

ある種の線型方程式(2変数)に対する沢田
の定理について.

京大理大学院 浦部治一郎

解析的係数の線型偏微分方程式に対する局所的 Cauchy 問題は初期平面が非特性的であり、初期値が解析的である時は、Cauchy-Kovalevskaya の定理として解析的な解の存在と一意性が知られている。初期値が極などをもつ場合にどうなるのかも答えたのが沢田の定理である。沢田 [1][2][3] は方程式の主要部の特性根の多重度が一定の場合に答を与えた。ここではその仮定をみない“ある種の方程式”に対して、沢田の定理を試みる。ここでの形式解の構成法は溝畑 [1] を、形式解の収束性については、沢田 [3]、C. Wagschal [1]、J-C. DeParis [1] を各々参照して下さい。以後 $\mathbb{C}^2$ の原点の近傍での話であり、微分作用素の係数はそこで解析的とする。

$$\begin{cases} P_m(t, x, \partial_t, x \partial_x) \equiv \sum_{\alpha+\beta=m} a_{\alpha,\beta}(t, x) x^\beta \partial_t^\alpha \partial_x^\beta \\ Q_n(t, x, \partial_t, \partial_x) \equiv \sum_{\alpha+\beta=n} b_{\alpha,\beta}(t, x) \partial_t^\alpha \partial_x^\beta \end{cases}$$

とおく.

[仮定 I], $a_{m,0} \equiv 1, \quad b_{n,0} \equiv 1.$

[仮定 II] $Q(0, 0, \lambda, 1) = 0$ は

0 と異なる、互いに

相異なる n 根をもつ。

$$\left\{ \begin{array}{l} L(t, x, \partial_t, \partial_x) \equiv P_m(t, x, \partial_t, x \partial_x) Q_n(t, x, \partial_t, \partial_x) \\ K(t, x, \partial_t, \partial_x) \equiv L(t, x, \partial_t, \partial_x) - M(t, x, \partial_t, \partial_x) \end{array} \right. \quad \text{と置く.}$$

(但し M は $n+m-1$ 次の任意の微分作用素.)

問題 $\left\{ \begin{array}{l} Ku = 0. \\ \partial_t^h u(0, x) = \frac{(h-1)!}{x^{h-1}} (-1)^{h-1} \quad (h=0, \dots, m+n-1, \quad x > 0) \end{array} \right.$

[定理] 上の Cauchy 問題は次の形の一意的な解をもつ。

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{V_j(t, x)}{x^j} + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^k(t, x)}{[\varphi_k(t, x)]^j} + U_0^k(t, x) \log \varphi_k(t, x) \right) \\ + V_0(t, x) \log x + H(t, x)$$

(V_j, U_j^k, H は、原点の近傍で解析的)

$u(t, x)$ は、 $x=0$, $\varphi_k(t, x)=0$ ($k=1, \dots, n$) を除いた原点の近傍で解析的である。

$\varphi_k(t, x)$ は、 $Q(t, x, \varphi_t, \varphi_x) = 0$ $\varphi(0, x) = x$ の解、

証明は (i) 形式解の構成; (ii) 形式解の収束性の証明; より成る。そのためにまず準備をする。

$$* \text{ (wave form) } f_{\beta}(z) = \begin{cases} (-1)^{-\beta-1} (-\beta-1)! z^{\beta} & (\beta < 0) \\ \frac{z^{\beta}}{\beta!} \log z - \frac{A_{\beta}}{\beta!} z^{\beta} & (\beta \geq 0) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_{\beta} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\beta} \\ A_0 = 0 \end{array}$$

$$g_{\beta}(z) = \begin{cases} 0 & (\beta < 0) \\ \frac{z^{\beta}}{\beta!} & (\beta \geq 0) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz} f_{\beta} = f_{\beta-1}, \quad \frac{d}{dz} g_{\beta} = g_{\beta-1}$$

次の関係式が成立つ。

$$\left\{ \begin{array}{l} z^{\alpha} f_{\beta}(z) = \mathcal{F}^{\alpha}(\beta) f_{\alpha+\beta}(z) + \mathcal{G}^{\alpha}(\beta) g_{\alpha+\beta}(z) \quad (\alpha=0, 1, 2, 3, \dots) \\ z^{\alpha} g_{\beta}(z) = \mathcal{F}^{\alpha}(\beta) g_{\alpha+\beta}(z) \quad (\alpha=0, 1, 2, 3, \dots) \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{F}^0(\beta) = (\beta+1) \cdots (\beta+\alpha) \\ \mathcal{G}^{\alpha}(\beta) \text{ は } \mathbb{Z}\text{-係数 } \alpha-1 \text{ 次の } \beta \text{ の多項式} \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{F}^0(\beta) \equiv 1 \\ \mathcal{G}^c(\beta) \equiv 0 \end{array} \right\}$$

$$* \quad \left\{ \begin{array}{l} P_m[u f_j(x)] \equiv \sum_{i=0}^m p_i[u] f_{j-m+i}(x) \\ Q_n[u f_j(x)] \equiv \sum_{\ell=0}^n q_{\ell}[u] f_{j-n+\ell}(x) \end{array} \right.$$

(ここで p_i, q_{ℓ} は各々 i 次, ℓ 次の微分作用素。)

「lemma. $p_i = x^{m-i} \tilde{p}_i$ とかける. $\tilde{p}_i$: i 次の微分作用素。」

$$* \quad L[w f_j(x)] \equiv \sum_{k=0}^{m+n} \mathcal{L}_k[w] f_{j-(m+n)+k}(x)$$

$\mathcal{L}_k$ は k 次の微分作用素で k 次のものである。

$$\mathcal{L}_k = \sum_{\substack{i+\ell=k \\ 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n}} p_i q_{\ell}$$

lemma ① $\mathcal{L}_k = x^{[m-k]_+} \tilde{\mathcal{L}}_k$ とかける。

ここで $\tilde{\mathcal{L}}_k$ は k 次の微分作用素、 $[m-k]_+ = \begin{cases} m-k & (m-k \geq 0) \\ 0 & (m-k \leq 0) \end{cases}$

② $\mathcal{L}_m = \tilde{\mathcal{L}}_m$ は $\mathcal{L}_m = p_m z_0 + x p_{m-1} z_1 + \dots + x^m p_0 z_m$

で $p_m = P_m$, $z_0 = Q(t, x, 0, 1) \neq 0$ (仮定 II) に注意すると、

「 $t=0$ は $\mathcal{L}_m$ に対して non-characteristic である。」事がわかる。

(i) 形式解の構成。

以後かんたんなため初期値を $u(0, x) = (k+1)! (-1)^{k+1} x^{-k}$,

$\partial_t^k u(0, x) = 0$ ($k=1, \dots, m+n-1$) として話をすすめる。

次の如くして置く。 $u = \sum_{s=0}^{\infty} u_s$

$$\begin{aligned} L u_0 &= 0 & \therefore L u_{s+1} &= M u_s \\ \left\{ \begin{array}{l} u(0, x) = (k+1)! (-1)^{k+1} x^{-k} \\ \partial_t^k u(0, x) = 0 \quad (k=1, \dots, m+n-1) \end{array} \right. & \therefore \left\{ \begin{array}{l} u(0, x) = 0 \\ \partial_t^k u(0, x) = 0 \quad (k=1, \dots, m+n-1) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$u_s = \sum_{p=-l-s(m+1)}^{\infty} (v_{p,s} f_p(x) + w_{p,s} g_p(x)) + \sum_{h=1}^n \sum_{p=-l-(s+1)(m+1)}^{\infty} u_{p,s}^h f_p(\varphi_h)$$

$s=0$ の場合 $v_{p,0}, w_{p,0}, u_{p,0}^h$ のみならず φ を方程式と初期値とで

$$\begin{aligned} \leftarrow L u_0 &= \sum_{p=-l}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^m \mathcal{L}_i [v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i [v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^m \mathcal{L}_i [w_{p,0}] g_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i [w_{p,0}] g_{p-n-m+i}(x) \right\} + * \\ &= \sum_{p=-l}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^m x^{m-i} \tilde{\mathcal{L}}_i [v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i [v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^m x^{m-i} \tilde{\mathcal{L}}_i [w_{p,0}] g_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i [w_{p,0}] g_{p-n-m+i}(x) \right\} + * \\ &= \sum_{p=-l}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^m x^{m-i} f_{p-n-m+i} \tilde{\mathcal{L}}_i [v_{p,0}] f_p(x) + \sum_{i=0}^m x^{m-i} f_{p-n-m+i} \tilde{\mathcal{L}}_i [v_{p,0}] g_p(x) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i[v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=0}^m \mathcal{F}^{m-i}(p-n-m+i) \widehat{\mathcal{L}}_i[w_{p,0}] g_{p-n}(x) \\
& + \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i[w_{p,0}] g_{p-n-m+i} \} + * \\
& \left[\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m \mathcal{F}^{m-i}(p-n+i-m) \widehat{\mathcal{L}}_i \equiv \widehat{\mathcal{L}}_m(p) \\ & \sum_{i=0}^m \mathcal{F}^{m-i}(p-n-m+i) \widehat{\mathcal{L}}_i \equiv \widehat{\mathcal{L}}_m(p) \\ & \mathcal{L}_i \equiv \widehat{\mathcal{L}}_i(p) \quad (i=m+1, \dots, m+n) \end{aligned} \right] \text{とあり} < \\
& = \sum_{p=-l}^{\infty} \left\{ \sum_{i=m}^{m+n} \widehat{\mathcal{L}}_i(p) [v_{p,0}] f_{p-n-m+i}(x) + \sum_{i=m}^{m+n} \widehat{\mathcal{L}}_i(p) [w_{p,0}] g_{p-n-m+i}(x) + \widehat{\mathcal{L}}_m(p) [v_{p,0}] g_{p-n}(x) \right\} + * \\
& = \sum_{r=-l-n}^{\infty} \left\{ \sum_{i=m}^{m+n} \widehat{\mathcal{L}}_i(r+n+m-i) [v_{r+n+m-i,0}] f_r(x) + \sum_{i=m}^{m+n} \widehat{\mathcal{L}}_i(r+n+m-i) [w_{r+n+m-i,0}] g_r(x) \right. \\
& \quad \left. + \widehat{\mathcal{L}}_m(r+n) [v_{r+n,0}] g_r(x) \right\} + * = 0. \\
& \therefore * = \sum_{h=1}^n \sum_{p=-l+m}^{\infty} \sum_{i=0}^{m+n} \mathcal{L}_i^h [u_{p,0}^h] f_{p-n-m+i}(p_h) \\
& \text{以上より } v_{p,0}, w_{p,0}, u_{p,0}^h \text{ のみならず方程式は、次の如くである。}
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_m(r+n) [v_{r+n,0}] &= - \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i [v_{r+n+m-i,0}] \\ \widehat{\mathcal{L}}_m(r+n) [w_{r+n,0}] &= - \sum_{i=m+1}^{m+n} \mathcal{L}_i [w_{r+n+m-i,0}] - \widehat{\mathcal{L}}_m(r+n) [v_{r+n,0}] \\ \mathcal{L}_i^h [u_{r+n+m-i,0}^h] &= - \sum_{i=2}^{m+n} \mathcal{L}_i^h [u_{r+n+m-i,0}^h] \end{aligned} \right.$$

(まず, $v_{r+n,0}$ を求め、 $w_{r+n,0}$ を求める,

次に、初期値 $v_{r,0}(0,x), \dots, \partial_t^{m-1} v_{r,0}(0,x), u_{r,0}^h(0,x)$ は次の如く求まる,

$$\left\{ \begin{aligned} v_{r,0}(0,x) &= \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,0}^0 v_{r-i,0} + \sum_{i=1}^{m+n-1} M_{i,0}^0 u_{r-i,0}^h \Big|_{t=0} \\ \partial_t v_{r,0}(0,x) &= \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,0}^1 v_{r-i,0} + \sum_{i=1}^{m+n-1} M_{i,0}^1 u_{r-i,0}^h \Big|_{t=0} \\ \partial_t^{m-1} v_{r,0}(0,x) &= \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,0}^{m-1} v_{r-i,0} + \sum_{i=1}^{m+n-1} M_{i,0}^{m-1} u_{r-i,0}^h \Big|_{t=0} \\ u_{r,0}^h(0,x) &= \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,0}^{m-1+h} [v_{r-i,0}] + \sum_{i=1}^{m+n-1} M_{i,0}^{m-1+h} u_{r-i,0}^h \Big|_{t=0} \end{aligned} \right.$$

ここで $N_{i,0}^K, M_{i,0}^K$ は ∂_t のみの i 位の常微分作用素である。

次に一般の $s \geq 1$ の場合。

$$M_{u,s} = \sum_{r=-l-(s+1)(m-1)-n}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m+n-1} M_i [v_{r+m+n-1-i,s}] f_r(x) + \sum_{i=0}^{m+n-1} M_i [w_{r+m+n-1-i,s}] g_r(x) \right) \\ + \sum_{h=1}^n \sum_{r=-l-S(m-1)-n}^{\infty} \sum_{i=0}^{m+n-1} M_i^h [u_{r+m+n-1-i,s}^h] f_r(\varphi_h)$$

次の方程式を得る。

$$\begin{cases} \tilde{L}_m^{(n+r)} [v_{n+r,s+1}] = - \sum_{i=n+1}^{m+n} \tilde{L}_i [v_{m+n+r-i,s+1}] + \sum_{i=0}^{m+n-1} M_i [v_{r+m+n-1-i,s}] \\ \tilde{L}_m^{(n+r)} [w_{n+r,s+1}] = - \sum_{i=m+1}^{m+n} \tilde{L}_i [w_{m+n+r-i,s+1}] - \tilde{L}_m^{(n+r)} [v_{n+r,s+1}] + \sum_{i=0}^{m+n-1} M_i [w_{r+m+n-1-i,s}] \\ \tilde{L}_1^h [u_{n+m+r-1,s+1}^h] = - \sum_{i=2}^{m+n} \tilde{L}_i^h [u_{n+m+r-i,s+1}^h] + \sum_{i=0}^{n+m-1} M_i^h [u_{r+m+n-1-i,s}^h] \end{cases}$$

次に初期値 $v_{r,s}(0,x) \dots \partial_t^{m-1} v_{r,s}(0,x), u_{r,s}^h(0,x)$ は次の如くである。

$$\begin{cases} v_{r,s}(0,x) = \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,s}^0 v_{r-i,s} + \sum_{i=1}^{m+n} M_{i,s}^0 u_{r-i,s}^h \Big|_{t=0} \\ \partial_t^{m-1} v_{r,s}(0,x) = \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,s}^{m-1} v_{r-i,s} + \sum_{i=1}^{m+n} M_{i,s}^{m-1} u_{r-i,s}^h \Big|_{t=0} \\ u_{r,s}^h(0,x) = \sum_{i=m}^{m+n-1} N_{i,s}^{m-1+h} [v_{r-i,s}] + \sum_{i=1}^{m+n} M_{i,s}^{m-1+h} u_{r-i,s}^h \Big|_{t=0} \end{cases}$$

又初期値 $w_{r,s}(0,x) \dots \partial_t^{m-1} w_{r,s}(0,x)$ は全て 0 である。

$N_{i,s}^K, M_{i,s}^K$ は ∂_t のみの i 位の常微分作用素である。

ii) 形式解の収束性 (決田[3], C. Wagschal[1], に於て)

$$\text{(定義)} \quad k \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_k(r, \frac{1}{3}) \equiv k! / (r - \frac{1}{3})^{k+1} \\ \theta_{-k}(r, \frac{1}{3}) \equiv \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(k+n)!} \cdot \frac{3^{n+k}}{r^n} \end{array} \right. \quad \text{for } |3| < r.$$

$$\gamma_{j,k}(R, r, \frac{1}{3}) \equiv \left(\frac{d}{dx} \right)^j [\theta_0(R, \frac{1}{3}) \theta_k(r, \frac{1}{3})] \quad (R > r > |3|)$$

(定義) a, b を $n+1$ 変数 $z = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ の形式的巾級数とする

b が a の優級数である時 (つまり $a \equiv \sum a_\alpha z^\alpha$, $b \equiv \sum b_\alpha z^\alpha$ で $|a_\alpha| \leq b_\alpha$ が成立する時) $a \ll b$ とかく。

Lemma 1 ① $\frac{d}{dz} \theta_k(r, z) = \theta_{k+1}(r, z)$

② $\theta_k(r, z) \ll r \theta_{k+1}(r, z)$

③ $\frac{1}{R-z} \theta_k(r, z) \ll \frac{1}{R-r} \theta_k(r, z) \quad (k \geq 0) \quad R > r$

④ $\frac{1}{R-z} \theta_{-k}(r, z) \ll \frac{T^{k+1}}{R} \theta_{-k}(r, z) \quad (k \geq 0)$

(但し, ここで $R \geq 4r$, $z \leq r$, T は R, r, k は無関係な定数 ≥ 2)

⑤ $\frac{d}{dz} \eta_{j,k}(R, r, z) = \eta_{j+1,k}(R, r, z) \quad R > r$

⑥ $\eta_{j,k}(R, r, z) \ll r \eta_{j+1,k}(R, r, z) \quad R > r$

⑦ $\eta_{j,k}(R, r, z) \ll \eta_{j+1,k-1}(R, r, z) \quad R > r$

⑧ $\frac{1}{R'-z} \eta_{j,k}(R, r, z) \ll \frac{1}{R'-R} \eta_{j,k}(R, r, z) \quad (R' > R > r)$

⑨ $\sigma \eta_{j,-s}(R, r, z) \ll 4R \eta_{j,-s+1}(R, r, z) \ll 4R \eta_{j+1,-s}(R, r, z)$

(但し, $s \geq 0$, $\sigma = 0, 1, 2, \dots, s$) $R > r$.

Lemma 2 $A \equiv \sum_{\substack{j \leq m-1 \\ |u|+j \leq m}} a_{u,j}(t,x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^u \frac{\partial}{\partial t}^j$ とする。

ここで $a_{u,j}(t,x)$ は (t,x) の形式的中級数。

* $\hat{A} \equiv \sum_{\substack{j \leq m-1 \\ |u|+j \leq m}} \tilde{a}_{u,j}(t,x) \partial_x^u \partial_t^j$

$\tilde{a}_{u,j}(t,x)$ は (t,x) の形式的中級数で $\tilde{a}_{u,j} \gg a_{u,j}$

* $f(t,x), F(t,x)$ を共に (t,x) の形式的中級数で $F \gg f$ とする。

* $y_k(x) (k=0, \dots, m-1)$ を x のみの形式的中級数とする。

$\Rightarrow$ この時次の Cauchy 問題に対し一意な形式的中級数の解 $y(x)$ が存在する。

$$\begin{cases} \partial_t^m y = A[y] + f \\ \partial_t^k y|_{(0,x)} = y_k(x) \quad (k=0, \dots, m-1) \end{cases}$$

更に Y を次をみたす (t, x) の形式的中級数とする

$$\begin{cases} \partial_t^m Y \gg \tilde{A}[Y] + F \\ \partial_t^k Y|_{(0,x)} \gg y_k(x) \end{cases}$$

この時 $Y(t, x) \gg y(t, x)$ である。

Lemma 3 $A(t, x, \partial_t, \partial_x)$: $|x+t| \leq R'$ で解析的な係数をもつ m 次の微分作用素 ∂_t に関して m 次とする。この時次が成立。

$$u \ll \gamma_{j,k}(R, r, \xi) \quad \xi = \rho t + x, \quad R' > R > r > |\xi|, \quad \rho \geq 1 \\ \Rightarrow \exists B(A, R, R', r \text{ に関する定数}) \quad Au \ll B \rho^{m_t} \gamma_{j+m,k}(R, K, \xi)$$

以上の Lemma を使うと ρ と j による帰納法により次が成立。

Proposition

$$v_{p,s}(t, x), w_{p,s}(t, x), u_{p,s}^R(t, x) \ll B(l) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2p+ms} \gamma_{n+2l+2p+2(m+1)s, -2ms-p-n-2l}^{\quad}(R, r, \xi)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{"こゝで", } \xi = \rho t + x, \text{ で } R > r \text{ は充分なる定数} \\ p(\geq 1) \text{ は充分大なる定数で, } l \text{ と共に大きくなる。} \\ B(l): R, r, l, K \text{ に関する定数,} \\ \varepsilon (0 \leq \varepsilon < 1) \text{ は, } R, r, K \text{ に関する定数.} \end{array} \right)$$

この Proposition により $v_{p,s}, w_{p,s}, u_{p,s}^R$ が共通の存在領域を

かつ事が云えた。定理は Lemma 1 の ③ と ④ に注意する事により云える。

参考文献

*Y. 浜田

- [1] The Singularities of the Solutions of the Cauchy Problem
Publ. RIMS, Kyoto University Vol 5, (1969) pp 24-40
- [2] On the Propagation of Singularities of the Solutions of the Cauchy Problem
Publ. RIMS, Kyoto University Vol 6 (1970) pp 357-384
- [3] Problème analytique de Cauchy à Caractéristiques multiple dont les Données de Cauchy Ont des Singularités Polaires. C.R. Acad. Sc. Paris, t 276, 1973, Série A, pp 621-3

*S. 溝口

- [1] Solutions nulles et Solutions non analytiques
J. Math. Kyoto Univ. 1-2 (1962) pp 271-302.

* J.-C. De Paris

- [1] Problème de Cauchy Analytique à Données Singulières pour Un Opérateur...
J. Math. pures et appl. 51 (1972) p.p 465-488.

* C. Wagschal

- [1] Problème de Cauchy Analytique à Données Méromorphes
J. Math. pure et appl. 51 (1972) p.p 375-397.