

Compact Lie 群のテンソル積表現について

津田塾大学 三島川寿一

G を連結半単純 Lie 群としその Center が有限とする。又 G は compact Cartan 部分群をもつものとする。

K を G の極大部分群, $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ を各々 G, K の Lie 代数とし、以下の記号を用いる。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$; $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解,

B ; G の compact Cartan 部分群で K に含まれるもの,

$\mathfrak{b}$; B の Lie 代数,

$\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{p}_c, \mathfrak{b}_c$; 各々 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}, \mathfrak{b}$ の複素化,

Ad ; K の $\mathfrak{p}_c$ 上の adjoint 表現,

τ ; $\mathfrak{g}_c$ の compact 実型 $\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$ に関する
conjugation,

Σ ; $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{b}_c)$ に関する root 系,

Σ_n, Σ_k ; 各々 Σ の非 compact root, compact root
全体。

$\mathfrak{g}_c$ の root 分解を $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{h}_c + \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_c : \text{ad}(X)H = \alpha(H), \forall H \in \mathfrak{h}_c\}$ とし $\mathfrak{g}_c$ の Weyl 基底 $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ ($\alpha \in \Sigma$) を次の条件を満たす様にとる;

$X_\alpha - X_{-\alpha}$, $\sqrt{-1}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$, $\text{trace ad}(X_\alpha)\text{ad}(X_{-\alpha}) = 1$.
表現 $(\text{Ad}, \mathfrak{p}_c)$ は $\mathfrak{p}_c$ 上の Hermite 形式 $(\cdot, \cdot)$ を次の様に定めることにより K の unitary 表現となる;

$$(X, Y) = -\text{trace ad}(X)\text{ad}(\bar{\tau}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{p}_c.$$

π を K の有限次元 unitary 表現とし V をその表現空間とする。
 Ad 及び π のテンソル積表現 $\text{Ad} \otimes \pi$ を次の様に定義する。

$$(\text{Ad} \otimes \pi)(k)(X \otimes v) = \text{Ad}(k)X \otimes \pi(k)v, \quad X \in \mathfrak{p}_c, v \in V, k \in K.$$

この稿の目的はテンソル積表現 $\text{Ad} \otimes \pi$ の Clebsch-Gordan 係数達のうち特別なものを計算することにある。

(π_μ, V_μ) を K の既約 unitary 表現でその最高 weight が μ であるとする (但し root 系 Σ_K に一つの順序が導入されているものとする)。この時 $\text{Ad} \otimes \pi_\mu$ の既約成分の分解は次の様に与えられる;

$$\text{Ad} \otimes \pi_\mu = \sum_{\omega \in \Sigma_n} m(\mu + \omega) \pi_{\mu + \omega} \quad (\pi_{\mu + \omega} \text{ は } \mu + \omega \text{ を最高 weight とする } K \text{ の既約表現}),$$

$$\mathfrak{p}_c \otimes V_\mu = \sum_{\omega \in \Sigma_n} m(\mu + \omega) V_{\mu + \omega}, \quad m(\mu + \omega) = 0 \text{ 又は } 1.$$

以下 $m(\mu+\omega)=1$ とする非 compact root ω を fix して考える。
 $\mathfrak{p}_\mathbb{C} \otimes V_\mu$ の元 $X \otimes v$ の $V_{\mu+\omega}$ への projection を $(X \otimes v)_\omega$ とし、 $|X \otimes v|_\omega$ を vector $(X \otimes v)_\omega$ の norm とする。

「定理」 (π_μ, V_μ) を最高 weight μ を持つ K の既約 unitary 表現とし $v(\mu)$ を π_μ の weight μ に対する weight vector で $|v(\mu)|=1$ とする。この時 $|X_\omega \otimes v(\mu)|_\omega^2$ は次の公式で与えられる。

$$|X_\omega \otimes v(\mu)|_\omega^2 = \prod_{\alpha \in \Delta_-(\omega)} \frac{(\lambda+\omega, \alpha)}{(\lambda, \alpha)} \prod_{\alpha \in \Delta_0(\omega)} \frac{2(\lambda, \alpha) - |\alpha|^2}{2(\lambda, \alpha) + |\alpha|^2} \times$$

$$\prod_{\alpha \in \Delta_{-1}(\omega)} \frac{2((\lambda, \alpha) - |\alpha|^2)}{2(\lambda, \alpha) + |\alpha|^2} \prod_{\alpha \in \Delta_1(\omega)} \frac{2(\lambda, \alpha) - |\alpha|^2}{2((\lambda, \alpha) + |\alpha|^2)},$$

但し、 $\lambda = \mu + \rho_K$, $\rho_K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma_K} \alpha$, $(\cdot, \cdot)$ は $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{g}$ の dual space 上の内積で Killing form $\text{trace ad}(X)\text{ad}(Y)$ ($X, Y \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$) で与えられたもの、

$$\Delta_-(\omega) = \{ \alpha \in \Sigma_K; \alpha > 0, (\omega, \alpha) < 0 \},$$

$$\Delta_0(\omega) = \{ \alpha \in \Sigma_K; \alpha > 0, (\omega, \alpha) = 0, \omega + \alpha \in \Sigma \},$$

$$\Delta_1(\omega) = \{ \alpha \in \Sigma_K; \alpha > 0, 2(\omega, \alpha)|\alpha|^{-2} = 1, \omega + \alpha \in \Sigma \},$$

$$\Delta_{-1}(\omega) = \{ \alpha \in \Sigma_K; \alpha > 0, 2(\omega, \alpha)|\alpha|^{-2} = -1, \omega - \alpha \in \Sigma \}.$$

定理の証明は主として次に述べる 2つの補題を用いて与えられる。 $\mathfrak{g}$ の双対空間を $\mathfrak{g}^*$ とし、 $\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]$ を実係数をもつ $\mathfrak{g}^*$ 上の多項式全体 (即ち $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell \in \mathfrak{g}^*$ の基底, $\eta \in \mathfrak{g}^*$ の一般点とし $\eta = \sum_{i=1}^{\ell} \eta_i \beta_i$ と表わす。この時

$\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*] = \mathbb{R}[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\ell]$, $\mathbb{R}(\mathfrak{g}^*)$ を $\mathbb{R}[\mathfrak{g}^*]$ の商体とする。

ω を非compact root とし $\mathbb{R}(\mathfrak{g}^*)$ の元 $f(\eta; \omega)$ を以下の様に

定義する。 $\Sigma_{\mathcal{R}}$ の二つの root α, β ($\alpha + \beta \neq 0$) に対し $\langle \alpha, \beta \rangle$ を

次の様に定める; $\text{ad}(X_\alpha)X_\beta = \langle \alpha, \beta \rangle X_{\alpha+\beta}$ ($\alpha + \beta \in \Sigma_{\mathcal{R}}$),

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 0 \quad (\alpha + \beta \notin \Sigma_{\mathcal{R}}).$$

$\Pi_P = \overset{P \text{ 個}}{P_{\mathcal{R}} \times P_{\mathcal{R}} \times \dots \times P_{\mathcal{R}}}$, $P_{\mathcal{R}} = \{\alpha \in \Sigma_{\mathcal{R}}; \alpha > 0\}$ とし $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$

を Π_P の元とする。 $R_\eta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, $a_\omega(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ を各々

$$R_\eta(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = (|\eta + \alpha_1 + \dots + \alpha_p|^2 - |\eta|^2)^{-1},$$

$$a_\omega(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \prod_{i=1}^p 2|\langle \alpha_i, \omega + \alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} \rangle|^2 \quad \text{として定義し}$$

$$(*) \quad f(\eta; \omega) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \Pi_P} (-1)^p a_\omega(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \prod_{i=1}^p R_\eta(\alpha_i, \dots, \alpha_i)$$

と置く。

補題 1. $|X_\omega \otimes \nu(\rho)|_\omega^2$ は $f(\eta; \omega)$ を用いて $\mathfrak{g}^*$ 上の有理函数に拡張される; $|X_\omega \otimes \nu(\rho)|_\omega^2 = f(\lambda + \omega; \omega)$, $\lambda = \mu + \rho_{\mathcal{R}}$ 。

証明の概略: $\Omega_{\mathcal{R}}$ を $\mathcal{R}$ の Casimir 作用素とする。 Ω は次の様

に表わされる。 $H_1, H_2, \dots, H_Q$ を $\mathfrak{g}^*$ 上の自然な内積 $(,)$ ($\mathfrak{g}$ の Killing form $\text{trace ad}(X)\text{ad}(Y)$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ から誘導されたもの) に関する正規直交基底とし H_{ρ_k} を $(H, H_{\rho_k}) = \rho_k(H)$ が任意の $H \in \mathfrak{g}^*$ について成り立つ様を選ぶ。この時

$$\Omega_k = \sum_{i=1}^Q H_i^2 + 2H_{\rho_k} + \sum_{\alpha \in P_k} 2X_{-\alpha}X_{\alpha}.$$

γ を非 compact root とする。 Ω_k は $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$ の展開環の中心に属するから $\Omega_k(X_{\gamma} \otimes v(\mu))_{\omega} = (|\lambda + \omega|^2 - |\rho_k|^2)(X_{\gamma} \otimes v(\mu))_{\omega}$ 。
一方 $\Omega_k(X_{\gamma} \otimes v(\mu))_{\omega} = (|\mu + \gamma|^2 + 2(\mu + \gamma, \rho_k))(X_{\gamma} \otimes v(\mu))_{\omega}$
+ $\sum_{\alpha \in P_k} 2\langle \alpha, \gamma \rangle \pi_{\mu+\omega}(X_{-\alpha})(X_{\gamma+\alpha} \otimes v(\mu))_{\omega}$ (上の Ω_k の表示式を用いる)。従って次の式を得る。

$$|X_{\gamma} \otimes v(\mu)|_{\omega}^2 = (|\lambda + \omega|^2 - |\lambda + \gamma|^2)^{-1} \sum_{\alpha \in P_k} 2\langle \alpha, \gamma \rangle^2 |X_{\gamma+\alpha} \otimes v(\mu)|_{\omega}^2.$$

上式をくりかえし用いることにより

$$(**) |X_{\gamma} \otimes v(\mu)|_{\omega}^2 = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \Pi(\gamma; \omega)} a_{\omega}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \prod_{i=1}^p R_{\lambda + \gamma + \alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1}}(\gamma)$$

$$\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p |X_{\omega} \otimes v(\mu)|_{\omega}^2,$$

$$\Pi(\gamma; \omega) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \overset{\infty}{\cup} \Pi_{\mathfrak{g}} \mid \text{ad}(X_{\alpha_p}) \dots \text{ad}(X_{\alpha_1}) X_{\gamma} \in \mathfrak{g}_{\omega-\text{f.o.}}\}$$

$$\text{を得る。 } \gamma = \gamma'' \quad |X_{\omega} \otimes v(\mu)|_{\omega}^2 = 1 - \sum_{\gamma \in \Sigma_n} |X_{\gamma} \otimes v(\mu)|_{\omega}^2$$

$$= 1 - \sum_{\substack{\gamma < \omega \\ \gamma \in \Sigma_n}} |X_{\gamma} \otimes v(\mu)|_{\omega}^2 \quad \text{となることに注目し root } \omega \text{ の順序}$$

に関する帰納法を用いれば補題 1 を得る。

補題 2. $f(\eta; \omega)$ は次の函数等式を満す。

$$(1) \prod_{\alpha \in P_K} (\eta, \alpha) f(\eta + \omega; \omega) = \prod_{\alpha \in P_K} (\eta + \omega, \alpha) f(\eta; -\omega),$$

$$(2) \prod_{\alpha \in P_K} (\eta + \omega, \alpha) (\eta, \alpha)^{-1} = f(\eta + \omega; \omega) f(-\eta - \omega; -\omega).$$

証明.

$\deg \pi_\mu = \prod_{\alpha \in P_K} (\lambda, \alpha) (\rho_K, \alpha)^{-1}$ ($\lambda = \mu + \rho_K$) 及び X_γ ($\gamma \in \Sigma_w$) に対し $(\text{Ad}(k)X_\gamma, X_\gamma) = (\text{Ad}(k)X_{-\gamma}, X_{-\gamma})$ が成り立つことに留意すれば, [1] の Main Theorem, 3) から次の式が導びかれる。

$$(1)' \prod_{\alpha \in P_K} (\lambda, \alpha) |X_\omega \otimes v(\mu)|_\omega^2 = \prod_{\alpha \in P_K} (\lambda + \omega, \alpha) |X_{-\omega} \otimes v(\mu)|_{-\omega}^2,$$

$$(2)' \sum_{\gamma \in P_K} |X_\gamma \otimes v(\mu)|_\omega^2 = \prod_{\alpha \in P_K} (\lambda + \omega, \alpha) (\lambda, \alpha)^{-1}. \quad (1)' \text{ 及び}$$

補題 1 から直ちに (1) を得る。又補題 1 の証明中の公式 (**) から $\sum_{\gamma \in P_K} |X_\gamma \otimes v(\mu)|_\omega^2 = f(\lambda + \omega; \omega) f(-\lambda - \omega; -\omega)$ 。従って (2) が示される。

(定理の証明の概略).

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \Pi_p$ に対し $\xi = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p$ と置くと

$$R_\eta(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = (|\eta + \xi|^2 - |\eta|^2)^{-1} = (2(\eta, \xi) + |\xi|^2)^{-1}.$$

$\tilde{\Delta}(\omega)$ を次の様に定めた $\mathcal{C}^*$ の部分集合とする。

$$\tilde{\Delta}(\omega) = \{ \xi \in \mathcal{C}^*; \exists \rho, \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \Pi_p \text{ s.t. } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = \xi, \}$$

$$\alpha \omega (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \neq 0 \}.$$

$$\text{そこで } \xi \in \Delta(\omega) \text{ に対し } P_\xi(\eta) = 2(\eta, \xi) + |\xi|^2,$$

$$P(\eta; \omega) = \prod_{\xi \in \Delta(\omega)} P_\xi(\eta) \text{ と置く。明らかに } P(\eta; \omega) \in \mathbb{R}[\eta],$$

又(*)から $p(\eta; \omega)f(\eta; \omega)$ は多項式となる。

$$g(\eta; \omega) = p(\eta; \omega)f(\eta; \omega) \text{ と置くと補題1の公式(1)から}$$

$$(***) \prod_{\alpha \in P_R} (\eta, \alpha) g(\eta + \omega; \omega) p(\eta; -\omega) = \prod_{\alpha \in P_R} (\eta + \omega, \alpha) g(\eta; -\omega) p(\eta + \omega; \omega)$$

$$\text{を得る。root に関する性質から } p_\xi \mid \prod_{\alpha \in P_R} (\eta, \alpha) p(\eta; -\omega)$$

となることは P_R の root の定数倍に限ることから示される。そこで

(***)の両辺の割り算を行ない補題2の(2)及び $f(\eta; \omega)$ の

0次, -1次の項の係数を調べることにより上記の定理を得る。

引用文献

- [1] N. TATSUUMA; Formal degree and Clebsch-Gordan coefficient, JOURNAL OF MATH. KYOTO UNIV., VOL. 18, NO. 1, 1978.