

標準模型を越えるための一つの試み 水平対称性と質量行列

曾我見 郁夫 (Ikuo S. Sogami)、小西 康文 (Yasufumi Konishi)

京都産業大学 益川塾、〒 603-8555 京都市北区上賀茂

Maskawa Institute, Kyoto Sangyo University, Kyoto 603-8555

概要

パウリ代数の中心拡大によって生成された水平対称性をもつゲージ場理論から導出されるディラック型の質量行列を考察する。荷電フェルミオンの質量とクォークのフレーバー混合行列に対する観測データを用いた数値解析を通して、質量行列の中の未知パラメータの値が決定され、湯川相互作用定数の間に興味深い関係が見出される。

1 はじめに

素粒子の標準模型は、湯川相互作用にいかなる関係も与えない。そのため、基本フェルミオン族の各荷電セクターには、湯川相互作用定数として 9 個の未知の複素数が存在することになる。それらの未知量に秩序を与える一つの方法は、3 世代の基本フェルミオンの間に“水平対称性 (H 対称性)”と名付けられる対称性を課すことである。筆者たちは、新しい H 対称性を実現する連続群を仮定し、その群の上にゲージ場理論を構成する試み [1][2]を行ってきた。その理論では、パウリ代数の一つの中心拡大によって生成されるリー群を、H 対称性と同定している。この群は、クォーク族とレプトン族の混合行列の分析から見出されたもの [3, 4]である。代数は 4 個の元からなり、階層的質量スペクトルを生成するデモクラティック行列 [5]を、中心元として選ぶ。

このような試みが成功するためには、理論から低エネルギー領域で導出される質量行列 M_f が、基本フェルミオン族の質量スペクトルとフレーバー混合行列に関する観測データを適切に記述しなければならない。ゲージ場理論の構成は引用文献 [1][2]に譲り、この報告では、クォーク族に関して蓄積されて来たデータを理論が与える質量行列を用いて解析した結果を吟味する。

質量行列 M_f は、非エルミート型であり、4 個の未知の複素パラメータを含む。荷電セクター f に関する情報を推定するためには、エルミート行列 $M_f M_f^\dagger$ の固有値問題を解かなければならない。注意すべき点は、この問題に含まれる不特定量が 10 個にまで減少できることである。他方、クォークセクターには、6 個の質量とフレーバー混合行列に含まれる 4 個のパラメータに関する実験データがある。したがって、それらの実験データを使って数値解析をすることにより、10 個の実パラメータの値を決定することができる。その結果から、湯川相互作用定数の間に興味ある関係が見出される。

2 水平対称性と湯川相互作用

H 対称性を支配するリー群は、独立な 4 個の元から成る代数によって生成される。それらの生成元は、ゲルマン行列 λ_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) の線形結合によって

$$\begin{aligned} \check{D} &= \frac{1}{3}(I + \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6), \quad \check{\tau}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6), \\ \check{\tau}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_7), \quad \check{\tau}_3 = \frac{1}{3}(-2\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6 + \sqrt{3}\lambda_8) \end{aligned} \quad (1)$$

のように構成 [1] される。これらの生成元は、積法則

$$\check{\tau}_j \check{\tau}_k = \delta_{jk} (I - \check{D}) + i \epsilon_{jkl} \check{\tau}_l, \quad (2)$$

$$\check{D} \check{\tau}_j = \check{\tau}_j \check{D} = 0 \quad (3)$$

を満たす。明らかに、代数

$$\check{\mathcal{A}} = \{\check{D}, \check{\tau}_1, \check{\tau}_2, \check{\tau}_3\} \quad (4)$$

は、デモクラティック行列 $\check{D}$ を中心とするパウリ代数の中心拡大である。この代数からの指数関数写像によって、H 対称性のリー群は

$$\check{G}(\check{\mathcal{A}}) = \left\{ \Omega(\vartheta) = \exp \left(i\vartheta_0 \check{D} + i \sum_{j=1}^3 \vartheta_j \check{\tau}_j \right) : \vartheta_0, \vartheta_j \in \mathbb{R} \right\} \quad (5)$$

の如く生成される。リー群 $\check{G}(\check{\mathcal{A}})$ は部分群

$$SU_H(2) = \left\{ \Omega_2(\vartheta) = \exp \left(i \sum_{j=1}^3 \vartheta_j \check{\tau}_j \right) : \vartheta_j \in \mathbb{R} \right\} \quad (6)$$

および

$$U_H(1) = \left\{ \Omega_1(\vartheta_0) = \exp(i\vartheta_0 \check{D}) : \vartheta_0 \in \mathbb{R} \right\} \quad (7)$$

をもつ。デモクラティック行列 $\check{D}$ の固有ベクトル

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

は、以下の分析で有効に活用される。

この H 対称性の基本表現は、スピノール 3 重項を形作る。そのような任意の 3 重項を T とすると、その成分の和

$$\{\{T\}\} = \sum_{i=1}^3 T_i = \sqrt{3} \langle 3|T \rangle \quad (9)$$

は、部分群 $SU_H(2)$ の変換の下で不変である。この特性は、湯川相互作用の構成で、重要になる。

H 対称性が成り立つ高エネルギー領域では、3世代のフェルミオン族は群 $\check{G}(\check{A})$ のスピノール 3 重項

$$\Psi_h^f(x) = \check{i} \left(\psi_{h1}^f(x), \psi_{h2}^f(x), \psi_{h3}^f(x) \right) \quad (10)$$

を構成すると要請する。ここで f は電弱多重項 $(q, u, d; l, \nu, e)$ を識別し、 h はカイラル成分 (L, R) を区別する。すなわち、 $\Psi_L^f (= \Psi_L^q, \Psi_L^l)$ は電弱 2 重項より成る H 3 重項であり、 $\Psi_R^f (= \Psi_R^u, \Psi_R^d, \Psi_R^e)$ は電弱 1 重項の H 3 重項である。また、記号 $\check{i}$ は H 対称性の自由度に関する転置演算を表す。

この理論では、標準模型に H 対称性を付与するために、高エネルギーと低エネルギーの二つのスケールが存在しなければならない。それらを $\check{v}$ および v と表す。高エネルギースケール $\check{v}$ で、H 対称性を破るためには、電弱 1 重項より成る H 3 重項のヒッグス場が必要となる。このヒッグス場は、マジョラナ型の相互作用を除いては、フェルミオン族と相互作用することはない。高エネルギー領域での対称性の破れは引用文献 [1] に譲り、ここでは論じない。低エネルギースケール v で、電弱対称性を破るためには、三組の電弱 2 重項 $\Phi_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$) が

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \check{i} (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)) \\ &= \check{i} \left(\begin{pmatrix} \phi_1^+(x) \\ \phi_1^0(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_2^+(x) \\ \phi_2^0(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_3^+(x) \\ \phi_3^0(x) \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

のように、H 3 重項のヒッグス場 Φ を構成すると要請する。さらに、このヒッグス場に付随して、 $\tilde{\Phi} = (i\check{\tau}_2)(i\tau_2)\Phi^*$ と定義される場を導入する。二つの場 Φ および $\tilde{\Phi}$ は水平対称性と電弱対称性の下で、同じ変換性をもつ。

湯川相互作用のラグランジュアン密度 $\mathcal{L}_Y^f$ は、ヒッグス 3 重項 Φ と $\tilde{\Phi}$ を含む不変量の和によって構成される。すなわち、電弱アップセクター ($f' = q, f = u$) および ($f' = l, f = \nu$) については

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^f &= Y_{f1} \bar{\Psi}_L^{f'} i\tau_2 \{\{\Phi^*\}\} \Psi_R^f + Y_{f2} \bar{\Psi}_L^{f'} \tilde{\Phi} \{\{\Psi_R^f\}\} \\ &\quad + Y_{f3} \{\{\bar{\Psi}_L^{f'}\}\} \check{i} \tilde{\Phi} i\check{\tau}_2 \Psi_R^f + Y_{f4} \{\{\bar{\Psi}_L^{f'}\}\} i\tau_2 \{\{\Phi^*\}\} \{\{\Psi_R^f\}\} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (12)$$

である。また、電弱ダウンセクター ($f' = q, f = d$) および ($f' = l, f = e$) については

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^f &= Y_{f1} \bar{\Psi}_L^{f'} \{\{\Phi\}\} \Psi_R^f + Y_{f2} \bar{\Psi}_L^{f'} \Phi \{\{\Psi_R^f\}\} \\ &\quad + Y_{f3} \{\{\bar{\Psi}_L^{f'}\}\} \check{i} \Phi i\check{\tau}_2 \Psi_R^f + Y_{f4} \{\{\bar{\Psi}_L^{f'}\}\} \{\{\Phi\}\} \{\{\Psi_R^f\}\} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (13)$$

である。これらの表式で、 Y_{fi} ($i = 1, \dots, 4$) は、湯川相互作用定数である。

3 ディラック型質量行列

この理論では、対称性の破れは二段階で引き起こされる。ここでは、高エネルギーでの H 対称性の破れの効果が (12) および (13) に実効的に取り込まれると見なす。すなわち、それらの式で、湯川相互作用定数 Y_{fi} ($i = 1, \dots, 4$) は、高エネルギースケールでの H 対称性の破れの効果を含む有効定数であると解釈する。また、低エネルギー領域での電弱対称性の破れについては、(11) のヒッグス場の第 3 中性成分が値 $\langle \phi_3^0 \rangle = v = 246 \text{ GeV}$ をとると仮定する。その結果、(12) および (13) はディラック質量をもつフェルミオン場の有効ラグランジュアン密度

$$\mathcal{L}_M^Y = \sum_{f=u,d} \bar{\Psi}_L^f \mathcal{M}_f \Psi_R^f + \sum_{f=\nu,e} \bar{\Psi}_L^f \mathcal{M}_f \Psi_R^f + \text{h.c.} \quad (14)$$

に帰着する。ここで、 Ψ_L^f と Ψ_R^f は繰り込み効果を含む有効なフェルミオン場であり、 $\mathcal{M}_f$ はディラック質量行列である。アップセクター ($f = u, \nu$) では、質量行列は

$$\mathcal{M}_f = a_f I + \frac{1}{\sqrt{3}} b_{f1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} b_{f2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + c_f \check{D} \quad (15)$$

となる。ここで、質量行列に含まれる係数は有効湯川相互作用定数とスケール v を用いて、 $a_f = Y_{f1} v$, $b_{f1} = -Y_{f2} v$, $b_{f2} = Y_{f3} v$, および $c_f = 3Y_{f4} v$ と表される。また、ダウンセクター ($f = d, e$) にたいしては、質量行列は

$$\mathcal{M}_f = a_f I + b_{f1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} b_{f2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c_f \check{D} \quad (16)$$

となる。ここで、 $a_f = Y_{f1} v$, $b_{f1} = Y_{f2} v$, $b_{f2} = Y_{f3} v$, および $c_f = 3Y_{f4} v$ である。非エルミート行列 $\mathcal{M}_f$ を対角化するには、双ユニタリー変換

$$V_L^{f\dagger} \mathcal{M}_f V_R^f = \mathcal{M}_{f\text{diagonal}} \quad (17)$$

を施さなければならない。質量固有値と対角化行列 V_L^f を決定するためには、エルミート行列 $\mathcal{M}_f \mathcal{M}_f^\dagger$ の固有値問題

$$\mathcal{M}_f \mathcal{M}_f^\dagger |v^{(f)i}\rangle = m_i^{(f)2} |v^{(f)i}\rangle \quad (18)$$

を解かなければならない。クォーク族に対する混合行列は、固有ベクトル $|v^{(f)i}\rangle$ を用いて

$$V = V_L^{u\dagger} V_L^d = (\langle v^{(u)i} | v^{(d)j} \rangle) \quad (19)$$

と定められる。ただし、固有ベクトルは質量の大きさの順序で配列されているものとする。

4 2乗質量の固有値問題

行列 $\mathcal{M}_f \mathcal{M}_f^\dagger$ に対する固有値問題を解くには、(8) 式の基底を用いて、(18) の固有ベクトルを

$$|v^{(f)}\rangle = x_f|1\rangle + y_f|2\rangle + z_f|3\rangle \quad (20)$$

のように展開する。アップクォーク族については、(18) は $|v^{(u)}\rangle$ の係数に対する方程式

$$\begin{pmatrix} |a_u|^2 + 2|b_{u1}|^2 & 0 & \sqrt{2}C_u^*b_{u1} \\ 0 & |a_u|^2 & -\sqrt{2}a_ub_{u2}^* \\ \sqrt{2}C_ub_{u1}^* & -\sqrt{2}a_ub_{u2}^* & |C_u|^2 + 2|b_{u2}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = m_u^2 \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \quad (21)$$

となる。ここで、 $C_u = c_u + a_u$ とおいた。同様に、ダウンクォーク族については、 $|v^{(d)}\rangle$ の係数に対する方程式

$$\begin{pmatrix} |a_d|^2 & 0 & \sqrt{2}a_db_{d2}^* \\ 0 & |a_d|^2 + 2|b_{d1}|^2 & -\sqrt{2}C_d^*b_{d1} \\ \sqrt{2}a_d^*b_{d2} & -\sqrt{2}C_db_{d1}^* & |C_d|^2 + 2|b_{d2}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix} = m_d^2 \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix} \quad (22)$$

を得る。ここで、 $C_d = c_d + a_d + b_{d1}$ である。

これらの式は、8個の実数パラメータ $|a_f|$, $|b_{f1}|$, $|b_{f2}|$, $|C_f|$ と4個の位相を含む。質量固有値は実数パラメータで表されるが、固有ベクトルは位相にも依存する。混合行列は、(19) のように固有ベクトルの内積によって定まり、位相差のみに依存する。したがって、理論は10個の未知パラメータを含むことになる。これは、実験によって決定される6種類のクォーク質量と混合行列の4個のパラメータの和と等しい。

固有値問題 (21) および (22) は、同じ形の固有方程式

$$s^3 - (|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2)s^2 - 2(|ab|^2 - 2|b_1b_2|^2)s + 4|ab_1b_2|^2 = 0 \quad (23)$$

をもつ。ここで、セクターの添え字 $f (= u, d)$ は省略し、変数は $s = m^2 - |a|^2$ と選び、 $|b|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2$ と略記した。

この方程式をカルダーノの方法で解くと、二乗質量が

$$\begin{aligned} m_1^2 &= |a|^2 + \frac{1}{3} (|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2) \left[1 + 2\sqrt{1+\delta} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right], \\ m_2^2 &= |a|^2 + \frac{1}{3} (|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2) \left[1 + 2\sqrt{1+\delta} \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right], \\ m_3^2 &= |a|^2 + \frac{1}{3} (|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2) \left[1 + 2\sqrt{1+\delta} \cos\theta \right] \end{aligned} \quad (24)$$

のように決定される。ここで

$$\delta = 6 \frac{|a|^2|b|^2 - 2|b_1b_2|^2}{[|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2]^2} \quad (25)$$

である。パラメータ θ は方程式

$$\tan 3\theta = \frac{\sqrt{|D|}}{2P^3 + 3PQ - 4} \quad (26)$$

から決まる。ここで

$$D = -16P^3 - 3P^2Q^2 - 24PQ - 4Q^3 + 16 \quad (27)$$

であり、 P および Q は無次元の量であり

$$P = \frac{1}{3} \frac{|C|^2 - |a|^2 + 2|b|^2}{|ab_1b_2|^{\frac{2}{3}}}, \quad Q = \frac{2}{3} \frac{|a|^2|b|^2 - 2|b_1b_2|^2}{|ab_1b_2|^{\frac{4}{3}}} \quad (28)$$

と定義される。

$|C|$ が大きくなると θ は小さくなる。したがって、公式 (24) から明らかなように、 $|C|$ が十分大きいパラメータ領域でクォーク質量は階層的なスペクトル構造をもつ。ここで、符号 $\theta > 0$ ($\theta < 0$) に応じて、二乗質量の順序が $m_1^2 < m_2^2 < m_3^2$ ($m_2^2 < m_1^2 < m_3^2$) となることに注意しなければならない。数値解析によれば、ダウンクォーク (d, s, b) に $\theta > 0$ の解、アップクォーク (u, c, t) に $\theta < 0$ の解を採用する場合にのみ、混合行列の測定値が再現される。

5 数値解析：湯川相互作用定数の決定

数値解析を行うために、 Z ボソンの質量スケール $m_Z = 91.2 \text{ GeV}$ でのクォーク質量を用いることにする。繰り込み群方程式を利用することにより、そのスケールでの質量は [7]

$$\begin{aligned} m_u &= 1.27^{+0.50}_{-0.42} \text{ MeV}, & m_c &= 0.619 \pm 0.084 \text{ GeV}, & m_t &= 171.7 \pm 3.0 \text{ GeV}, \\ m_d &= 2.90^{+1.24}_{-1.19} \text{ MeV}, & m_s &= 55^{+16}_{-15} \text{ MeV}, & m_b &= 2.89 \pm 0.09 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (29)$$

と計算されている。

これらの質量値を用いて、素粒子データグループ [6] の混合行列にたいする数値解析を行った結果、最適値を与えるパラメータの値が表 1 のように求められた。これらのパラメータから再現されるクォーク族の混合行列の絶対値と CP の破れに対するヤールスコッグ不変量 J は

$$|V| = \begin{pmatrix} 0.974210 & 0.225705 & 0.003595 \\ 0.225473 & 0.973343 & 0.041511 \\ 0.008723 & 0.040746 & 0.999132 \end{pmatrix}, \quad J = 3.1 \times 10^{-5} \quad (30)$$

のように与えられる。

表 1: 8 パラメータの最適値 (MeV)

	$ a_f $	$ b_{f1} $	$ b_{f2} $	$ C_f $
アップ ($f = u$)	30.4	831	63800	146000
ダウン ($f = d$)	13.2	92.1	818	2650

表 1 は、実パラメータが階層的な序列 $|a_f|^2 \ll |b_{f1}|^2 \ll |b_{f2}|^2 \ll |C_f|^2$ をもつことを示している。そして、パラメータの間に近似的な関係

$$\frac{|b_{u1}|}{|b_{d2}|} \sim 1, \quad \frac{|b_{d2}|}{|b_{d1}|} \sim 9^1, \quad \frac{|b_{u2}|}{|b_{u1}|} \sim 9^2 \quad (31)$$

が見出され、湯川相互作用定数が

$$\frac{|Y_{u2}|}{|Y_{d3}|} \sim 1, \quad \frac{|Y_{d3}|}{|Y_{d2}|} \sim 9^1, \quad \frac{|Y_{u3}|}{|Y_{u2}|} \sim 9^2 \quad (32)$$

のような関係をもつことが分かる。

質量行列 M_f のパラメータ c_f は、エルミート行列 $M_f M_f^\dagger$ のパラメータ $|C_f|$ の中に、 $C_u = c_u + a_u$ および $C_d = c_d + a_d + b_{d1}$ としてのみ現れる。しかし、表 1 で明らかなように、 $|C_u|^2 \gg |a_u|^2$ 、 $|C_d|^2 \gg |a_d|^2, |b_{d1}|^2$ であるから、よい近似で $|c_u| \approx |C_u|$ および $|c_d| \approx |C_d|$ と評価することが許される。その結果、表 1 から、クォークセクターのすべての湯川相互作用定数が、表 2 のように決定される。

表 2: 湯川相互作用定数

	$ Y_{f1} $	$ Y_{f2} $	$ Y_{f3} $	$ Y_{f4} $
アップ ($f = u$)	1.2×10^{-4}	3.4×10^{-3}	2.6×10^{-1}	2.0×10^{-1}
ダウン ($f = d$)	5.4×10^{-5}	3.7×10^{-4}	3.3×10^{-3}	3.6×10^{-3}

6 議論

「パウリ代数の中心拡大によって生成された水平対称性を用いたゲージ場理論」から導出された (15) および (16) の質量行列を考察した。4 個の複素数の未知パラメータを含む質量行列 M_f からエルミート型に組み合わせられた行列 $M_f M_f^\dagger$ は 4 個の実数と 2 個の位相に依存している。この事実により、6 個のクォーク質量と 4 個のパラメータをもつ混合行列の問題を数値的に解析することができた。

入力値として観測量である質量を利用しパラメータを調節することによって、フレーバー混合行列の観測値を再現し、湯川相互作用定数の値を決定することができた。フレーバー対称性をもつ理論で、クォークのフレーバー混合行列の観測値を説明することは容易ではない [8]。それゆえ、ここでの解析の結果は、「パウリ代数の中心拡大によって生成された水平対称性」のゲージ場理論 [1] が、フレーバー物理に対する有効な現象論を与ええる基本的な枠組みであることを示している。

数値解析の結果から、湯川相互作用定数の絶対値が表 2 のように決定され、(32) のような興味深い関係が見出された。それらの関係に対する物理的な意味を明らかにすることは、今後の課題である。

参考文献

- [1] I. S. Sogami, Prog, Theor. Phys. **122** (2009), 807.
- [2] Y. Konishi and I. S. Sogami, Prog, Theor. Phys. **123** (2010), 271.
- [3] I. S. Sogami, Prog. Theor. Phys. **114** (2005), 873; **115** (2006), 461.
- [4] I. S. Sogami and Y. Konishi, Prog. Theor. Phys. **119** (2008), 339.
- [5] H. Harari, H. Haut and J. Weyers, Phys. Lett. B **78** (1978), 459.
Y. Koide, Phys. Rev. D **28** (1983), 252; D **57** (1998), 4429.
- [6] C. Amsler et al. (Particle Data Group), Phys. Lett. B **667** (2008), 1.
- [7] Z. Z. Xing, H. Zhang and S. Zhou, Phys. Rev. D **77** (2008), 113016.
- [8] Y. Koide, Phys. Rev. D **71** (2005), 016010.