

有限要素法による定常粘性流体の解析

中央大 理工・土木 川原睦人

1. 緒 言

有限要素法によって Navier-Stokes 方程式を解析する方法について述べる。すでに、^{1,2,3} の研究がこの問題の可能性について論じているが、ここでは、定常流れに限定して、境界における条件の取扱い、非線形連立代数方程式の取扱いなどを中心として検討する。

2. 基礎方程式

直角座標 $(x^i, i=1,2,3)$ による空間表示を用いることにする。非圧縮性粘性流体の層流流れの、平衡方程式は、

$$\rho u_j u_{i,j} = \tau_{ij,j} + \rho f_i \quad \text{----- (2.1)}$$

である。添字表現を用い、総和規約に従うとする。 u_i は流速、 f_i は物体力、 ρ は密度である。 τ_{ij} は応力で、

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{----- (2.2)}$$

と表わされる。ここに P は圧力、 μ は粘性係数である。

連続方程式は、

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{-----} \quad (2.3)$$

と与えられる。境界条件としては、次の条件を考えることにする。境界 S_1 では、流速が規定されるとする。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on} \quad S_1 \quad \text{-----} \quad (2.4)$$

ここに $\hat{u}_i$ は境界で与えられた量であることを示す。境界 S_2 では、流速の勾配 Q_i が、

$$Q_i = u_{i,j} n_j = \hat{Q}_i \quad \text{on} \quad S_2 \quad \text{-----} \quad (2.5)$$

となるとする。ここに、 n_j は境界にたてた外向法線ベクトルの成分である。この条件は、流体の流れが、平行にながっていると考えられるべき境界などに相当している。圧力が既知の境界を S_3 とする。

$$P = \hat{P} \quad \text{on} \quad S_3 \quad \text{-----} \quad (2.6)$$

流量 R が定められる境界 S_4 では、

$$R = u_i n_i = \hat{R} \quad \text{on} \quad S_4 \quad \text{-----} \quad (2.7)$$

となる。応力 τ_{ij} の合力が既知である境界 S_5 では、

$$S_i = \tau_{ij} n_j = \hat{S}_i \quad \text{on} \quad S_5 \quad \text{-----} \quad (2.8)$$

が成立するものとする。

以上の基礎方程式に対して、有限要素法の定式化を考えるために、ガレルキン法によって、変分方程式を誘導する。

境界 S_1 では 0 ぞ, 他では任意の値を取る重み関数 u_i^* を考え, 式 (2.1) の両辺にかけて, 任意の領域 V について積分し, 多少変形して整理すると, 結局, 次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V \rho(u_i^* u_j u_{i,j}) dV - \int_V (u_{i,i}^* P) dV + \int_V \mu(u_{i,j} u_{i,j}^*) dV \\ + \int_V \mu(u_{i,j}^* u_{j,i}) dV = \int_{S_5} (u_i^* \hat{S}_i) + \int_V (u_i^* \rho \hat{f}_i) dV \dots\dots (2.9) \end{aligned}$$

一方, 連続方程式 (2.3) の両辺に, 境界 S_3 では 0 ぞ, 他は, 任意の値を取る重み関数 P^* をかけて, 領域 V について積分すると,

$$\int_V (P^* u_{i,i}) dV = 0 \quad \text{-----} (2.10)$$

を得る。式 (2.9), (2.10) は, 強制境界条件として S_1 の条件を, 自然境界条件として S_5 の条件を満足している。

式 (2.9) と (2.10) を変形すると, それぞれ,

$$\begin{aligned} \int_V \rho(u_i^* u_j u_{i,j}) dV + \int_V (u_{i,i}^* P) dV + \int_V \mu(u_{i,j}^* u_{i,j}) dV \\ = \int_{S_2} \mu(u_i^* \hat{Q}_i) dS + \int_V \rho(u_i^* \hat{f}_i) dV \quad \text{-----} (2.11) \end{aligned}$$

$$\int_V (P^* u_{i,i}) dV = \int_{S_4} (P^* \hat{R}) dS \quad \text{-----} (2.12)$$

なる方程式が得られる。式 (2.11), (2.12) は、強制境界条件として S_1, S_3 の条件を、自然境界条件として、 S_2, S_4 の条件をそれぞれ満足している。

3. 有限要素法

解析する流れの場を、かたなり合わない部分領域に分割し、分割された一つの領域を有限要素と呼ぶ。有限要素の境界上に選ばれた節点における流速 u_{ai} と圧力 p_a を用いて、有限要素内部の流速 u_i と圧力 p を、

$$u_i = \Phi_a u_{ai} \quad \text{----- (3.1)}$$

$$p = \bar{\Phi}_a p_a \quad \text{----- (3.2)}$$

のごとく補間する。補間に用いられる関数 Φ_a と $\bar{\Phi}_a$ は、形状関数と呼ばれている。重み関数にも、同様の関数を仮定し、(2.9), (2.10) の変分方程式に代入し、整理すると、次の関係を得ることが出来る。

$$K_{\alpha\beta\delta j} u_{\beta j} u_{\delta i} + H_{\alpha i \beta} p_{\beta} + M_{\alpha i \beta j} u_{\beta j} = \hat{\Omega}_{\alpha i} \quad \text{---- (3.3)}$$

$$H_{\alpha i \beta} u_{\alpha i} = \hat{p}_{\alpha} \quad \text{----- (3.4)}$$

ここに、

$$K_{\alpha\beta\delta j} = \int_V \rho (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{\delta, j}) dV, \quad H_{\alpha i \beta} = - \int_V (\Phi_{\alpha, i} \bar{\Phi}_{\beta}) dV$$

$$M_{\alpha i \beta j} = \int_V \mu \{ (\Phi_{\alpha, k} \Phi_{\beta, k}) \delta_{ij} + (\Phi_{\alpha, i} \Phi_{\beta, j}) \} dV$$

$$\hat{\Omega}_{\alpha i} = \int_V p(\hat{f}_i \bar{\Psi}_{\alpha}) dV + \int_{S_5} (\bar{\Psi}_{\alpha} \hat{S}_i) dS, \quad \hat{P}_{\alpha} = 0$$

である。また、同様にして、変分方程式 (2.11), (2.12) より式 (3.3), (3.4) と同じ方程式が得られる。このとき、係数は $K_{\alpha\beta}\delta_j$ を除いて、以下のように変更される。

$$H_{\alpha i\beta} = \int_V (\bar{\Psi}_{\alpha} \bar{\Psi}_{\beta,i}) dV, \quad M_{\alpha i\beta j} = \int_V \mu (\bar{\Psi}_{\alpha,k} \bar{\Psi}_{\beta,k}) \delta_{ij} dV$$

$$\hat{\Omega}_{\alpha i} = \int_V (p \hat{f}_i \bar{\Psi}_{\alpha}) dV + \int_{S_2} (\bar{\Psi}_{\alpha} \hat{Q}_i) dS, \quad \hat{P}_{\alpha} = \int_{S_4} (\bar{\Psi}_{\alpha} \hat{R}) dS$$

式 (3.3), (3.4) を、流れの場全体について立て、これを組み合わせると、全節点の流速と圧力に関する方程式が、次のように得られる。

$$F_{\alpha} = K_{\alpha\beta\gamma} U_{\beta} U_{\gamma} + H_{\alpha\lambda} P_{\lambda} + M_{\alpha\beta} U_{\beta} - \hat{\Omega}_{\alpha} = 0 \quad \text{----- (3.5)}$$

$$G_{\lambda} = H_{\alpha\lambda} U_{\alpha} - \hat{P}_{\lambda} = 0 \quad \text{----- (3.6)}$$

ここに U_{α} は、流れの場全節点の流速を表わし、 P_{λ} は、全節点の圧力である。式 (3.5), (3.6) を連立して解き、 U_{α} と P_{λ} を求めれば、流れの場における流速と圧力の近似値を定めることができる。なお、形状関数には、流速について、二次の多項式を、圧力については一次の多項式を用いて計算している。

4. 非線形連立代数方程式の解法

非線形連立代数方程式 (3.5) と (3.6) を解くことにより、求める近似値が得られる。構造解析においては、一般にくり返し代入法、ニュートン・ラフソン法、摂動法などが良く用いられている。くり返し代入法による場合には、式 (3.5) と (3.6) を、まず、次のように変形する。

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\beta} & H_{\alpha\lambda} \\ H_{\beta\mu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\beta} \\ p_{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_{\alpha} \\ \hat{p}_{\mu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{----- (4.1)}$$

$$\text{ここに, } \Sigma_{\alpha} = K_{\alpha\beta\gamma\delta} v_{\beta} v_{\gamma} \quad \text{----- (4.2)}$$

である。式 (4.1) の右辺第2項 Σ_{α} を0と仮定して、式 (4.1) を解けば、フリーフローの流速と圧力が、計算される。この解を用いて、順次くり返し計算を行えば、非線形方程式を解くことができる。式 (4.1) にみるごとく、係数行列が対称であるために、大変数の連立方程式を解く際には都合が良いが、この計算では、粘性が小さく、流速が大きい流れの計算では、収束が著しく悪くなる。著者の数値実験では、図-1に示す最も簡単な平行流の計算で、レイノルズ数約150程度まで計算されている。

ニュートン・ラフソン法によって、式 (3.5), (3.6) を解く場合には、方向微係数を求める必要がある。すなわち、

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\beta} = K_{\alpha\beta\delta} v_\delta + K_{\alpha\delta\beta} v_\delta + M_{\alpha\beta} \quad \text{----- (4.3)}$$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\lambda} = H_{\alpha\lambda}, \quad \frac{\partial G_\mu}{\partial v_\beta} = H_{\beta\mu} \quad \text{----- (4.4), (4.5)}$$

とある。いまここで、

$$\Phi_\alpha = \begin{bmatrix} F_\alpha \\ G_\mu \end{bmatrix}, \quad I_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\beta} & \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\lambda} \\ \frac{\partial G_\mu}{\partial v_\beta} & 0 \end{bmatrix}, \quad x_\beta = \begin{bmatrix} v_\beta \\ p_\lambda \end{bmatrix}$$

とめくと、

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(0) + I_{\alpha\beta}(0) \cdot (x_\beta - x_\beta(0)) \approx 0 \quad \text{----- (4.6)}$$

なる関係が得られる。ここに、 $x_\beta(0)$ は適当に選ばれた基準となる流速と圧力であり、 $I_{\alpha\beta}(0)$ 、 $\Phi_\alpha(0)$ は、 $x_\beta(0)$ より計算された $I_{\alpha\beta}$ 、 Φ_α の値である。式 (4.6) より、

$$x_\beta = x_\beta(0) - I_{\alpha\beta}^{-1}(0) \cdot \Phi_\alpha(0) \quad \text{----- (4.7)}$$

なる関係が得られ、これを用いて、くり返えし計算を進めれば、求める解が得られる。式 (4.6) の $I_{\alpha\beta}$ にみるごとく、連立方程式の係数は、非対称になり、それだけ、大変数の連立方程式を解く上で、不利になるが、収束が早く、また、安定も良い。ニュートン・ラプソン法で解く場合には、基準

となる初期値が，十分に正解に近くないと，計算が収束しないことがある。初期値として，フリーフローの解を用いるのは適当でなく，求めんとするレイノルズ数の流れを何段階かに分割して，順次，ニュートン・ラフソン法によって，収束させて，最終的に解を得る方法を取るのが良い。すなわち，ニュートン・ラフソン法と摂動法を組み合わせた方法によって計算するのが，最も安定した解法である。

5. 数値計算例

図-1に，両側を壁に囲まれた平行流の計算例を上げる。壁面では，流速0の境界条件を用いている。レイノルズ数は50である。図-2には，壁間隔が異なる場合の計算例を示す。入口でもレイノルズ数は340である。

6. 参考文献

1. J.T. Oden and Somogi: "Finite Element Applications in Fluid Dynamics". proc. ASCE, Vol 95, EM3, p821~6, 1968
2. J.T. Oden: "The Finite Element Method in Fluid Mechanics" NATO Advanced Study Institute, Lisbon, 1971
3. A.J. Bakers: "Finite Element Solution Algorithm for Viscous Incompressible Fluid Dynamics". Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 6, 1973

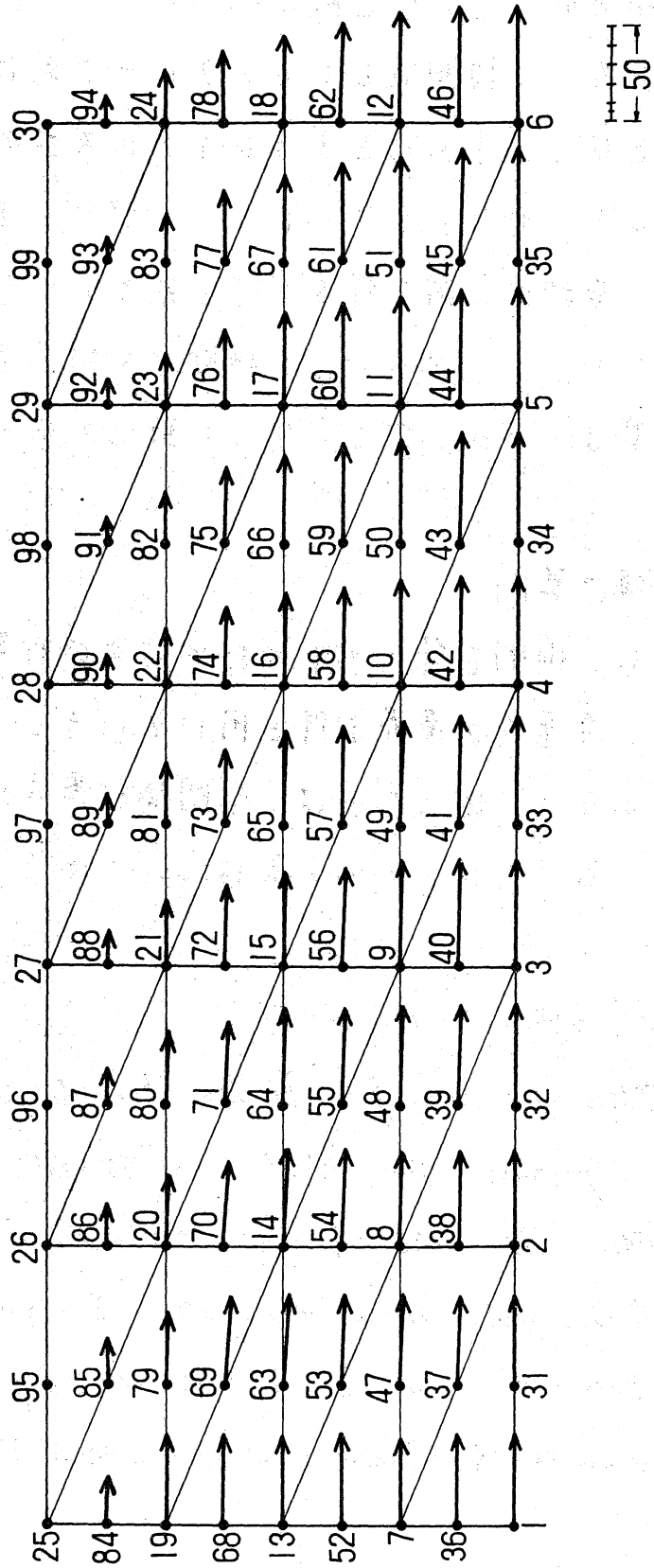


Fig. 1

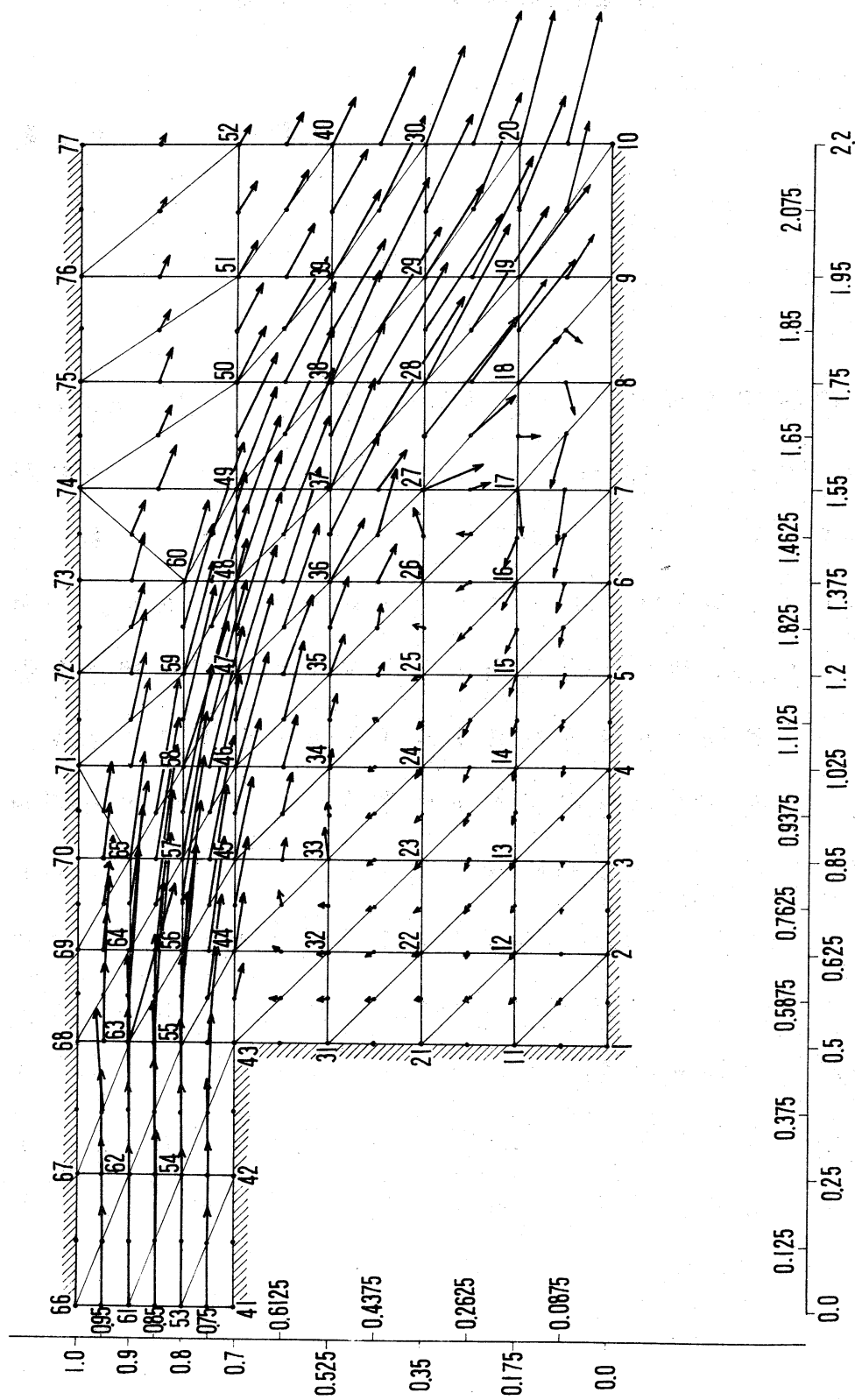


Fig. 2