

On Cartan matrices determined by the dimensions of simple modules

東京医科歯科大学教養部 清田正夫

Tokyo Medical and Dental University, College of Liberal Arts and Sciences
Masao KIYOTA

1 序文

G を有限群、 F を標数 $p > 0$ の代数閉体とする。群環 FG は直既約な両側イデアル B_i 達の直和に分解され、各 B_i は FG のブロックと呼ばれている。 B を FG のブロックとする。 $S_1, \dots, S_l$ ($l = l(B)$) を B に属す単純 FG 加群とし、 P_i を S_i の射影被覆とする。整数 $c_{ij} = \dim_F \text{Hom}_{FG}(P_i, P_j)$ をカルタン不変数と呼び、 $l \times l$ 行列 $C = (c_{ij})$ をブロック B のカルタン行列という。単純加群 S_i の次元を f_i とおき、 $\mathbf{f} = {}^t(f_1, \dots, f_l)$ とおく。

ここで、 C と $\mathbf{f}$ の実例を述べる。

(例 1) $G = S_3$: 3 次対称群、 $p = 3$ 、 $B = B_0$: 主ブロックの時

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(例 2) $G = A_5$: 5 次交代群、 $p = 3$ 、 $B = B_0$: 主ブロックの時

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(例 3) $G = (3, 3) \cdot Q_8$: 位数 72 の Frobenius 群、 $p = 3$ 、 $B = B_0$: 主ブロックの時

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

次の問題を考える。

(問題) カルタン行列 C と次元ベクトル $\mathbf{f}$ の間にどんな関係があるのか?
特に、 $\mathbf{f}$ から C が決まるか?

(例1) と (例2) から、 C が同じでも $\mathbf{f}$ が異なる場合があることが分かる。

2 定理

以下、序文の記号をそのまま用いる。すなわち、 B を有限群 G の p ブロックとし、 C を B のカルタン行列、 $\mathbf{f}$ を単純 B -加群の次元ベクトルとする。また、 D を B の不足群とし、 $|D| = p^d$ とおく。さらに、 $|G|_p = p^a$ とおく。これらの記号のもとで、次の定理と命題が成り立つ。すなわち、 p -可解群や D が正規部分群の場合には、ある条件のもとで、カルタン行列 C が次元ベクトル $\mathbf{f}$ から記述されることが分かる。

定理 G を p -可解群とする。カルタン行列 C の成分の最大公約数 (= 最小の単因子) を p^γ とおく。このとき、次は同値である。

$$(1) \ p^{a-d} \parallel f_i \ (i = 1, \dots, l) \text{ かつ } \det C = p^{d+(l-1)\gamma}.$$

$$(2) \ C = p^\gamma I + \frac{p^d - p^\gamma}{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} F,$$

ここで、 I は単位行列、 $F = (f_i f_j) = \mathbf{f} \cdot {}^t \mathbf{f}$ で、 $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ は内積を表す。

命題 D が G の正規部分群であるとする。このとき、次は同値である。

$$(1)' \ \det C = p^{d+(l-1)\gamma}.$$

$$(2) \ C = p^\gamma I + \frac{p^d - p^\gamma}{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} F,$$

ここで、 I は単位行列、 $F = (f_i f_j) = \mathbf{f} \cdot {}^t \mathbf{f}$ で、 $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ は内積を表す。

注意1 $\det C = |D|$ ならば、 $\gamma = 0$ となり $\det C = p^{d+(l-1)\gamma}$ が成立する。

注意2 $\gamma = 0$ のとき、(2) は $C = I + \frac{p^d - 1}{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} F$ となる。(例1) と (例3) の $C, \mathbf{f}$ はこの関係式を満たしている。

3 証明

証明は清田、村井、和田の共著論文 [K-M-W] の結果と線形代数の補題を用いる。

定理 1 [K-M-W] G を p -可解群とする。このとき、次は同値である。

(1) C の固有値全体と単因子全体は一致する。

(2) $\rho(C) = |D|$, ここで $\rho(C)$ は C の最大固有値を表す。

(3) $p^{a-d} || f_i \ (i = 1, \dots, l)$

命題 2 [K-M-W] D が G の正規部分群であるならば、 C の固有値全体と単因子全体は一致する。

補題 3 A を n 次実対称行列とする。 $\text{rank}(A) = 1$ ならば、 $A = \mathbf{a} \cdot {}^t\mathbf{a}$, または $A = -\mathbf{a} \cdot {}^t\mathbf{a}$ と書ける、ここで $\mathbf{a}$ は適当な零でない n 次元たてベクトル。

定理 1 と補題 3 から定理が、命題 2 と補題 3 から命題がそれぞれ容易に導ける。

参考文献

- [K] 清田正夫、On Cartan matrices with two parameters、数理解析研究所講究録 1926、有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究 (2014.12)
- [K-M-W] M. Kiyota, M. Murai and T. Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, J. of Algebra 249,110-119 (2002)