

$$K\text{-エントロピー} < \text{トポロジカル-エントロピー} < \log 2$$

なる関係が成立するものと思われる。

最後に、さきの指数 τ とアトラクタのハウスドルフ次元 α_c との関係についてのべる。 n 個のスピン変数の組によってもとの座標平面は 2^n 個の部分領域に分割されるが、上にのべた結果より、そのうちの $N(n)$ 個だけでアトラクタをおおうことができる。部分領域の代表的な直径を $R(n)$ とする。もし十分大きな n について、 $R(n) \sim R_0 e^{-\beta \cdot n}$ となるならば、アトラクターの全体積は

$$N(n) \cdot (R(n))^\alpha \sim e^{\tau \cdot n} \times (e^{-\beta \cdot n})^\alpha = e^{(\tau - \beta \cdot \alpha)n}$$

となり、アトラクタの臨界次元 α_c は

$$\alpha_c = \tau / \beta$$

となる。

参 考 文 献

- 1) M. Hénon & Y. Pomeau, *Lectur Notes in Math.*, No. 565 (Springer, 1976).
- 2) C. Simo, *J. Stat. Phys.* **21**–4 (1979).
- 3) I. Shimada, *Prog. Theor. Phys.* **62**–1 (1979).
- 4) R. Lozi, *Intrinsic Stochasticity in Plasmas* (Editions de Physique, Orsay, 1979).

Lorenz 系 の 分 岐 構 造

京大・理 富田和久・津田一郎

§ 1 はじめに

力学系の構造安定相は必ずしも 1 種に限らず、制御パラメーターの値を変えていけば、1 つの相から他の相への分岐現象 (bifurcation phenomena) が見られる。ここでは、特にいわゆるカオスの出現につながっていくような分岐を念頭において考察をすゝめたい。

個々の分岐現象の機構については、従来、諸種の研究がある。例えば単一流域の問題の場合

- 1) pitchfork 分岐 : sub-harmonic cascade

2) tangent 分岐: incommensurate であり, いわゆる間欠性につながっている。

また, 多流域の場合

3) homoclinic condition の出現: delocalization の発生, もしくは消滅がみられる。

等が知られている。

しかし乍ら, 制御パラメーターの広い範囲にわたって得られる一連の分岐の相互関係, すなわち, 相図の大局的構造を論じた例はあまりないように思われる。

我々は, 以前, Belousov-Zhabotinsky 反応において, 反応物質の流速を変化させていく時にあらわれる興味深い相図の大局的構造を, 簡単な 1 次元模型を導いて再現することを試みた¹⁾が, 今回は, 流体における対流現象の原型として知られる Lorenz 系について, レーリー数 r を変化させていく時にあらわれる相図の大局的構造を直接に与えるような, 1 次元的模型 (ロレンツ写像) を提唱する²⁾

言うまでもなく, すべての性質は系を支配する方程式に含まれているはずであるが, 方程式をみただけで, 例えば, 相図の構造を思い浮べることは必ずしも容易でない。そこで模型を考える訳であるが, その際方針として, 制御パラメーターの変化に対して, 殆んど変化を示さぬような系の本質的な自由度と, パラメーターの値に応じて敏感な変化を示すような自由度とを分離することを試み, 両者の関係を論ずることにより, 実際に見出される現象の全体に対する見通しを得ようとするのである。

カオスが問題になるような場合, 一般に多自由度の系を扱うことは容易でないが, 系の接空間においてみた流れの固有値が 1 次元的特徴を具えている場合がしばしばみられ, この様な場合には, 軌道の Poincaré 断面が近似的に 1 次元多様体となるので, 上記のような方針をもって, 1 次元的模型から相図の大局的特徴を導くことが出来る。

§ 2 Lorenz 系

周知のように Lorenz 系の方程式は

$$dx/dt = \sigma(y - x)$$

$$dy/dt = rx - y - xz$$

$$dz/dt = -bz + xy$$

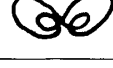
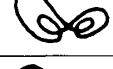
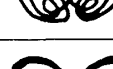
で与えられるが, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ とし, r を変化させて ($1 < r < 500$) えられる相図の大体の特徴は第 1 表に要約される。(Mode 記号の意味は表に伴う説明をみられたい。)

今, Poincaré 断面としては $z = r - 1$ なる面をとり, 軌道が z の増加する方向にこの面を切る

表1 Lorenz系の分岐構造

$\sigma = 16.0$, $b = 4.0$ として r を変化させた。 $\pi^s(n, n) \rightarrow \pi^a(n, n)dc \rightarrow \chi(n) \rightarrow \pi^s(n+1, n+1)$ ($n \leq 3$) の移行をしめしてある。

$\pi^s(n, n)$ ($\pi^a(n, n)$) は各 domain で n loop を描いた後、相手の domain に移る対称的 (非対称的) 軌道を示している。 χ は chaotic な軌道を示している。

SIMULATION				MODEL
r	r^{-1}	MODE	SCHEMATIC PROFILE IN x - z PLANE	($a=2$) x_M
525	$\times 10^{-3}$ 1.9	$\pi^s(1,1)$		
500	2.0	$\pi^a(1,1)$		0.616
355	2.816	$\chi(1)$		
245	4.081	$\pi^s(2,2)$		0.75
235	4.225	$\pi^a(2,2)$		
219	4.566	$\chi(2)$		
137.5	7.273	$\pi^s(3,3)$		1.0
136	7.353	$\chi(3)$		
102.81	9.726	$\pi^s(4,4)$		1.25
33.45	29.9	χ		

点の軌跡 ($c, \bar{c}$) をみると、畧々線状の集合を形成するので、これを x 座標でパラメトライズして、1 次元的なロレンツ表示をつくることが出来る。この際、 z 軸に関する対称性に注目して、 $\phi: c \rightarrow \bar{c}$ なる写像を考察するのが最も簡単である。そこで、この写像に関して、シミュレーションの結果を要約すると、次のようになる。

I. r に依存しない性質 (不変特性)

- (1) 不変多様体 c の広がり $d \equiv x_M - x_\mu$

$$d \sim x_f = \sqrt{b(r-1)} \quad (r \gg 1 \text{ の場合})$$

(2) 鞍点 0 からみて, c 上の 1 番遠い点は ϕ によって $\bar{c}$ 上の 1 番近い点に写像される。

(3) 写像関数 ϕ は, $\text{mod } 4$ を除き, r に依存しない簡単な形をしている。

II. r に依存する振舞 (分岐構造)

- (1) $r \rightarrow \infty$ $\pi^s(1, 1)$
 $\downarrow$
 (2) r を減じていくと $\pi^a(1, 1), \bar{\pi}^a(1, 1)$
 $\downarrow$
 順次右のように変る $\chi(1)$
 $\downarrow$
 $\pi^s(2, 2)$
 $\downarrow$
 以上をくりかえす ($\pi^s(4, 4)$ まで)

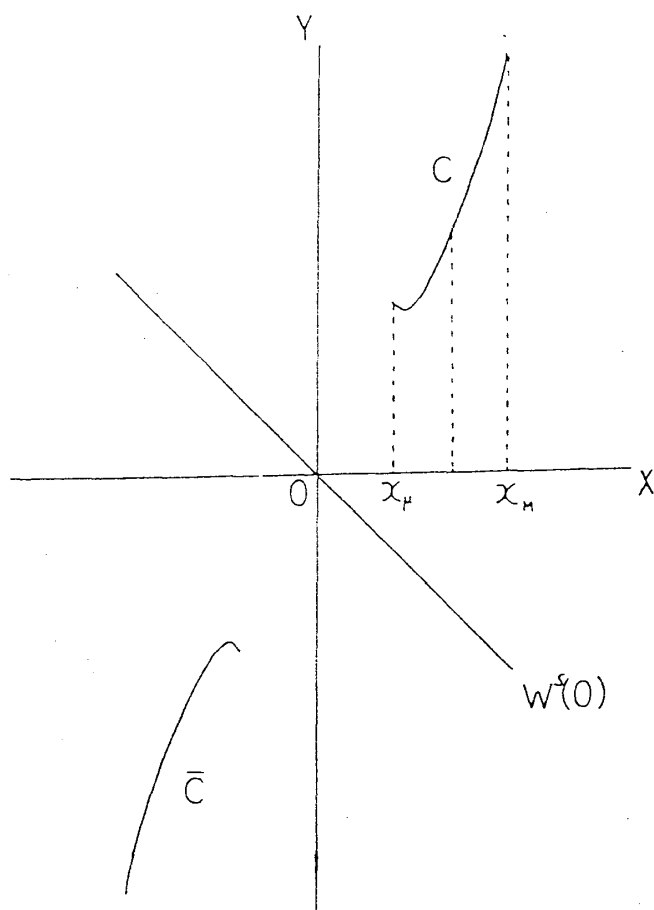


図1 Poincaré 断面図 (模式図)

$z = r - 1$ の面を z の増加する方向に軌道が切る点の軌跡 ($c, \bar{c}$) を示す。 z 軸周に対称性があるので, c と $\bar{c}$ は 180° まわせば互いに重なる関係にある。

$x_M, (x_\mu)$ は c の x 座標の最大値 (最小値) を示す。

(3) r を減ずると共に

写像関数 ϕ は

- (a) slope の絶対値が増加し,
- (b) mode 4 で jump があらわれ,
- (c) 周期運動 (π) が不安定化してカオス (χ) があらわれる。

§ 3 1 次元模型とこれよりえられる結果

以上の結果を考慮に入れて、次の模型をつくる。

- (1) 普遍的な写像関数 $\phi: c \rightarrow \bar{c}$ をえらぶ ($\leftarrow I(3)$)
- (2) 不変多様体の広がり 4 を一定 ($=1$) と仮定する ($\leftarrow I(1)$)
- (3) ϕ を限定する基本的正方形 S の端点 $(1, 0)$ は必ず曲線 ϕ 上にある。 ($\leftarrow I(2)$)
- (4) 以上の条件の下で ϕ に沿って残る 1 つの自由度 x_0 を parameter r (レーリー数にあたる) と対応させる。
- (5) 不連続点の移動が物理的変化の意味をもつために、 ϕ は非線型でなければならないが、最低次として ϕ を x についての 2 次関数にえらぶ。

この様な模型は基本的正方形に関して表示すれば

$$\eta = f(\xi) \equiv a \{ x_M^2 - (1 - \xi - x_M)^2 \} \pmod{1}$$

となる。

この様な写像関数においては $\pi^s(n, n)$ なるモードが安定に存在する領域を解析的に決定することが出来るが、さらにこれよりえられる分岐の大局的構造は、 x_M を増していくと、次のごとく順次に変化する。

- (1) $\pi^s(n, n)$ が安定に存在する
- (2) pitchfork 分岐を起して、 $(\pi^a(n, n), \bar{\pi}^a(n, n))$ があらわれる。
- (3) pitchfork が極限に達する以前に、奇数次の tangent 分岐が起り、これらが更に pitchfork 分岐を起す。
- (4) chaotic phase $\chi(n)$ があらわれ、対称性を回復する。
- (5) $\pi^s(n+1, n+1)$ があらわれる。
- (6) 以下同様にして、このような過程を繰り返す。

この様な模型の示す性質は、第 1 表と対比すれば、その類似性は明白であろう。表 1 表には r に対応する、模型の方のパラメータ x_M の数値を対応する振舞の個所にかき込んである。

§ 4 結 び

はじめに述べたように, Lorenz 系における分岐構造の全体を, 簡単な 1 次元モデルを導入することによって再現しうることを示すことが出来た。

残る問題は, 元の方程式の不変集合と 1 次元モデルとの内的関連を明らかにすることであろうが, これは将来の課題に属する。

参 考 文 献

- 1) K. Tomita and I. Tsuda, Towards the Interpretation of Hudson's Experiment on the Belousov-Zhabotinsky Reaction —Chaos due to Delocalization— Progr. Theor. Phys. **64**, 1138–1160 (1980).
- 2) K. Tomita and I. Tsuda, Toward the Interpretation of the Global Bifurcation Structure of the Lorenz System —A simple one dimensional model— Progr. Theor. Phys., Supplement, in press.