

The nullity of compact Kähler submanifolds in a complex projective space

阪大 理学部 木村良夫

Riemannian manifold の minimal submanifold は geodesic の多次元への拡張とみなすことができる。geodesic の index と nullity については、様々の研究がなされているが、minimal submanifold に対しても、index と nullity の概念が、Simons [6] によって導入された。さらに Kähler submanifold は minimal となり、特に compact の時、その index は、いつも 0 となる。そして、nullity は normal bundle の holomorphic section 全体のなす vector space の次元に等しいことが明らかにされた (Simons [6])。

ここでは Simons [6] の結果を使って complex projective space の compact Kähler submanifold の nullity を詳しく調べよう。

§1 では complex projective space の中の compact Kähler submanifold の Killing nullity を決定し、

その結果を使って complex projective space の中の compact Kähler submanifold の nullity の最小値を求める。

§2 では complex projective space の中の compact Hermitian symmetric space の nullity を考え、それを完全に決定する。その結果から、この場合『compact Kähler submanifold の Jacobi field は compact Kähler submanifold の 1-parameter family から引き起こされる』ことが分かる。

§1 complex projective space の compact Kähler submanifold の nullity の最小値

$\bar{M}$ を Kähler manifold とする。 M を $\bar{M}$ の compact Kähler submanifold とすると、 M は $\bar{M}$ の minimal submanifold となることが知られている。 compact Kähler submanifold M について、次のような結果が得られている (Simons [6])。

$$\begin{cases} M \text{ の index} = 0 \\ M \text{ の nullity} = \dim_{\mathbb{R}} \{ \xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp} \mid D_J \xi = J D \xi \ \forall \xi \in \mathfrak{X}(M) \} \end{cases}$$

ここで、 $\mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$, D , J の記号は、 Kobayashi and Nomizu [2] に従っている。

$M, \bar{M}$ の holomorphic tangent bundle をそれぞれ $T(M), T(\bar{M})$ とすると M の normal bundle $N(M)$ は

$$N(M) = T(\bar{M})|_M / T(M)$$

によって定義される。 $N(M)$ の holomorphic section 全体を $\Gamma(N(M))$ とおくと, vector space として

$$\{\xi \in X(M)^\perp \mid D_{JX}\xi = JD_X\xi \quad \forall X \in X(M)\} \cong \Gamma(N(M))$$

となることが分かる。ところで $N(M)$ の 0 次の cohomology group $H^0(M, SN(M))$ がちょうど $\Gamma(N(M))$ であるから, M の nullity を $n(M, \bar{M})$ または $n(M)$ と表わすと Simons の結果より

$$(1.1) \quad n(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, SN(M))$$

となる。

(1.1) を使って M の nullity を研究するわけであるが、この節では、次の定理を証明することが目的である。

定理 1 M を N 次元 complex projective space $P_N(\mathbb{C})$ の P 次元 compact Kähler submanifold とする。その時

$$n(M) \geq 2(p+1)(N-p)$$

が成り立つ。しかも等号は $M = P_p(\mathbb{C})$ (totally geodesic) の場合に限り成り立つ。

M の connected component を M_0 とすると $n(M) \geq n(M_0)$ となるから、 M を connected として定理を証明すればよい。
従って M を $P_N(\mathbb{C})$ の compact connected Kähler submanifold で、 $P_N(\mathbb{C})$ の totally geodesic submanifold $P_N(\mathbb{C})$ に full に imbed しているとする。

一般に Riemannian manifold X に対して、

$$\mathfrak{k}(X) = \{ X \text{ 上の Killing vector field } \}$$

とおく。さて、 $\mathfrak{k}^N$ を

$$\mathfrak{k}^N = \{ Z^N \in \mathfrak{X}(M)^\perp \mid Z \in \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C})) \}$$

とおき、 $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}^N$ を M の Killing nullity と呼び $n_K(M)$ で表わす。ここで $(\)^N$ は M に normal な成分への orthogonal projection を表わすものとする。 $n_K(M)$ の定義より、すぐに次のことが分かる。

$$(1.2) \quad n(M) \geq n_K(M)$$

まず $n_K(M)$ を求める問題を考えよう。

$$\text{レマ 1} \quad n_K(M) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C})) - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C}), M)$$

$$\text{ここで } \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C}), M) = \{ Z \in \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C})) \mid Z_m \in T_m(M) \ \forall m \in M \}.$$

証明. 次の exact sequence より 明らか。

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C}), M) \longrightarrow \mathfrak{k}(P_N(\mathbb{C})) \xrightarrow{(\)^N} \mathfrak{k}^N \longrightarrow 0 \quad \text{q.e.d.}$$

次に M の holomorphic isometry 全体のなす Lie group を $A(M)$ で表わす。また $P_n(\mathbb{C})$ (または $P_n(\mathbb{C})$) の holomorphic isometry で M を不変にするもの全体のなす Lie group を $A(P_n(\mathbb{C}), M)$ (または $A(P_n(\mathbb{C}), M)$) で表わす。そうすると $A(M)$ と $A(P_n(\mathbb{C}), M)$ の間に次の関係が成り立つ。

レマ 2 $A(M) \cong A(P_n(\mathbb{C}), M)$ (as Lie group)

このレマは Nakagawa and Takagi [5] の中の定理 4.3 の証明と同様の方法でできる。従ってここでは省略する。
(証明)

レマ 3 $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}(P_n(\mathbb{C}), M) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}(M) + (N-n)^2$

証明. compact Kähler manifold の Killing vector field は holomorphic である (Matsushima [4])。従って $\mathfrak{k}(P_n(\mathbb{C}), M)$ および $\mathfrak{k}(M)$ の次元はそれぞれ $A(P_n(\mathbb{C}), M)$ と $A(M)$ の次元に等しい。

$A(P_n(\mathbb{C}), M)$ の元 g に対して M が $P_n(\mathbb{C})$ に full に imbed していることから $g(P_n(\mathbb{C})) = P_n(\mathbb{C})$ となることが分かる。従って、レマ 2 より $P_n(\mathbb{C})$ の適当な homogenous coordinate をとると、次のことがいえる。

$$A(P_N(\mathbb{C}), M) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \lambda f & 0 \\ \hline 0 & h \end{array} \right) \in SU(N+1); \begin{array}{l} \{f\} \in A(P_N(\mathbb{C}), M) \\ |\lambda| = 1 \\ g \in U(N-n) \end{array} \right\} / \Gamma$$

ここで $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in GL(N+1, \mathbb{C}); \mu^{N+1} = 1 \right\}$. g.e.d.

レマ 1 と レマ 3 より 次の結果を得る。

命題 1 $n_{\mathbb{R}}(M) = \dim_{\mathbb{R}} k(P_N(\mathbb{C})) - \dim_{\mathbb{R}} k(M) - (N-n)^2$.

一方 $M = P_p(\mathbb{C})$ (totally geodesic) の場合、 $N(P_p(\mathbb{C}))$ が homogenous vector bundle となり、Bott の定理 (P10 参照) を適用して 次の結果を得る。

命題 2 $n(P_p(\mathbb{C})) = 2(p+1)(N-p)$

定理 1 の証明 P -次元 compact Kähler manifold X に 対して

$$\dim_{\mathbb{R}} k(M) \leq p^2 + 2p$$

となることが知られている (Lichnerowicz [3])。その事と 命題 1 および (1.2) より、

$$\begin{aligned}
& \kappa(M) - 2(P+1)(N-P) \\
& \geq \kappa_{\mathbb{R}}(M) - 2(P+1)(N-P) \\
& = N^2 + 2N - \dim_{\mathbb{R}} k(M) - (N-\kappa)^2 - 2(P+1)(N-P) \\
& \geq N^2 + 2N - P^2 - 2P - (N-\kappa)^2 - 2(P+1)(N-P) \\
& = (N-P)^2 - (N-\kappa)^2 \\
& \geq 0
\end{aligned}$$

等号成立の爲には、 $\kappa=P$ 即ち $M = P_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ でなければなら
ない。 g. e. d.

§2 complex projective space の中の compact
hermitian symmetric space の nullity

simply connected compact Kähler homogenous
manifold を Kähler C-space と呼ぶ。G を simply
connected complex semi-simple Lie group とする。
G の Lie sub-group U を G の maximal solvable sub-
group とし、これを parabolic sub-group と呼ぶ。この時
 $M = G/U$ は Kähler C-space となり、逆にすべての
Kähler C-space はこのようにして得られることが知られて
いる (Wang [7])。

$\mathfrak{g}$, $\bar{v}$ をそれぞれ Lie group G , U の Lie algebra とする。 $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}$ の real form $\mathfrak{h}_0$ および $\mathfrak{h}_0$ 上の linear order をうまくとり、 $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (\Delta = \{\text{root}\})$$

と root space に分解した時、次のようになるとする。

$$\bar{v} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta(\bar{v})} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

ここで $\Delta \supset \Delta(\bar{v}) \supset \Delta^+$, $\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha > 0\}$ 。

Δ の subset $\Delta(\mathfrak{g}_1)$, $\Delta(v^+)$ を

$$\begin{cases} \Delta(\mathfrak{g}_1) = \Delta(\bar{v}) \cap (-\Delta(\bar{v})) \\ \Delta(v^+) = \Delta(\bar{v}) - \Delta(\mathfrak{g}_1) \end{cases}$$

で定義し、 $\mathfrak{g}$ の Lie subalgebra $\mathfrak{g}_1$, v^+ を次のように定める。

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_1)} \mathfrak{g}_{\alpha} \\ v^+ = \sum_{\alpha \in \Delta(v^+)} \mathfrak{g}_{\alpha} \end{cases}$$

さらに $\mathfrak{g}_1$, v^+ を Lie algebra に持つ G の connected Lie subgroup をそれぞれ G_1 , N^+ とすると、 G_1 は reductive Lie subgroup, N^+ は nilpotent Lie subgroup となり、 $U = G_1 \cdot N^+$ (semi-direct) となる。

さて $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ を G の複素既約表現とする。 $P(V)$ を V の一次元 subspace から成る complex projective

space とする。 ρ によって引き起こされる G の $P(V)$ 上の自然な action を $G \times P(V) \ni (x, p) \longrightarrow x \cdot p \in P(V)$ で表わす。表現 ρ の highest weight に対応する weight space (v) は 1次元であるから (v) は $P(V)$ の元となる。

さらに、 ρ は $U = \{x \in G \mid x \cdot (v) = (v)\}$ となるものとする。 $M = G/U$ の G -equivariant な imbedding $f: M \longrightarrow P(V)$ が得られる。 ρ が既約だから f は full となる。逆に Kähler C-space の $P_n(\mathbb{C})$ への full Kähler imbedding はこのようにして得られることが知られている (Nakagawa and Takagi [5])。

以上のことから Kähler C-space を $P_n(\mathbb{C})$ へ Kähler imbed した時、 $N(M)$ は homogeneous vector bundle となる。

これからの主要な道具となる homogeneous vector bundle の cohomology に関する Bott の定理をここで必要な形にまとめよう。

$(\rho_1, W_{-\xi})$ を G_1 の $-\xi$ を lowest weight に持つ 既約表現とする。 ρ_1 を N^+ に制限すると trivial となるように拡張した U の表現を同じく $(\rho_1, W_{-\xi})$ で表わす。 $E_{W_{-\xi}}$ を $(\rho_1, W_{-\xi})$ によって principal bundle $G \longrightarrow M$ に associate された homogeneous vector bundle とすると次のことが言える。

定理 (Bott [1]) $-\xi$ を lowest weight に持つ G の
既約表現 $(\rho, V_{-\xi})$ があれば、

$$\dim H^0(M, SE_{W_{-\xi}}) = \dim V_{-\xi}$$

$$H^j(M, SE_{W_{-\xi}}) = (0) \quad (j \geq 1)$$

が成り立つ。

Bott の定理を使って、次の定理を導くことができる。

定理 2 M を $P_n(\mathbb{C})$ に Kähler imbed された Kähler
 $\mathbb{C}$ -space とする。さらに M は $P_n(\mathbb{C})$ の totally geodesic
submanifold $P_n(\mathbb{C})$ に full に imbed しているとする。
その時

$$\kappa(M; P_n(\mathbb{C})) = \kappa(M; P_n(\mathbb{C})) + 2(n+1)(N-n)。$$

証明 略。

この定理から $P_n(\mathbb{C})$ の中の Kähler $\mathbb{C}$ -space の nullity
は imbed が full の場合に考えればよい。この節では、特
に $P_n(\mathbb{C})$ の中の compact Hermitian symmetric space の
nullity を与える次の定理を証明するのが目的である。

定理 3 M を $P_n(\mathbb{C})$ に full に imbed された compact Hermitian symmetric space とする。その時

$$N(M) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(P_n(\mathbb{C})) - \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(M)$$

となる。ここで $P_n(\mathbb{C})$ (または M) 上の holomorphic vector field 全体を $\mathcal{O}(P_n(\mathbb{C}))$ (または $\mathcal{O}(M)$) で表わす。

まず、holomorphic vector bundle の exact sequence

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(P_n(\mathbb{C}))|_M \longrightarrow N(M) \longrightarrow 0$$

より次の cohomology group の exact sequence が導かれる。

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(M, ST(M)) &\longrightarrow H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))|_M)) \longrightarrow H^0(M, SN(M)) \\ &\longrightarrow H^1(M, ST(M)) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

ところで Kähler C-space X について、Bott [1] より

$$H^j(X, ST(X)) = (0) \quad j \geq 1$$

となるから、特に $H^1(M, ST(M)) = (0)$ となり

$$N(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))|_M)) - \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, ST(M))$$

となる。従って、もし

$$(2.1) \quad \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))|_M)) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}(P_n(\mathbb{C}))$$

が成り立てば、定理 3 は証明される。

さて (ν) は U -invariant だから、 $\rho|_{\nu}$ は (ν) 上の表現 $(\rho, (\nu))$ を induce する。 $(\rho, (\nu))$ の contragredient 表現を $(\rho^*, (\nu^*))$ で表わすと、 U -module $V \otimes (\nu^*)$ の

中で $(v) \otimes (v^*)$ は, U -invariant subspace となり, $\rho|_U \otimes \bar{\rho}^*$ から $V \otimes (v^*) / (v) \otimes (v^*)$ 上の quotient 表現 $\bar{\rho}$ が導入される。その時, 次のことが容易に分かる。

$$(2.2) \quad T(P_n(\mathbb{C}))|_M = G \times_U (V \otimes (v^*) / (v) \otimes (v^*))$$

ここで右辺は, principal bundle $G \rightarrow M$ に U の表現 $\bar{\rho}$ によって associate された homogeneous vector bundle を表わす。

(ρ, V) の contragredient 表現を (ρ^*, V^*) で表わす。 $\rho \otimes \rho^*$ によって G -module となる $V \otimes V^*$ と $\rho|_{G_1} \otimes \bar{\rho}^*|_{G_1}$ によって G_1 -module となる $V \otimes (v^*)$ の間に次のような関係が成り立つ。

命題 3 $V \otimes V^*$ および $V \otimes (v^*)$ を次のように直和に分解する

$$V \otimes V^* = V_{-\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{-\lambda_l} \quad (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l)$$

$$V \otimes (v^*) = W_{-\mu_1} \oplus \cdots \oplus W_{-\mu_m} \quad (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_m)$$

ここで $V_{-\lambda_i}$ (または $W_{-\mu_j}$) は lowest weight $-\lambda_i$ (または $-\mu_j$) を持つ既約 G -module (または既約 G_1 -module) である。その時 $l = m$ および $\lambda_i = \mu_i$ ($i=1, \dots, l$) となる。

証明には, semi-simple Lie algebra の表現に関する

知識が必要であり、たやすいものではない。ここでは、命題3の事実が成り立つこと、及びそれから(2.1)が導かれるが重要であるから、証明は省略する。なお、symmetricでない Kähler C-space で命題3の成り立たない例がある。

(2.1) の証明

$$U_i = W_{-\lambda_i} + \cdots + W_{-\lambda_\ell} \quad (i=1, \dots, \ell)$$

とおくと

$$V \otimes (v^*) = U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_\ell \supset U_{\ell+1} = (0)$$

となる。 $V \otimes (v^*)$ は U -module だから N^+ が act しているが、

$N^+ \cdot U_i$ は lowest weight が $-\lambda_i$ より大きい G_1 -invariant subspace となるから、 $N^+ \cdot U_i \subset U_{i+1}$ ($i=1, \dots, \ell$) となる。

従って $\tilde{W}_i = U_i / U_{i+1}$ 上に導入された U の表現を g_i

とおくと、 $g_i|_{N^+}$ は trivial で $g_i|_{G_1}$ は $-\lambda_i$ を lowest weight

に持つ既約表現となる。よって、 $G \longrightarrow M$ に表現 g_i を

associate した homogeneous vector bundle $E_{\tilde{W}_i}$ に

Bott の定理を適用すれば、

$$(2.3) \quad \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, SE_{\tilde{W}_i}) = \dim_{\mathbb{R}} V_{-\lambda_i}$$

$$(2.4) \quad H^j(M, SE_{\tilde{W}_i}) = (0) \quad j \geq 1$$

が成り立つ。

U -module の exact sequence

$$0 \longrightarrow U_{i+1} \longrightarrow U_i \longrightarrow \widetilde{W}_i \longrightarrow 0$$

より, holomorphic vector bundle の exact sequence

$$0 \longrightarrow E_{U_{i+1}} \longrightarrow E_{U_i} \longrightarrow E_{\widetilde{W}_i} \longrightarrow 0$$

が引き起こされる。ここで E_{U_j} は $G \longrightarrow M$ に $\rho \otimes \hbar^* \nu$ より導入された U の U_j 上の表現によって associate された homogenous vector bundle である。この exact sequence より cohomology group の exact sequence が引き起こされるが、(2.3)、(2.4) より容易に、

$$(2.5) \quad \dim_{\mathbb{R}} H^0(M, SE_{U_i}) = \sum_{i=1}^l \dim_{\mathbb{R}} V_{-\lambda_i}$$

$$(2.6) \quad H^j(M, SE_{U_i}) = (0) \quad (j \geq 1)$$

が導かれる。

さて $(\nu) \otimes (\nu^*)$ は G_1 の lowest weight が 0 の irreducible component だから、 $\lambda_l = 0$ で $W_{-\lambda_l} = (\nu) \otimes (\nu^*)$ となる。従って U -module の exact sequence

$$0 \longrightarrow W_{-\lambda_l} \longrightarrow U_l \longrightarrow U_l / W_{-\lambda_l} \longrightarrow 0$$

から次の exact sequence が得られる。

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(M, SE_{W_{-\lambda_l}}) &\longrightarrow H^0(M, SE_{U_l}) \longrightarrow H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))/M)) \\ &\longrightarrow H^1(M, SE_{W_{-\lambda_l}}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

(2.4) より

$$\dim H^0(M, S(T(P_n(\mathbb{C}))/M)) = \sum_{i=1}^{l-1} \dim V_{-\lambda_i}$$

とこ3で、 $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_Z(P_n(\mathbb{C})) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_Z(n+1, \mathbb{C}) = 2(\dim_{\mathbb{C}} V \otimes V^* - 1)$ 。

$\dim_{\mathbb{C}} V_{-\lambda_k} = 1$ だから (2.1) が成り立つ。

以上で定理3が証明された。

定理3の系として次のことが言える。

系1 M を $P_n(\mathbb{C})$ に full に imbed された compact Hermitian symmetric space とする。その時

$$\mathcal{N}(M) = 2 \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(M)$$

系2 M を $P_n(\mathbb{C})$ に Kähler imbed された compact Hermitian symmetric space とすると。

$$\mathcal{N}(M) = \dim_{\mathbb{R}} \{Z^N \in \mathcal{X}(M)^{\perp} \mid Z \in \mathcal{O}_Z(P_n(\mathbb{C}))\}$$

系3 系2と同じ仮定のもとで、次のことが言える。

M の Jacobi field は Kähler submanifold のパラメータファミリーから引き起こされる。

References

- [1] R. Bott : Homogeneous vector bundles, *Annals of Math.*, 66 (1957), 203—264.
- [2] S. Kobayashi and K. Nomizu : *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2, Interscience, New York, 1969.
- [3] A. Lichnerowicz : *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.
- [4] Y. Matsushima, Sur la structure du groupe d'une certaine variété kählérienne, *Nagoya Math. J.* 11 (1957), 145—150.
- [5] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kähler submanifolds in a complex projective space, to appear.
- [6] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Annals of Math.*, 88 (1968), 62—105.
- [7] H. C. Wang, Closed manifolds with homogeneous complex structure, *Amer. J. M.*, 76 (1954), 1—32.