

# 領域上の max-flow, min-cut problems

大阪市大理 野沢亮平 (Ryôhei Nozawa)

## § 1. Introduction

Network 上でよく知られている max-flow problem (=MFP) と min-cut problem (=MCP) をユークリッド空間の領域で考えようという試みが文献 [1], [2] でなされている. とくに [2] においては MFP と MCP の数学的に厳密な定式化 (の一例) と, 両者の値が一致することを示すための方法が述べられている. ここでは主に [1] で扱われている問題を少々一般化して, [2] における方法に基いて max-flow min-cut theorem を与えるとともに, optimal cut の存在と関連して MCP の relaxation について述べる.

以後  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の有界領域とし, その境界  $\partial\Omega$  は Lipschitz 連続とする. さらに  $H(\Omega)$ ,  $BV(\Omega)$  を次のように定義する:

$$H(\Omega) = \{ \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n); \sigma_j \in L^\infty(\Omega) \text{ for all } j \text{ and } \operatorname{div} \sigma \in L^n(\Omega) \},$$

$$BV(\Omega) = \{ u \in L^1(\Omega); \partial u / \partial x_j \text{ is a Radon measure of bounded}$$

variation for each  $j$ ).

このとき  $BV(\Omega) \subset L^{n/(n-1)}(\Omega)$  であり,  $BV(\Omega)$  から  $L^1(\partial\Omega)$  の上への trace operator  $\tau$  が存在する ([4]などを参照).  
ただし  $L^1(\partial\Omega)$  は  $n-1$ 次元 Hausdorff 測度  $H_{n-1}$  に関する  $\partial\Omega$  上の可積分関数のなす空間である.

さらに [3]によれば  $u \in BV(\Omega)$ ,  $\sigma \in H(\Omega)$  のとき

$$(\sigma \nabla u)(a) = \int_{\Omega} (-a \operatorname{div} \sigma - u \sigma \cdot \nabla a) dx$$

( $a \in C_0^\infty(\Omega)$ ) によって定義される distribution  $(\sigma \nabla u)$  は有界変動 Radon 測度であり, その total mass を  $(\sigma \nabla u)(\Omega)$  とかくことにすると次のような Green の公式が成立する:

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \sigma dx + (\sigma \nabla u)(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \nu r dH_{n-1}.$$

ここで  $\nu$  は  $\partial\Omega$  上の外向き unit normal vector,  $\sigma \cdot \nu$  は弱い意味で定義される  $\partial\Omega$  上の  $\sigma$  の normal component である.  
また reduced boundary の概念も有用である:  $u \in BV(\Omega)$  にたいして

$$N_r = \{x \in \Omega; u(x) > r\}$$

とおくと, その特性関数はほとんどすべての  $r$  にたいして  $BV(\Omega)$  に属し,

$N_r$  の reduced boundary を  $\partial^* N_r$  とかけば

$$ru(x) = \sup_{r \in R} \{r \in R; x \in \partial^* N\}$$

が  $H_{n-1}$ -a.e.  $x \in \partial\Omega$  にたいしてなりたつ. (文献[4].)

これらの事実を用いて MFP を少し一般の形で定義してみよう.

$T = \{0, 1, \dots, t_0\}$  とおき,

$\Omega' \subset \Omega$ ,  $A' \subset \partial\Omega$  を Borel 集合,

$K \subset (L^\infty(\Omega; R^n) \times L^\infty(\partial\Omega))^T$  を原点を含む凸集合,

$P \subset (L^n(\Omega) \times L^\infty(\partial\Omega))^T$  を原点を頂点にもつ凸錐とする.

このとき最適問題  $(MF(0))$  およびその双対問題  $(MF^*(0))$

を次のように定義する.

$$(MF(0)) \text{ Maximize } \sum_{t \in T} \left\{ \int_{\Omega'} -\operatorname{div} \sigma_t dx + \int_{A'} (\sigma_t \cdot \nu - q_t) dH_{n-1} \right\}$$

subject to  $(\sigma_t, q_t)_{t \in T} \in K$  such that

$$(-\operatorname{div} \sigma_t, \sigma_t \cdot \nu - q_t)_{t \in T} \in P.$$

$$(MF^*(0)) \text{ Minimize } \Psi_K((u_t)_{t \in T}),$$

subject to  $(u_t)_{t \in T} \in BV(\Omega)^T$  such that

$$\sum_{t \in T} \left\{ \int_{\Omega} p_{1,t} u_t dx + \int_{\partial\Omega} p_{2,t} r u_t dH_{n-1} \right\}$$

$$\geq \sum_{t \in T} \left\{ \int_{\Omega'} p_{1,t} dx + \int_{A'} p_{2,t} dH_{n-1} \right\}$$

for all  $(p_{1,t}, p_{2,t})_{t \in T} \in P$ .

$$\text{但し } \Psi_K((u_t)_{t \in T}) = \sup \left\{ \sum_{t \in T} ((\sigma_t \nabla u_t)(\Omega) - \int_{\partial\Omega} q_t r u_t dH_{n-1}) \right\};$$

$$(\sigma_t, q_t)_{t \in T} \in K, \sigma_t \in H(\Omega) \text{ for all } t \in T.$$

(MF(0)) において我われは  $(\sigma_t)_{t \in T}$  が (multi-stage) flow を表していると考え、適当な  $(q_t)_{t \in T} \in L^\infty(\partial\Omega)$  が存在して  $(\sigma_t, q_t)_{t \in T}$  が feasible element になるとき  $(\sigma_t)_{t \in T}$  を (MF(0)) の feasible flow という。

双対定理を述べるために  $W^{1,1}(\Omega)^T \times (L^n(\Omega) \times L^\infty(\partial\Omega))^T$  上の双線形汎関数  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を次のように定義し、 $(L^n(\Omega) \times L^\infty(\partial\Omega))^T$  上ではそれによる弱位相を考えることにする：

$$\langle u, p \rangle = \sum_{t \in T} \left\{ \int_{\Omega} p_{1,t} u_t dx + \int_{\partial\Omega} p_{2,t} r u_t dH_{n-1} \right\}$$

$$(u = (u_t)_{t \in T}, p = (p_{1,t}, p_{2,t})_{t \in T}).$$

また、 $(L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \times L^\infty(\partial\Omega))^T$  上では通常の weak\*-位相を考える。min-max の定理を用いて次の命題が証明される。

命題 1.  $K$  を compact,  $P$  を closed とする。さらに  $W$  を  $(MF^*(0))$  の feasible elements 全体とし

$$(1.1) \quad \inf \{ \langle u, p \rangle; u \in W \cap W^{1,1}(\Omega)^T \}$$

$$= \sum_{t \in T} \left\{ \int_{\Omega} p_{1,t} dx + \int_{A'} p_{2,t} dH_{n-1} \right\}$$

$$\text{for all } (p_{1,t}, p_{2,t})_{t \in T} \in P$$

と仮定する。このとき  $(MF(0))$  と  $(MF^*(0))$  の値は一致し、その値が有限のとき  $(MF(0))$  は最適解をもつ。

次に  $BV(\Omega)^T$  上の関数  $\Pi$  と  $BV(\Omega)^T$  の部分集合  $Z_0$  を定義する:

$$\Pi(u) = \inf \{ \langle u, p \rangle ; \sum_{t \in T} \left\{ \int_{\Omega'} p_{1,t} dx + \int_{A'} p_{2,t} dH_{n-1} \right\} \geq 1, \\ p = (p_{1,t}, p_{2,t})_{t \in T} \in P \}, \\ Z_0 = \{ (u_t)_{t \in T} \in BV(\Omega)^T ; u_t \text{ is a characteristic function} \\ \text{for each } t \text{ or } -u_t \text{ is a characteristic function} \\ \text{for each } t \}.$$

これらの  $\Pi$  と  $Z_0$  を用いて min-cut problem (MC(0)) は次のようにのべられる.

$$(MC(0)) \text{ Minimize } \Psi_K(u) / \Pi(u), \\ \text{subject to } u \in Z_0 \text{ such that } \Pi(u) > 0.$$

命題 2. 次のふたつの条件を仮定する:

$$(1.2) \quad \sum_{t \in T} \left\{ \int_{\Omega'} p_{1,t} dx + \int_{A'} p_{2,t} dH_{n-1} \right\} \geq 0$$

$$\text{for all } p = (p_{1,t}, p_{2,t})_{t \in T} \in P,$$

$$(1.3) \quad \text{任意の } u \in BV(\Omega)^T \text{ にたいして } \{u^r\}_{r \in R} \subset Z_0$$

が存在して,

$$\Psi_K(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_K(u^r) dr \quad \text{かつ} \quad \Pi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(u^r) dr.$$

このとき,  $(MF^*(0))$  と  $(MC(0))$  の値は一致する.

$Z_0$ の元を (multi-stage) cut とみなし,  $(MC(0))$  の feasible element を  $(MC(0))$  の feasible cut と呼ぶ.

## § 2. A generalized Iri's problem

この節では, [1]において考察された MFP の一般化と, それに対応する MCP の relaxation を試みる.  $\Omega, T$  を前節のとうりとする.

$A, B$  を互いに交わらない  $\partial\Omega$  の Borel 部分集合,

$\alpha_t, \alpha'_t$  を  $L^\infty(\partial\Omega)$  に属す非負関数 ( $t \in T$ ) とする.

さらに各  $t$  にたいして次の性質を満足する  $\Omega$  上で定義された集合値写像  $\Gamma_t$  を考える:

$\Gamma_t(x)$  は  $R^n$  の原点を含む有界閉凸集合 ( $\forall x \in \Omega$ ).

$\Gamma_t$  は次のいみで連続; 任意の  $\varepsilon > 0$  と  $\Omega$  の任意の compact

部分集合  $\Omega_0$  にたいしてある正数  $r$  が存在して  $|x-y| < r$

かつ  $x, y \in \Omega_0$  ならば  $\Gamma_t(x) \subset \Gamma_t(y) + B(0, \varepsilon)$  が成り立つ.

$\Gamma_t$  は有界;  $\bigcup_{x \in \Omega} \Gamma_t(x)$  が有界集合.

ここで

$$B_t(v, x) = \sup_{w \in \Gamma_t(x)} v \cdot w \quad (x \in \Omega, v \in R^n)$$

とおくと,  $B_t$  は  $R^n \times \Omega$  上の連続関数であり,  $u \in BV(\Omega)$  に

たいして,

$$\psi_t(u) = \int_{\Omega} B_t(\nabla u / |\nabla u|, \cdot) d|\nabla u|$$

が定義される ( $|\nabla u|$  は  $u$  の gradient  $\nabla u$  の全変動測度,

$\nabla u/|\nabla u|$  は  $\nabla u$  の  $|\nabla u|$  に関する Radon-Nikodym derivative である).

また  $a \in L^1(\Omega)$  にたいして

$$\zeta_t(a) = \int_{\partial\Omega} (\alpha_t^+ a^+ + \alpha_t^- a^-) dH_{n-1}$$

( $a^+ = \max(a, 0)$ ,  $a^- = -\min(a, 0)$ ) とおく.

これらを用いて (MF(I)) および (MC(I)) を定義しよう.  $A$ ,  $B$  をあらかじめ与えられた disjoint な  $\partial\Omega$  の Borel 部分集合とする.

$$(MF(I)) \quad \text{Maximize} \quad \sum_{t \in T} \int_A \sigma_t \cdot \nu dH_{n-1},$$

subject to  $(\sigma_t)_{t \in T} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)^T$  such that

$$\operatorname{div} \sigma_t = 0 \quad \text{a.e. on } \Omega, \quad \sigma_t(x) \in \Gamma_t(x) \quad \text{for a.e. } x \in \Omega,$$

$$\sigma_t \cdot \nu \geq 0 \quad H_{n-1}\text{-a.e. on } A,$$

$$-\alpha_t \leq \sum_{s=0}^t \sigma_s \cdot \nu \leq \alpha_t' \quad H_{n-1}\text{-a.e. on } \partial\Omega - (A \cup B)$$

for each  $t \in T$ .

$$(MC(I)) \quad \text{Minimize} \quad \sum_{t \in T} (\psi_t(x_{S_t}^t) + \zeta_t(rx_{S_t}^t - rx_{S_t}^{t+1})),$$

subject to  $(S_t)_{t \in T}$  such that  $x_{S_t}^t \in BV(\Omega)$ ,

$$rx_{S_t}^t = 1 \quad H_{n-1}\text{-a.e. on } A,$$

$$rx_{S_t}^t = 0 \quad H_{n-1}\text{-a.e. on } B$$

for each  $t \in T$ .

ただし  $S_{t_0+1}$  は  $x_{S_{t_0+1}} \in BV(\Omega)$  かつ  $\partial\Omega$  上  $r x_{S_{t_0+1}} = x_A$  であるような  $\Omega$  の任意の部分集合とする.

(MF(I)) において,  $A, B, \partial\Omega - (A \cup B)$  はそれぞれ sink,

source, storage をあらわし,  $\Gamma_t, \alpha_t, \alpha'_t$  は  $\Omega$ ,

$\partial\Omega - (A \cup B)$  の容量をしめすものである.  $t_0 = 0$  かつ

$\partial\Omega - (A \cup B)$  上  $\alpha_0 = \alpha'_0 = 0$  のとき, (MF(I)) は [1] で考察

されている問題のより厳密な定式化といえる.

Coarea formula の次のような拡張

$$\varphi_t(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(x_{N_r}) dt \quad (u \in BV(\Omega), \forall t)$$

などを用いると § 1 の命題 1, 2 から次の定理をうる.

定理 1. (MF(I)), (MC(I)) の値は有限で, それらは一致する.

また (MF(I)) は最適解 i.e. an optimal flow をもつ.

この定理において,  $\Gamma$  に対する条件 (連続性, 有界性) は本質的である. また (MC(I)) の最適解 i.e. optimal cut が一般には存在しないことは次の簡単な例によってもわかる.

例 1.  $t_0 = 0$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A = \{0\} \times (0, 1)$ ,  $B = (0, 1) \times \{0\}$ ,  $\alpha_0, \alpha'_0 = 0$ ,  $\Gamma_0(x) = \{w \in \mathbb{R}^2; |w| \leq 1\}$  (for all  $x \in \Omega$ ) とすると (MF(I)), (MC(I)) の値は 1 である. この (MC(I)) は最適解をもたない.



そこでわれわれは (MC(I)) の最適解の存在を論ずるかわりに, (MC(I)) に十分近い問題 (RMC(I)) を構成し, その最適解の存在を論ずることにする.

以下では  $\Gamma_t$  は  $\Omega$  の閉包で定義され, かつそこで連続であるとする: 任意の  $\varepsilon > 0$  にたいして  $r > 0$  が存在して  $|x-y| < r$ ,  $x, y \in \Omega \cup \partial\Omega$  ならば  $\Gamma_t(x) \subset \Gamma_t(y) + B(0, \varepsilon)$ .

このとき  $\beta_t$  は  $R^n \times (\Omega \cup \partial\Omega)$  で定義された連続関数である.

$\mu \in L^1(\partial\Omega)$  にたいして

$$\tilde{\psi}_t(a) = \int_{\partial\Omega} (\beta_t(-\nu, \cdot) \mu^+ + \beta_t(\nu, \cdot) \mu^-) dH_{n-1}$$

とおく.

$$\begin{aligned} \text{(RMC(I))} \quad \text{Minimize} \quad & \sum_{t \in T} \{ \psi_t(x_{S_t}) + \zeta_t(x_{S'_t} - x_{S'_{t+1}}) \\ & + \tilde{\psi}_t(r x_{S_t} - x_{S'_t}) \}, \end{aligned}$$

subject to  $(S_t, S'_t)_{t \in T}$  such that

$S_t \subset \Omega$ ,  $S'_t \subset \partial\Omega$  are Borel sets,

$x_{S_t} \in BV(\Omega)$ ,

$$H_{n-1}^t(A - S'_t) = H_{n-1}^t(S'_t \cap B) = 0$$

for each  $t \in T$ .

命題 3. (MC(I)) の値と (RMC(I)) の値は一致する.

命題 4. 正数  $r$  が存在して  $\bigcap_{x \in \Omega} \Gamma_t(x) \supset B(0, r)$  ( $\forall t$ ) が

成り立つとすると (RMC(I)) は最適解をもつ.

## 文 献

- [1] M.Iri: Survey of Math. Prog. edited by A.Prekopa,  
North-Holland, 1979.
- [2] G.Strang: Math.Prog.26 (1983), 123-143.
- [3] R.Kohn and R.Temam: Appl.Math.Optim.10 (1983),  
1-35.
- [4] W.Mazja: Sobolev spaces, Springer-Verlag, 1985.