{P}}^{14}$ との交わりとして 3 次元 3 次超曲面が
 えられる。これを $Y \subset \mathbb{P}^4$ とすると, Y は
 X と双有理同値である。 $Y \subset \mathbb{P}^4$ 上の 4 次有
 理曲線の Hilbert 概型を $\mathcal{Y}$ とし,
 Abel-Jacobi 写像を

$$\underset{(8.2.2)}{Y} \longrightarrow \underset{(5.2.2)}{\text{Int-Jac } Y}$$

としよう。このとき、一般の X はこの射のファイバーと同型である。

§5 2つの記述の間の対応性

観察 ^{高種数} 8次元 Fano 多様体の第1記述に現われる Gressmann 多様体は ^(*) モジュライ論的記述に ^(*) およぶ 外部空間と同次元である。

表4

種数 g	X_g	次元	モジュライ空間 $\hat{X}_g$
7	$G(5, 10)$	$25 = 18 + 7$	$\mathcal{U}_C(2)$, C は種数 7
8	$G(2, 6)$	$8 = 3 + 5$	3次元 3次超曲面 Y 上の 4次有理曲線の Hilbert 概型 $\mathcal{H}$
9	$G(3, 6)$	$9 = 6 + 3$	$\mathcal{U}_C(2)$, C は種数 3
10	$G(5, 7)$	$10 = 8 + 2$	$\mathcal{U}_C(3)$, C は種数 2
12	$G(3, 7)$	$12 = 12 + 0$	$\mathbb{P}^3$ 内の 3次有理曲線の Hilbert 概型

ただし, $\mathcal{U}_C(r)$ は 曲線 C 上の 階数 r の 安定 パックル束のモジュライ空間である。次元は

$$r^2 g - r^2 + 1$$

に等しい。(この中に Brill-Noether 軌跡が住む。)

この観察をより精密にすることにできる。3次元
Fano 多様体 X の Gressmann 多様体 $\mathcal{G}_g$ におけ
る法線ベクトル束 $N_{X/\mathcal{G}}$ を計算しよう。 X は
 Σ_{2g+2} を p 回超平面で切断したものであるから、完全列

$$(*) \quad 0 \longrightarrow p \mathcal{O}_X(-1) \longrightarrow N_{X/\mathcal{G}} \longrightarrow N_{\Sigma/\mathcal{G}}|_X \longrightarrow 0$$

を得る。法線ベクトル束 $N_{\Sigma/\mathcal{G}}$ は表3のベク
トル束 E_g の Σ_{2g+2} への制限と同型である。
 X の制限は rigid ベクトル束 A に
外ならないから次を得る。

g	7	8	9	10	12
$N_{\Sigma/\mathcal{G}} _X$	$S^2 A$	0	$\wedge^2 A$	$\wedge^3 A$	$3 \wedge^2 A$

観察(精密化) 高次数3次元 Fano 多様体
 X のモジュライ空間 $\hat{\mathcal{G}}_g$ 内における法線ベクトル
束 $N_{X/\hat{\mathcal{G}}}$ は Gressmann 多様体 $\mathcal{G}_g$ におけるそれと
次の関係にある。
(twisted dual)

$$N_{X/\hat{X}} \cong (N_{X/\mathcal{X}})^* \otimes \mathcal{O}_X(-K_X)$$

また, $(*)$ の導く完全列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow N_{\Sigma/\mathcal{X}}^*|_X \otimes \mathcal{O}_X(-K_X) &\rightarrow N_{X/\mathcal{X}}^* \otimes \mathcal{O}_X(-K_X) \\ &\rightarrow p^* \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \end{aligned}$$

は, X が $\hat{\mathcal{X}}_g$ の Albanese 射

$$\hat{\mathcal{X}}_g \longrightarrow \text{Int-Jac } X = \begin{cases} \text{Jac } C & g=7, 9, 10 \\ \text{Int-Jac (cubic 3-fold)} & g=8 \\ \text{1点} & g=12 \end{cases}$$

のファイバーに入っていることから導かれるものと一致する。

参 考 文 献

[PNAS] Mukai, S.: Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex 3, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 86 (1989), 3000-3002.

[論説95] 岡井 茂, Fano 多様体論の新展開, 数学 47巻 (1995), 125-144.

[論説97] ———, Brill-Noether 理論の非可換化と3次元 Fano 多様体, 数学 49巻 (1997), 1-24.

[北大] ———, Moduli of abelian surfaces, and regular polyhedral groups, 「代数多様体のモジュライ, 北大, 1999年1月」報告集。

[Nag] Nagata, M.: On self-intersection number of a section on a ruled surface, Nagoya Math. J., 37(1970), 191-196.

[Sho] Shokurov, V.V.: Smoothness of the general anticanonical divisor on a Fano 3-fold, Math. USSR Izv., 14(1980), 395-405.