

楕円型作用素の固有値分布

阪大 理 田 辺 広 城

丸 尾 健 二

§ 1 序

Ω を n 次元空間の有界領域、その境界 $\partial\Omega$ は限定円錐条件 [1] を満足するとする。 $2m > n$ とし $B[u, v]$ を $H_m(\Omega)$ で定義された双一次型式とする：

$$B[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u \cdot \overline{D^{\beta} v} dx.$$

$B[u, v]$ の主部は対称とする、即ち $|\alpha| = |\beta| = m$ のとき $a_{\alpha\beta}(x) = \overline{a_{\beta\alpha}(x)}$ 。

V を $H_m(\Omega)$ を含む $H_m(\Omega)$ の閉部分空間とする。正数 δ が存在して、すべての $u \in V$ に対して

$$\operatorname{Re} B[u, u] \geq \delta \|u\|_m^2 \quad (1)$$

が成立するとする。 A を $B[u, v]$ により通常のように定義される作用素とする、即ち $u \in V$, $f \in L^2(\Omega)$, すべての $v \in V$ に対して

$$B[u, v] = (f, v) \text{ が成立するとき } u \in D(A), Au = f.$$

こうして定義される作用素 A の固有値の分布を調べることを目的とする。

上記の様な作用素 A に対しては、係数や $\partial\Omega$ が十分滑らかで

も一般には $D(A) \subset H_{2m}(\Omega)$ は成立しないことは次の様にしてわかる。

$m=n=2$,

$$B[u, v] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dx dy,$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

$$V = \left\{ u \in H_2(\Omega) ; \Gamma_1 \text{ で } u=0, \Gamma_2 \text{ で } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \right\}$$

とする。この場合は最小最大の原理により、 $V = \dot{H}_m(\Omega)$,

$V = H_m(\Omega)$ の場合の固有値分布から望みの結果を導くことがで

きるのであるが、 $y > 0$ で定義された関数 $u = I_m(x+iy)^{3/2}$ を考える

と、これは $y > 0$ で $\Delta^2 u = 0$; $x > 0, y=0$ で $u = \partial^2 u / \partial y^2 = 0$; $x < 0, y=0$

で $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$ を満足するが原点の近くで H_3 に属さない。

このことから Ω を適当に選んで $D(A) \not\subset H_4(\Omega)$ である例が作られる。

この例は境界の場所によって境界条件が異なる場合、境界

付近では必ずしも境界値問題の解の滑らかさが成立しないこ

とを示した M. Schechter の反例をセントにしたものである：

$u = I_m(x+iy)^{1/2}$ とすると $y > 0$ で $\Delta u = 0$; $x > 0, y=0$ で $u=0$; $x < 0,$

$y=0$ で $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; 原点の付近では $u \notin H_2$ 。次に仮定 $2m > n$ に固し

て、多くの場合この仮定が満たされないときは、 $2mk > n$ とな

る自然数 k をとって A^k を考える。 $D(A^k) \subset H_{2mk}$ が満たれる

ならば A^k の固有値の分布から A の固有値の分布を導く。た

だし上の Schechter の反例の場合（このときも固有値分布は最

小最大の原理により、Dirichlet, Neuman 条件の場合の結果が

ら導けるが)には $D(A^*) \subset H_{2m}$ は成立しない。

ここでは S. Agmon に従って Sobolev の不等式により resolvent 核を評価する方法と Tauber 定理を用いる。そのために V^* を V の双共役空間として A を V から V^* への作用素に拡張する、即ち A をすべての $u, v \in V$ に対し $B[u, v] = (Au, v)$ により定義する。

ここで右辺の括弧は V^* の元 Au の v における値である。通常のように代数的位相的に $V \subset L^2(\Omega) \subset V^*$ と考える。 λ を A の resolvent set の元とすると $(A - \lambda)^{-1}$ は V^* から V への有界作用素である。この様な作用素に対して次の補題が成立する。

補題 1.1 S を V^* から V への有界作用素とすると S は $\Omega \times \Omega$ で連続有界な核 $M(x, y)$ を持ち:

$$Sf(x) = \int_{\Omega} M(x, y) f(y) dy, \quad \forall f \in L^2(\Omega) \quad (1-1)$$

$$|M(x, y)| \leq C \|S\|_{V^* \rightarrow V}^{\frac{n^2}{4m^2}} \|S\|_{V^* \rightarrow L^2}^{\frac{n}{2m} - \frac{n^2}{4m^2}} \|S\|_{L^2 \rightarrow V}^{\frac{n}{2m} - \frac{n^2}{4m^2}} \|S\|_{L^2 \rightarrow L^2}^{(1 - \frac{n}{2m})^2}.$$

証明. S に核がある事は Hilbert-Schmidt 作用素の一般論から知られていることである。 $M(x, y)$ を y の関数と考えて Sobolev の不等式を適用すれば、

$$|M(x, y)| \leq \gamma \|M(x, \cdot)\|_{\frac{n}{2m}}^{\frac{n}{2m}} \|M(x, \cdot)\|_0^{1 - \frac{n}{2m}}. \quad (1-2)$$

Sf に同じ不等式を適用して

$$\begin{aligned} |Sf(x)| &\leq \gamma \|Sf\|_{\frac{n}{2m}}^{\frac{n}{2m}} \|Sf\|_0^{1 - \frac{n}{2m}} \\ &\leq \gamma \|S\|_{V^* \rightarrow V}^{\frac{n}{2m}} \|S\|_{V^* \rightarrow L^2}^{1 - \frac{n}{2m}} \|f\|_{V^*}. \end{aligned}$$

これと (1-1) とから $M(x, \cdot) \in V$ 及び

$$\|M(x, \cdot)\|_m = \|M(x, \cdot)\|_V \leq \gamma \|S\|_{V^* \rightarrow V}^{\frac{n}{2m}} \|S\|_{V^* \rightarrow L^2}^{1-\frac{n}{2m}} \quad (1-3)$$

を得る。同様にして

$$\|M(x, \cdot)\|_0 \leq \gamma \|S\|_{L^2 \rightarrow V}^{\frac{n}{2m}} \|S\|_{L^2 \rightarrow L^2}^{1-\frac{n}{2m}} \quad (1-4)$$

となる。(1-2), (1-3), (1-4)を合わせて結果の不等式を得る。

この補題は $m > n$ のとき $R(T) \subset H_m(\Omega)$, $R(T^*) \subset H_m(\Omega)$ を満足する $L^2(\Omega)$ での有界作用素 T の核を各点毎に評価する Agmon の不等式 [3] の代りに用いるものである。本論に入る前に $B[u, v]$ が対称でない場合の A の一般化された固有関数の完全性を記しておく。

$$\operatorname{Re} B[u, v] = \frac{1}{2} (B[u, v] + \overline{B[v, u]})$$

とおき それにより定義される作用素を H とする: $\operatorname{Re} B[u, v] = (Hu, v)$. A, H を共に $L^2(\Omega)$ での作用素と考える。 $D(H^{\frac{1}{2}}) = V \subset H_m(\Omega)$ であるから Agmon [2], 定理 A2.1 により $H^{-\frac{1}{2}} \in C_{\frac{n}{2m}+\epsilon}$. H の固有値を $\{\mu_j\}$ とすると $H^{-\frac{1}{2m}}$ の固有値は $\{\mu_j^{-\frac{1}{2m}}\}$ であるから $H^{-\frac{1}{2m}} \in C_{n+\epsilon}$. T. Kato [7] により $0 < \theta < \frac{1}{2}$ のとき $D(A^\theta) = D(H^\theta)$, 故に $H^{\frac{1}{2m}} A^{-\frac{1}{2m}}$ は有界, 従って N. Danford - J. T. Schwartz [6], XI, 9, 7, 補題 9 (1093 頁) により

$$A^{-\frac{1}{2m}} = H^{-\frac{1}{2m}} H^{\frac{1}{2m}} A^{-\frac{1}{2m}} \in C_{n+\epsilon},$$

故に同補題により $A^\epsilon \in C_{\frac{n}{2m}+\epsilon}$, $\epsilon > 0$ は任意, $2m > n$ であるから $\frac{n}{2m} + \epsilon < 1$ となる様に ϵ をとると [6] の XI. 9. 28, 定理 29 の系

(1115-1116頁)により望みの結果が得られる。この証明には A の主部の対称性は不要, 又原点を頂点とし頂角が $2\pi/n$ より小さい角領域の有限和の外で A の *resolvent* が存在し, $|\lambda| \rightarrow \infty$ のとき $\|(A-\lambda)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1})$ を満たすならば同じ証明が当てはまる。

§2. *Resolvent* 核の評価

これから A の *resolvent* 核の λ に関する漸近状態を調べるため種々の接触作用素を考へ、その *resolvent* 核との比較を考へる。 $d(\lambda)$ を複素数 λ と正の実軸までの距離を示す。

補題 2.1 十分大きな定数 C に対して $d(\lambda) \geq C|\lambda|^{-1/2}m$ かつ $|\lambda| \geq C$ を満たす λ は作用素 A の *resolvent set* に含まれていてその λ に対して、次の様な不等式が成立する。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{イ)} \|(A-\lambda)^{-1}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq K_1/d(\lambda), & \text{ハ)} \|(A-\lambda)^{-1}\|_{V^* \rightarrow L^2} \\ \text{ニ)} \|(A-\lambda)^{-1}\|_{V^* \rightarrow V} \leq K_1|\lambda|/d(\lambda), & \text{ヘ)} \|(A-\lambda)^{-1}\|_{L^2 \rightarrow V} \end{array} \right\} \leq K_1|\lambda|^{1/2}/d(\lambda).$$

ここで K_1 は λ に無関係な定数である。

証明 $B[u, v] = B_0[u, v] + B_1[u, v]$ とおく。ここで $B_0[u, v]$ は主部とする。いま $\forall u \in D(A)$ とし $(A-\lambda)u = f$ としよう。すると $B[u, u] - \lambda(u, u) = (f, u)$ を満たす事と, $\Im_m B_0[u, u] = 0$, かつ $|B_1[u, u]| \leq K \|u\|_m \|u\|_{m-1}$ を使用する事によつて

$$|\Im_m \lambda| \|u\|_0^2 \leq \|f\|_0 \|u\|_0 + K \|u\|_m \|u\|_{m-1}. \quad (2-1)$$

次に Young の不等式、補題定理と仮定 a-u) を使用する事より

$$\|u\|_m \|u\|_{m-1} \leq K_2 \{ |\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \|u\|_0^2 + |\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \|u\|_0 \|f\|_0 \} \quad (2-2)$$

ここで十分大の C をとり, $|g_m \lambda| \geq C |\lambda|^{-\frac{1}{2m}}$ であれば (2-1), (2-2) を使用する事によって

$$|g_m \lambda| \|u\|_0^2 \leq K_3 \|u\|_0 \|f\|_0. \quad (2-3)$$

又 $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ であれば

$$|\operatorname{Re} \lambda| \|u\|_0^2 \leq \|f\|_0 \|u\|_0 \quad (2-4)$$

(2-3) と (2-4) によって

$$\|u\|_0 \leq K_4 / d(\lambda) \|f\|_0.$$

一方 A^* についても同様の不等式がなりたつ事がわかり, resolvent set の関係と 1) は証明された事になる。次に 2) は

$$d(\lambda) \|u\|_0^2 \leq K_5 \{ \|f\|_{V^*} \|u\|_m + \|u\|_m \|u\|_{m-1} \}$$

$$|\lambda| \|u\|_{V^*} \leq \|f\|_{V^*} + K_6 \|u\|_m.$$

上記の二式と Young の不等式 補間定理とを使用して

$$|\lambda| \|u\|_0^2 \leq K_6 \frac{|\lambda|}{d(\lambda)} \{ (1 + |\lambda|^{-\frac{1}{2m}}) \|u\|_m \|f\|_{V^*} + |\lambda|^{-\frac{1}{2m}} \|u\|_m^2 \}.$$

ここで仮定 a-1) と上記の式を使用して, 十分大なる C に対して $d(\lambda) \geq C |\lambda|^{-\frac{1}{2m}}$ となる λ をとれば,

$$\|u\|_m \leq K_7 |\lambda| / d(\lambda) \|f\|_{V^*}.$$

以下 A^* についても同様の事がいえ 2) は証明できる。1), 2) は 1), 2) を使用すれば自明である。

補題 2.2次の式を満足する定数 C_1 が存在する。

$$B_0[u, u] \geq \frac{\delta}{2} \|u\|_m^2 - C_1 \|u\|_0^2 \quad \forall u \in \dot{H}_m(\Omega)$$

こゝで $B_0[u, v] + C_1(u, v) = B_2[u, v]$ とし $\forall u, v \in \dot{H}_m(\Omega)$ に対して
前記と同様に $B_2[u, v] = (A_2 u, v)$ を満たす作用素 $A_2: \dot{H}_m(\Omega) \rightarrow \dot{H}_m(\Omega)$
が決まる。それは補題 2.1 と同様な評価をもつ。こゝで $\dot{H}_m(\Omega)$
とは $\dot{H}_m(\Omega)$ の双共役空間である。さて $\forall x_0 \in \Omega$ を固定する。

$$A = \left\{ \zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \text{supp } \zeta \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\} \text{ かつ } \zeta(0) = 1 \right\}$$

と A を定義して $\zeta \in A$ のとき $\zeta_{\varepsilon_1}(x) = \zeta\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon_1}\right)$ と決める。 $\varepsilon_1 = \delta(x_0)$
としたとき

$$S_{\lambda, \varepsilon_1} f = \zeta_{\varepsilon_1} \{ (A - \lambda)^{-1} f - (A_2 - \lambda)^{-1} \lambda f \} \quad \forall f \in V^*$$

とおけば $S_{\lambda, \varepsilon_1}$ は V^* から V への有界作用素になる。こゝで
 λf とは f の $\dot{H}_m(\Omega)$ への制限である。

補題 2.3

$\varepsilon_1^{-1} |\lambda|^{-1/2m} \leq 1$ ならば、次の様な ε_1, λ に無関係な
定数 C_2 が存在する。

$$\left. \begin{aligned} \|S_{\lambda, \varepsilon_1}\|_{V^* \rightarrow V} &\leq C_2 (\varepsilon_1^{-1} |\lambda|^{-1/2m} d(\lambda)^{-1})^{1/2} / d(\lambda), \quad \|S_{\lambda, \varepsilon_1}\|_{V^* \rightarrow L^2} \\ \|S_{\lambda, \varepsilon_1}\|_{L^2 \rightarrow L^2} &\leq C_2 (\varepsilon_1^{-1} |\lambda|^{-1/2m} d(\lambda)^{-1}) / d(\lambda), \quad \|S_{\lambda, \varepsilon_1}\|_{L^2 \rightarrow V} \end{aligned} \right\} \leq C_2 (\varepsilon_1^{-1} |\lambda|^{-1/2m} d(\lambda)^{-1})^{1/2} / d(\lambda)$$

証明

$$S_{\lambda, \varepsilon_1} f = v = \zeta_{\varepsilon_1} u \text{ とおく。}$$

$$|B[v, v] - \lambda(v, v)| \leq |B[v, v] - B[u, \zeta_{\varepsilon_1} v]| + |B[u, \zeta_{\varepsilon_1} v] + C_1(u, \zeta_{\varepsilon_1} v)| = I_1 + I_2$$

とおく。こゝで補間定理と補題 2.1 を使用して、 $0 \leq k \leq m$

$$\|(A - \lambda)^{-1} f\|_k \leq K_1 |\lambda|^{1/2 + k/2m} / d(\lambda) \|f\|_{V^*}, \quad \forall f \in V^* \quad (2-5)$$

$$\|(A-\lambda)^{-1}f\|_R \leq K_1 |\lambda|^{1/2 + \frac{p}{2}m} / d(\lambda) \|f\|_{-m} \leq K_1 |\lambda|^{1/2 + \frac{p}{2}m} / d(\lambda) \|f\|_{V^*} \quad (2-6)$$

を得る。又次に

$$\|v\|_R \leq k_2 |\lambda|^{-(m-k)/2m} (\|v\|_m + |\lambda|^{1/2} \|v\|_0) \quad \forall v \in H_m(\Omega) \quad (2-7)$$

をも得る。さて I_1 に対して Leibniz の公式, $|D^r \varepsilon_1| \leq k_3 \varepsilon_1^{-|r|}$ と

(2-5), (2-6), (2-7) を使用して

$$|I_1| \leq k_4 (\varepsilon^{-1} |\lambda|^{1-\frac{1}{2}m} / d(\lambda)) \|f\|_{V^*} (\|v\|_m + |\lambda|^{1/2} \|v\|_0). \quad (2-8)$$

次に $|B[u, \varepsilon_1, v]| \leq K \{ \|u\|_m \| \varepsilon_1 v \|_{m-1} + \|u\|_{m-1} \| \varepsilon_1 v \|_m \}$ と (2-5), (2-6)

(2-7) を使用する事によって

$$|I_2| \leq k_5 (|\lambda|^{1-\frac{1}{2}m} / d(\lambda)) \|f\|_{V^*} (\|v\|_m + |\lambda|^{1/2} \|v\|_0). \quad (2-9)$$

$$- \text{よ} \quad |B[vv] - \lambda(v, v)| \geq k_6 d(\lambda) |\lambda| (\|v\|_m + |\lambda|^{1/2} \|v\|_0)^2 \quad (2-10)$$

がわかり (2-8), (2-9), (2-10) を組み合わせる事により $V^* \rightarrow V, V^* \rightarrow L^2$ への評価式が得られる。残りの評価式も同様にできる。

ここで補題 2.1 を使用すれば

$$(A-\lambda)^{-1}f(x) = \int_{\Omega} K_{\lambda}(x, y) f(y) dy \quad \forall f \in L_2(\Omega)$$

$$(A_2-\lambda)^{-1}f(x) = \int_{\Omega} K_{\lambda}^{(2)}(x, y) f(y) dy$$

を満足する resolvent 核が存在する事がわかる。ここで

補題 2.1, 2.3 を使用する事により次の補題を得る。

補題 2.4 $0 \leq p \leq 1$ に対して λ, x_0 に無関係な定数 C_3 が存在

する。
 $|K_{\lambda}^{(2)}(x_0, x_0) - K_{\lambda}(x_0, x_0)| \leq C_3 |\lambda|^{m/2} / d(\lambda) \left(\frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2}m}}{d(x_0) d(\lambda)} \right)^p$

ここで $B_0[u, v]$ の係数 $a_{\alpha\beta}(x)$ に次の様な 仮定をもうけよう。

S-(0); Riemann 可積分関数 u, v は Ω 内で a 連続

S-(1); k 次の Hölder 連続

S-(2); $C^{1+k}(\Omega_1)$ に属す。ここで $C^{1+k}(\Omega_1)$ とは $\bar{\Omega} \subset \Omega_1$ とする領域 Ω_1 上で一回微分したものが k 次の Hölder 連続

さて次に $\tilde{\rho} \in C_0^\infty\{x \in \mathbb{R}^1; |x| \leq \pi^{-1/2}\}$ とし $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho} dx = 1$, このとき $\rho(x) = \tilde{\rho}(x_1) \cdots \tilde{\rho}(x_n)$ とし $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \rho(x/\varepsilon)$ とおく。 $\rho_\varepsilon * f(x)$ は ρ_ε と f の合成積とする。

補題 2.5 $f \in C^1(\Omega_1)$ とする。 δ_1 は十分小に取って固定する

$$\text{とき} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq 1} (x - x_0)^\alpha \partial_x^\alpha f(x_0) & \text{if } |x - x_0| \leq \delta_1 \\ \sum_{|\alpha| \leq 1} (x_1 - x_0)^\alpha \partial_x^\alpha f(x_0) & \text{if } |x - x_0| > \delta_1 \end{cases}$$

ここで x_1 は $|x - x_0| = \delta_1$ の球面と x_0 から x を結ぶ半直線との交点とする。

$$1) \rho_\varepsilon * \tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$2) 0 < \varepsilon < \delta \Rightarrow \rho_\varepsilon * \tilde{f} = \tilde{f}(x) \quad \text{if } |x - x_0| < \delta_1 - \varepsilon \text{ のとき}$$

$$3) |\rho_\varepsilon * \tilde{f}(x) - f(x_0)| \leq \delta_1 \sum_{|\alpha|=1} |\partial_x^\alpha f(x_0)|$$

ここで S-(2) のとき補題 2.5 を使用して $a_{\alpha\beta}(x) = f(x)$ として合成積になるものを $a_{\alpha\beta}^2(x)$ とおく。 S-(1) のときは $a_{\alpha\beta}^1(x) = a_{\alpha\beta}(x_0)$ とお

き. $S(0)$ のとき $P_{\alpha\beta} = \{a_{\alpha\beta}(x) \text{ の連続点全体} \}$ としたとき

$\bigcap_{\alpha,\beta} P_{\alpha\beta} = P$ $\forall x_0 \in P$ に対して $a_{\alpha\beta}^0(x) = a_{\alpha\beta}(x_0)$ とする。この時

$$\widetilde{B}_i^0[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} a_{\alpha\beta}^i(x) D^{\alpha} u \overline{D^{\beta} v} dx \quad \forall u, v \in \dot{H}_m(\Omega)$$

とする。 $i = 0, 1, 2$.

補題 2.6 上記の δ_1 を十分小に取れば 正定数 C_4, C_5 が存在する。

$$\widetilde{B}_i^0[u, u] \geq C_4 \|u\|_m^2 - C_5 \|u\|_0^2 \quad \forall u \in \dot{H}_m(\Omega)$$

$\widetilde{B}_i^0[u, v] + C_5(u, v) = \widetilde{B}_i[u, v]$ とする時 $\widetilde{B}_i[u, v] = (A_{i+3} u, v)$ に

よって作用素 $A_{i+3}: \dot{H}_m(\Omega) \rightarrow H_{-m}(\Omega)$ が決まり。この A_{i+3} に対し

でも補題 2.1 と同様の評価式がわかる。 $\varepsilon = \text{dist}(\Omega,$

$\partial\Omega_1)$ とする時。 $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_0, \delta_1/2)$ に対して

$$S_{\lambda\varepsilon}^{i+i} f = \sum_{\varepsilon} \{ (A_2 - \lambda)^{-1} - (A_{i+3} - \lambda)^{-1} \} f \quad \forall f \in H_m(\Omega)。$$

補題 2.7 $\varepsilon^{-1} |\lambda|^{1-\frac{1}{2}m} d(\lambda)^{-1} \leq 1$ ならば 任意の正整数 j に対し

以下次の不等式がわかる。

$$\|S_{\lambda\varepsilon}^{i+i}\|_{H_{-m} \rightarrow \dot{H}_m} \leq K_j i R_{\lambda\varepsilon}^j |\lambda|^{1/2} d(\lambda), \quad \|S_{\lambda\varepsilon}^{i+i}\|_{H_{-m} \rightarrow L_2} \leq K_j i R_{\lambda\varepsilon}^j |\lambda|^{1/2} d(\lambda)$$

$$\|S_{\lambda\varepsilon}^{i+i}\|_{L_2 \rightarrow \dot{H}_m} \leq K_j i R_{\lambda\varepsilon}^j |\lambda|^{1/2} d(\lambda), \quad \|S_{\lambda\varepsilon}^{i+i}\|_{L^2 \rightarrow L_2} \leq K_j i R_{\lambda\varepsilon}^j / d(\lambda)$$

$$i = 1, 2 \text{ のとき } i R_{\lambda\varepsilon}^j = \varepsilon^{i-1+j} |\lambda|^{1/2} d(\lambda) + \left(\frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2}m}}{\varepsilon d(\lambda)} \right)^j$$

$$i = 0 \text{ のとき } i R_{\lambda\varepsilon}^j = \theta_{\varepsilon} |\lambda|^{1/2} d(\lambda) + \left(\frac{|\lambda|^{1-\frac{1}{2}m}}{\varepsilon d(\lambda)} \right)^j$$

又 K_j は $\varepsilon, \lambda, \lambda_0$ に無関係な定数で θ_{ε} は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき 0 に行く。

証明 $|B_2[v, v] - \lambda(v, v)| \leq |(\tilde{B}_i - B_2)[(A_{i+3} - \lambda)^{-1} \cdot \mathbb{I}_E v]| +$

$$|B_2[v, v] - B_2[u, \mathbb{I}_E v]| = I_1 + I_2 \text{ とおく。 (こゝで } C_1 = C_5$$

と考へてもよいから) 補題 2.5 の ii) と $|a_{\alpha\beta}(x) - \tilde{a}_{\alpha\beta}(x)| \leq K_1 \cdot \varepsilon^{i-H_R}$

if $|x - x_0| < \varepsilon$; $i = 1, 2$, 又 $i = 0$ のときは $|a_{\alpha\beta}(x) - \tilde{a}_{\alpha\beta}(x)| \leq K_1 \theta_\varepsilon$ を使用し

て I_1 を評価する。 たとへば $i = 1$ の時は 補題 2.3 の証明と同

様に ($L_2 \rightarrow \cdot$ は $V^* \rightarrow \cdot$ と同様にできるのて $V^* \rightarrow \cdot$ のみとする。)

$$|I_1| \leq K_7 \cdot \varepsilon^R \cdot (|\lambda|^{1/2} d(\omega)) \|f\|_{-m} (\|v\|_m + |\lambda|^{1/2} \|v\|_0) \quad (2-11)$$

$$|I_2| \leq K_8 (\varepsilon^{-1} |\lambda|^{-1/2} m / d(\omega)) \|f\|_{-m} (\|v\|_m + |\lambda|^{1/2} \|v\|_0)$$

を得る事と (2-10) を使用して $j = 1$ の時が証明できた。 後は

帰納法を使用する。 こゝで $\{ \in \Lambda \quad x \in \text{supp } \} \text{ に対し } \chi(\omega) = 1 \text{ なる}$

ものとするとき

$$|I_2| \leq K_9 (\varepsilon^{-1} |\lambda|^{-1/2} m) (\| \chi_\varepsilon u \|_m + |\lambda|^{1/2} \| \chi_\varepsilon u \|_0) (\|v\|_m + |\lambda|^{1/2} \|v\|_0) \quad (2-12)$$

となる。 こゝで 帰納法の仮定を使用して

$$\| \chi_\varepsilon u \|_m + |\lambda|^{1/2} \| \chi_\varepsilon u \|_0 \leq K_j R_{\lambda, \varepsilon}^{j+1} |\lambda|^{1/2} d(\omega) \|f\|_{-m} (\|v\|_m + |\lambda|^{1/2} \|v\|_0) \quad (2-13)$$

さて (2-10), (2-11), (2-12) (2-13) を考へる事により $\varepsilon^{-1} |\lambda|^{1/2} m / d(\omega) \leq 1$ の

とき $j+1$ の式が得られる。 又 $i = 0, 2$ の場合も同様に出来る。

こゝで A_{i+3} の resolvent 核を $K_\lambda^{(i+3)}(x, y)$ とすれば ($i = 0, 1, 2$)

補題 1.1 と 補題 2.7 から 次の補題を得る。

補題 2.8 $\varepsilon^{-1} |\lambda|^{1/2} m / d(\omega) \leq 1$ のとき $K_0, \varepsilon, \lambda$ に無関係な定数

C_6 が存在する。

$$|K_{\lambda}^2(x_0, x_0) - K_{\lambda}^{3+i}(x_0, x_0)| \leq C_6 |\lambda|^{1/2m} / d(\lambda) |R_{\lambda}^i|$$

ここで $i = 0, 1, 2$ である。

次に境界のなめらかさがないため $\mathbb{R}^n$ に拡張した接触作用素と比較する。 $i = 0, 1, 2$ として

$$\tilde{B}_{3+i}[u, v] = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha\beta}^i(x) D^{\alpha} u \overline{D^{\beta} v} dx \quad \forall u, v \in \dot{H}_m(\mathbb{R}^n).$$

補題 2.9 次の不等式を得る。

$$\tilde{B}_{3+i}[u, u] \geq C_7 \|u\|_m^2 - C_8 \|u\|_0^2 \quad \forall u \in \dot{H}_m(\mathbb{R}^n).$$

ここで $\tilde{B}_{3+i}[u, v] + C_8(u, v) = \tilde{B}_{3+i}[u, v]$ とおく。 (これより)

$\tilde{B}_{3+i}[u, v] = (A_{6+i}u, v)$ が成り立ち、この A_{6+i} に対して 補題

2.1 と同様な評価式がなりたつ。ここで $K_{\lambda}^{6+i}(x, y)$ を A_{6+i} の resolvent 核とすると $K_{\lambda}(x, y)$ と $K_{\lambda}^2(x, y)$ との評価式と同様な方法により次の補題を得る。

補題 2.10 $0 \leq p \leq 1$ としたとき

$$|K_{\lambda}^{6+i}(x_0, x_0) - K_{\lambda}^{3+i}(x_0, x_0)| \leq C_9 |\lambda|^{1/2m} / d(\lambda) \left(\frac{|\lambda|^{1-1/2m}}{S(x_0)d(\lambda)} \right)^p.$$

ここで C_9 は x_0, λ には無関係な定数。

Agmon-Kannai [4] により次の評価式を得る。

補題 2.11 $d(\lambda) \geq |\lambda|^{1-1/2m} \lambda^{1/2} + \epsilon \quad (\forall \epsilon > 0)$ のとき x_0, λ に

は無関係な定数 C_{10} が存在する。

$$|K_{\lambda}^{S+L}(x_0, x_0) - C(x_0)(-\lambda)^{-1+\gamma/2m}| \leq C_0 |\lambda|^{-1+(n-1)/2m}$$

$$\therefore C(x_0) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x_0) \xi^{\alpha+\beta} + 1 \right\}^{-1} d\xi.$$

§ 3. 固有値と resolvent 核との関係

いま作用素 A の固有値は離散的である。そこでこれを $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ とおくと $\text{Agmon}[1]$ によって次の補題を得る。

補題 3.1

$$\int_{\Omega} K_{\lambda}(x, x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda}$$

補題 3.2

$S(-t)$ のとき

$$C_0 = \int_{\Omega} C(x_0) dx_0 \text{ とすれば}$$

$$N(t) = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < t} 1 = C_0 t^{\gamma/2m} + o(t^{\gamma/2m})$$

証明

λ を虚数軸にとり 補題 2.4, 2.8, 2.10, 2.11 を組合せて $P = \frac{1}{2}$ と取る時 ルベークの定理が使用できて

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda^{-1+\gamma/2m} \int_{\Omega} K_{\lambda}(x, x) dx = \int_{\Omega} \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda^{-1+\gamma/2m} K_{\lambda}(x, x) dx = C_0$$

かわかる。又補題 3.1 を使用する事により

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} = C_0 (-\lambda)^{-1+\gamma/2m} + o(\lambda^{-1+\gamma/2m})$$

これに Hardy-Littlewood の Tauberian Theorem を使用する事により証明できる。

補題 3.3

$\forall \epsilon > 0$ とし 7 次の関係を満たす λ に無関係な定数 C_{ϵ} が存在する。ただし $d(\lambda) \geq C|\lambda|^{-1-\gamma/2m+\epsilon}$ とする。

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda} \right| \leq C_{11} |\lambda|^{1+(n-1)/2m+\frac{1}{2}} / d^2(\lambda)$$

証明

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda} \right| \leq \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j \leq 2|\lambda|} \frac{|g_m \lambda_j|}{|\lambda_j - \lambda| |\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda|} + \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j > |\lambda|} (\dots)$$

後者は補題 3.2, 2.1 を使用して

$$|\lambda_j - \lambda| \geq k_1 |\lambda|^{1-n/2m-\frac{1}{2}} j^{(1+\epsilon)}$$

$$|g_m \lambda_j| |\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda|^{-1} \leq k_2 |\lambda|^{-1/2m}$$

から証明できる。前者は補題 2.1 と 3.2 を使用して

$$|g_m \lambda_j| \leq k_3 |\lambda|^{1-1/2m}, \quad N(2|\lambda|) \leq k_4 |\lambda|^{-1+n/2m}$$

より証明できる。

今までの事をすべて総合すると次の定理が得られる。

定理 3.1 $\nu > 0, 0 \leq p \leq 1$ とし、 $d(\lambda) \geq |\lambda|^{1-1/2m+\frac{1}{2}+\frac{\nu}{p}}$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (\operatorname{Re} \lambda_j - \lambda)^{-1} &= C_0 (-\lambda)^{-1+n/2m} \\ &+ O \left[|\lambda|^{(1+\epsilon)+ (n-(1+\epsilon)/2m+\frac{1}{2})} / d(\lambda)^{1+\epsilon+\frac{1}{2}} \right. \\ &\left. + |\lambda|^{p+(n-p)/2m} / d(\lambda)^{1+p} + |\lambda|^{1+(n-1)/2m+\frac{1}{2}} / d^2(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

ここで S-(1) ならば $i=1$, S-(2) ならば $i=2$ とする。

証明 補題 2.8 で $\varepsilon = |\lambda|^{1-1/2m+\frac{1}{2}} / d(\lambda)$ とすると $iR_{\lambda \pm \varepsilon}$ の後者の項は

δ を大にすれば無視できる。あとは補題 2.4, 2.10, 2.11, 3.1, 3.2 を使用すればよい。

以下 Agmon [5] の方法に従う。

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (Re \lambda_j - \lambda)^{-1}, \quad I(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{L(z)} f(\lambda) d\lambda$$

とおく。ここで $z = t + i\tau$ として z と $\bar{z}$ を結ぶ正の実軸を通らない曲線とする。すると $t > 0, \tau > 0$ とした時

$$|I(z) - (\tau/\pi) Re f(z) - N(t) + N(0)| \leq C_{12} \tau \cdot |g_m f(z)|$$

となる。以下 S-(1) の場合をとりあつかう。 $d(\lambda) \geq |\lambda|^{1/2m} t^{h/2m + 2}$ の仮定のもとで λ に無関係な定数 C_{13} が存在する, すなわち

$$|f(\lambda)| \leq C_{13} |\lambda|^{-1 + n/2m}.$$

ここで $L(z) = \{\lambda = t + iu \in \mathbb{C}^1; t^{1-h/2m(h+2)+2} \leq u \leq t\} \cup \{\lambda; |\lambda| = \sqrt{2}t, Re \lambda \leq t\}$ とおく。上記の事より

$$|I(z) - N(t)| \leq C_{14} t^{n/2m - h/2m(h+2) + 2}$$

— 3 I_1, I_2 を次の様におく。

$$\begin{aligned} I(z) &= (2\pi i)^{-1} \int_{L(z)} \{f(\lambda) - C_0 t^{-1 + n/2m}\} d\lambda + (2\pi i)^{-1} \int_{L(z)} C_0 (-\lambda)^{-1 + n/2m} d\lambda \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

定理 3.1 を使用して, $h/2 < p < 1$ に取る事によって

$$|I_1| \leq C_{15} t^{n/2m - h/2m(h+2) + 2}$$

$$|I_2 - t^{n/2m} \frac{\sin(n\pi/2m)}{n\pi/2m}| \leq C_{16} t^{n/2m - h/2m(h+2) + 2}.$$

以上よりすべて組み合わせれば

$$N(t) = C_0 \frac{\sin(n\pi/2m)}{n\pi/2m} t^{n/2m} + O(t^{n/2m - h/2m(h+2) + 2}).$$

S-(2) のときは, $h < 1, 1 > p \geq (h+1)/2$ と取り $h=1$ の時は

1 の十分近くに p を取る事により 同様な方法により

$$N(t) = C_0 t^{n/2m} + O[t^{n/2m - (h+1)/2m(h+3) + 2}].$$

以上より

定理 3.2 Ω ; 限定円錐条件を満たす有界領域 Ω

$$\int_{\Omega} g^{-p}(x) dx < +\infty \quad 0 < p < 1$$

と仮定する。このとき

S-(0) なるものは

$$N(t) = C_0 \frac{\sin(n\pi/2m)}{n\pi/2m} t^{n/2m} + o(t^{n/2m}).$$

次に、 $N(t) = C_0 \frac{\sin(n\pi/2m)}{n\pi/2m} t^{n/2m} + O(t^{(n-\theta)/2m})$.

そこで S-(1) なるものは $0 < \theta < h/(h+2)$

S-(2) なるものは $0 < \theta < (h+1)/(h+3)$.

$$又 \quad C_0 = \int_{\Omega} C(x_0) dx_0 = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n} \left\{ \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} h_{\alpha\beta}(x) \right\}^{n+\beta} + 1 \Big\}^{-1} dx$$

となる。

文 献 表

- [1], S. Agmon; Lectures on elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand Mathematical Studies, 1965
- [2], S. Agmon; On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., vol 15, (1962), 119-147.
- [3], S. Agmon; On kernels eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems, Comm. Pure Appl. Math. vol 18, (1965), 627-663.

- [4]. S. Agmon and Y. Kannai; On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators, Israel J. Math. 5 (1967), 1-30.
- [5]. S. Agmon; Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators; Arch Rational Mech. Anal. 28. (1968). 165-183
- [6]. N. Dunford and J.T. Schwartz; Linear Operators. vol 2, Interscience Publishers, New York, 1963
- [7] T. Kato; Fractional powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan 13. (1961) 246-274