

非線型熱方程式の解の時間に関する漸近行動

(東大・理) 増田 久弥

方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1-u^2)u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x,0) = \varphi(x) & (0 \leq \varphi \leq 1) \end{cases}$$

の解 $u(x,t)$ が もし $\varphi \neq 0$ ならば, $t \rightarrow \infty$ の時
1 に近づくことを示すことが, この話の目的です。

もっと一般に,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + a(x,t,u) \\ (x \in \mathbb{R}^N, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

なる方程式を考えよう。ここで,

(A-1) $a(x,t,\rho)$ は, $\mathbb{R}^N \times [0, \infty) \times [0,1]$
上で有界連続であって

$$a(x,t,0) = a(x,t,1) = 0$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^N, t > 0)$$

$$0 < a(x,t,s) < 1 \quad (x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0, 0 < s < 1)$$

(A-2)

$$a(x, t, p) - a(x, t, p') \geq b(x, t, p, p') (p - p')$$

か、 $\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t \geq 0, 0 \leq p' \leq p \leq 1$ に対し
成立するとき 有界連続函数 $(x, t, p, p' \mapsto b(x, t, p, p'))$

$b(x, t, p, p')$ が存在する。

(A-3) 次の如き、 $0 \leq p \leq 1$ で狭義単調減少連続
函数 $F(p)$ が存在して、

$$0 \leq p F(p) \leq a(x, t, p) \\ (\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t \geq 0, 0 \leq p \leq 1)$$

(A-4) $a(x, t, p)$ は、各 x, p を固定した時
に、 $t \mapsto a(x, t, p)$ は狭義単調増加 ($a(x, t, p) \geq$
 $a(x, t', p), t \geq t')$

なる条件下で、

定理 初期値 $\varphi(x)$ が

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi \neq 0$$

ならば、解 $u(x, t)$ は、1 に “指数函数的に”
($x \mapsto 1$ へ 近づく) $(t \rightarrow \infty)$

証明.

1°. $0 \leq u \leq 1$, 且

$$u(x, t) \geq C \left(\frac{1}{4\pi t} \right)^{\frac{N}{2}} \int_I e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

(ここで, C は適当な正定数, I は有界閉区間;

$$[b_1, c_1] \times \cdots \times [b_N, c_N])$$

(A-1) から, $u(x, t, u) \geq 0$ であるから, u は,
 $u_t \geq \Delta u$ をみたす. u_0 とし

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \Delta u_0, \quad u_0(x, 0) = \varphi(x)$$

の解とすると, $W \equiv u - u_0$ は,

$$W_t \geq \Delta W, \quad W(x, 0) = 0$$

をみたす. 故に, $W(x, t) \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t > 0$)

より,

$$u(x, t) \geq u_0(x, t) = \left(\frac{1}{4\pi t} \right)^{\frac{N}{2}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \varphi(y) dy$$

$\varphi \neq 0$. $\varphi \geq 0$ であるから,

$$\varphi(x) \geq C \chi_I(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

ある正の定数 C と, 有界閉区間 I が存在する。

これから、求める bound が 2°3. $W = 1 - u$ は、

$$\begin{aligned} W_t &= \Delta W + a(x, t, 1 - W) \\ &= \Delta W + a(x, t, 1) - a(x, t, 1 - W) \\ &\geq \Delta W + b(x, t, 1, 1 - W)W \\ W(x, 0) &= 1 - \varphi(x) \geq 0 \end{aligned}$$

をみたす。これから、 $W(x, t) \geq 0$ 。つまり、
 $u(x, t) \leq 1$

が示された。

2°. 次の如き点列 ρ_j が存在する。

$$\begin{aligned} \rho_j &\rightarrow 1 \quad (\rho_j < 1) \\ F(\rho_j) &\rightarrow 0, \quad F'(\rho_j) < 0 \end{aligned}$$

これは、(A-3) から $F(1) = 0$ であることと、 $F(\rho)$ が 0 となる所微分して、負の微分係数をもつからである。 $\varepsilon_j = F(\rho_j)$ とおく。この時、

$$\begin{cases} \frac{dv}{dA} = F(v) v - \varepsilon_j v \\ v(0) = \delta \quad (F(\delta) > \varepsilon_j) \end{cases}$$

なる常微分方程式を解く。これは、

$$\int_{\delta}^{v(t)} \frac{dA}{F(A)A - \varepsilon_j A} = t$$

と解かれる。 $t \rightarrow \infty$ の時、右辺 $\rightarrow \infty$ かつ、
左辺 $\rightarrow \infty$ とあるはばきがある。 $\bullet$ これは、

$$\int_{\delta}^{\rho_j} \frac{ds}{F(\rho) \rho - \varepsilon_j \rho} = \infty$$

したがって、

$$v(t) \rightarrow \rho_j \quad (t \rightarrow \infty)。$$

$$F(\rho) = F(\rho_j) + F'(\rho_j)(\rho - \rho_j) + o(\rho - \rho_j)$$

かつ、

$$\rho_j - v(t) \leq \text{const.} \cdot e^{-\text{const.} \cdot t}$$

を得る。

3° δ を任意に固定する。

$$\rho = \frac{2N}{\varepsilon_j}$$

とある。この時、

$$0 < \delta < C \left(e^{\frac{(x-\bar{x})^2}{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \int_I e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\rho}} dy$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^N) \quad \left(\frac{1}{4\pi\rho} \right)^{\frac{N}{2}}$$

ある δ が存在する。この δ を初期値とある 2° の解
をとる。

$$\underline{u}(x,t) \equiv e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4t+\rho}}$$

とおき

$$\underline{y}(x,t) = v(t) \underline{u}(x,t)$$

証明。

$$(v) \quad \underline{u}(x, 0) = \delta e^{-\frac{(x-z)^2}{A}} \\ \leq C \cdot \left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{I}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\rho}} dy$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^N)$$

$$\therefore \underline{u}(x, 0) \leq u(x, \rho).$$

$$(iv) \quad \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} - \Delta \underline{u} - a(x, t, \underline{u})$$

$$= (F(v) \underset{m}{v} - \varepsilon_j \underset{m}{v}) e(x, t) + \frac{4(x-z)^2}{(4t+\rho)^2} \underset{m}{v} e(x, t) \\ - \underset{m}{v} e(x, t) \left(-\frac{2N}{4t+\rho} + \frac{4(x-z)^2}{(4t+\rho)^2} \right) \\ - a(x, t, \underline{u})$$

$$= F(v) \underset{m}{v} e + \underset{m}{v} e \left(-\varepsilon_j + \frac{2N}{4t+\rho} \right) \\ - a(x, t, \underline{u}) \\ \leq F(v) \underset{m}{v} e - a(x, t, \underline{u}).$$

$$F(v) \leq F(\underset{m}{v} e) \quad (e \leq 1 \text{ 及 } A, 3 \text{ 等})$$

証明終わり。

$$\text{右辺} \leq F(\underline{u}) \underline{u} - a(x, t, \underline{u}) \leq 0$$

$\epsilon = \epsilon$, (A.3) を用いた。

4°.

$$w(x, t) \equiv u(x, t + \rho) - \underline{u}(x, t)$$

と $\epsilon < \epsilon$,

$$w(x, 0) = u(x, \rho) - \underline{u}(x, 0) \geq 0$$

(3° より)

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= u_t(x, t + \rho) - \underline{u}_t(x, t) \\ &\geq \Delta u + a(x, t + \rho, u) \\ &\quad - \Delta \underline{u} - a(x, t, \underline{u}) \\ &\geq \Delta u + a(x, t, u) \\ &\quad - \Delta \underline{u} - a(x, t, \underline{u}) \\ &\geq \Delta w + b(x, t, u, \underline{u}) w \end{aligned}$$

故に,

$$w(x, t) \geq 0$$

$$\therefore u(x, t + \rho) \geq \underline{u}(x, t)$$

を得る。故に,

$$u(\bar{x}, t + \rho) \geq \underline{u}(\bar{x}, t) = v(t)$$

$$\begin{aligned} \therefore R_j - u(\bar{x}, t + \rho) &\leq R_j - v(t) \\ &\leq \text{const. } \bar{Q}^{\text{const. } t} \end{aligned}$$

故に, $\forall \varepsilon > 0$ に対し.

$$1 - \varepsilon < u(\lambda, t) \leq 1$$

に, $\lambda = 2, 1, 2, \dots$ 一列は 且 指数函数的に初期値 0, 増大する。(広義)

(証明)