

代数函数を一般解としてもつ
線型常微分方程式の例

東大理 高野 恭一

§ 1. 序

線型 Fuchs 型常微分方程式の大域的研究において、モノドロミー群が大きな役割を果すことはよく知られている。しかし群が実際に計算できるのは非常に限られていて、昔からよく知られている Riemann の方程式、Jordan-Pochhammer の方程式（以下 J.P. と略す）と、Levelt によって 1963 年頃に計算された最近大久保謙二郎氏によって別の方法で計算された generalized hypergeometric equation（以下 G.H. と略す）などがある。これらの方程式はいずれも accessory parameters を含んでいるという事情にあることに注意したい。

モノドロミー群がわかると、それを用いて解の色々な性質を調べることが可能になる。例えば、群が有限群になる条件を求めれば、一般解が代数函数になるための条件がわかる。周知のように、これに関して Riemann の方程式に対する

Schwartz [5] の有名な仕事がある。そこで私は J. P. と G. H. についてそのモノドロミー群が有限群となるための必要十分条件を求めることを考えてみた。G. H. についてはまだ条件を出していないが、J. P. についての結果と得たので報告する。

J. P. の群が有限群であるとすれば、それは必然的に群論でいう finite unitary group generated by reflections (u. g. g. n. と略す) となることがわかる。一方 u. g. g. n. については Shephard & Todd^[6] の分類表がある。この表を使えば J. P. の群が有限群となるための条件が決定される。このように方法は全く群論的であり、Shephard-Todd の表を用いるだけだから理論的なづかしさはないが、計算は大変である。

私は有限群論について全く知らなかったので、坂内英一氏(東大)に全面的に教わりながら計算した。G. H. についての結果を得た翌別の機会に報告したい。

§ 2 Jordan-Pochhammer の方程式とその Monodromie gr.

Jordan-Pochhammer の方程式とは次の形の方程式。

$$(1) \quad Q(x)y^{(n)} - \mu Q'(x)y^{(n-1)} + \frac{\mu(\mu+1)}{2} Q''(x)y^{(n-2)} - \dots \\ - R(x)y^{(n-1)} + (\mu+1)R'(x)y^{(n-2)} - \dots = 0$$

こゝに

$$Q(x) = (x-a_1) \cdots (x-a_n),$$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{x-a_j}.$$

この方程式は $x=a_1, \dots, a_n, \infty$ 以外に特異点をもたない線型 Fuchs 型微分方程式で、各特異点における特性指数は

$$x=a_j : 0, 1, 2, \dots, n-2, \mu+n-1+\alpha_j, \quad (j=1, \dots, n)$$

$$x=\infty : -(\mu+1), -(\mu+2), \dots, -(\mu+n-1), -(\mu+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)$$

である。また (1) は

$$(2) \quad \int_{\Gamma_j} (u-a_1)^{\alpha_1-1} \cdots (u-a_n)^{\alpha_n-1} (u-x)^{\mu+n-1} du, \quad j=1, \dots, n$$

の形の基本解をもつ。但し Γ_j は $u=a_j, x$ を回る二重結びの道としておく。

基本解の積分表示があるから、(1) のモノドロミー群を計算することは容易で、(2) の被積分函数の branch や $a_1, \dots, a_n$ の並べ方、 Γ_j のとり方を適当にきめてやると、(1) のモノドロミー群は

$$(3) \quad a_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(1-\varepsilon_1), \dots, -(1-\varepsilon_{j-1}), \varepsilon_j \varepsilon_0, -\varepsilon_0(1-\varepsilon_{j+1}), \dots, -\varepsilon_0(1-\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

$j=1, \dots, n$

から生成されることが認められる [3]。i.e. $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

にて

$$(4) \quad \varepsilon_j = \exp(2\pi i \alpha_j) \quad j=1, \dots, n$$

$$\varepsilon_0 = \exp(2\pi i \mu).$$

御前憲法は [3], (1)が "rational functions & irreducible" であるため必要十分条件が.

$$(5) \quad \varepsilon_0 \neq 1, \quad \varepsilon_j \neq 1, \quad j=1, \dots, n, \quad \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \neq 1$$

であることを示した。この条件は後で用いられる。

§ 3. $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ が有限群になる条件.

定理 「(1)の群 $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ (3) が irreducible とする。
(即ち条件 (5) が満たされているとする。) このとき G が有限群となるのは、次のいずれかの場合である。

$$n=3 \quad (1) \quad \varepsilon_0 = \omega, \quad \varepsilon_j = -\omega^2 \quad j=1, 2, 3$$

$$(1)' \quad \varepsilon_0 = \omega^2, \quad \varepsilon_j = -\omega \quad j=1, 2, 3$$

$$(2) \quad \varepsilon_0 = -\omega^2, \quad \varepsilon_j = -\omega^2 \quad j=1, 2, 3$$

$$(2)' \quad \varepsilon_0 = -\omega, \quad \varepsilon_j = -\omega \quad j=1, 2, 3$$

$$(3) \quad \varepsilon_0 = -\omega^2, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_j = -\omega^2, \quad \varepsilon_k = \omega, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$$

$$(3)' \quad \varepsilon_0 = -\omega, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_j = -\omega, \quad \varepsilon_k = \omega^2 \quad "$$

$n=4$

$$(4) \quad \varepsilon_0 = -\omega^2, \quad \varepsilon_j = -\omega^2 \quad j=1, 2, 3, 4$$

$$(4)' \quad \varepsilon_0 = -\omega, \quad \varepsilon_j = \quad j=1, 2, 3, 4 \quad \perp$$

注. [1], [1]' は imprimitive $\tau \cong G(3, 1, 3)$ order = 54

- [2] $\sim$ [4] は primitive
- [1] $\sim \langle (\omega^w, 1), (1, \omega^w, \omega), (\omega^w, 1, \omega) \rangle$
- [2], [2]', [3], [3]' は Hessian gr. と呼ばれる
- [2], [2]' $\cong$ (分類表 No. 25) order = $216 \times 3 = 648$
- [3], [3]' $\cong$ (" No 26) order = $216 \times 6 = 1296$
- [4], [4]' $\cong$ (" No 32) order = $216 \times 6!$
- $n \geq 5$ のときはすべて無限群となる。

定理の証明の方針

1. a_j の固有値は $\overbrace{1, \dots, 1}^{n-1}, 1, \epsilon_j \epsilon_0$
 $a_i a_j$ の " $\overbrace{1, \dots, 1}^{n-2}, 1, \epsilon_0, \epsilon_i \epsilon_j \epsilon_0$

であることに注意する。

2. G が finite gr. ならば, G は, u. g. g. n. である。

($G = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \subset GL(n, \mathbb{C})$ が u. g. g. n. とは, $\forall a_j$ の固有値が $\overbrace{1, \dots, 1}^{n-1}, 1, 1$ の n 根 であること。)

3. $G : \text{u. g. g. n. irreducible}, \#G < \infty$ ならば G は Shephard-Todd の分類表のどれかの群と similar である。

4. 分類表の群はよくわかっている (有限群の専門家には!)

unitary reflections $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ とはかきうる! の order, それらの積の order の条件から, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon_0$ が与えたりする値が 1 に注意しながら求める。

5. 4より G が finite gr. になりうる候補者全体を、数えあがける。

6. 「 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ が finite gr. ならば G -不変な positive definite な Hermitian matrix H が存在する」
 (H が G -不変とは $\forall g \in G$ に対し $gHg^* = H$)
 という lemma を用いて、上の候補者をさうにしたい。

7. G が働く vector 空間を $\mathbb{C}^n$, $a_j \circ e_j \in$ 固有ベクトル e_j とする。 G は自然に $PGL(n, \mathbb{C})$ に落ち、 T も $\bar{G}$, e_j は $\mathbb{P}^{n-1}$ に落ち、 T も $\bar{e}_j$ とかく。

$\{ \bar{g}\bar{e}_j \in \mathbb{P}^{n-1}; j=1, \dots, n, \bar{g} \in \bar{G} \}$ を計算する。

この計算がめんどうである。これが無限ならば G は無限群であり、我々の場合には、 $\{e_j\}_{j=1, \dots, n}$ が $\mathbb{C}^n$ を張っているのだから、これが有限ならば G は有限群である。また、我々は分類表を用いて調べているので、上の計算をどうやっても続けられるという必要はない。

以上のようにして調べていけば、定理が証明される。詳しいことは講演で述べる。

文献

- [1] N. Bourbaki; Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4, 5, 6.

- [2] E. L. Ince ; Ordinary differential equations , 1926
- [3] 御前憲広 ; Pochhammerの方程式が reducible になる条件 ,
1973 (11巻論)
- [4] H. H. Mitchell , Determination of all primitive collineation
groups in more than four variables which contain homologies ,
(1914)
Amer. J. Math. 36, 1-12 ,
- [5] G. C. Shephard and J. A. Todd ; Finite unitary reflection groups ,
Can. J. Math. 6 (1954) , 274-304 ,
- [5] H. A. Schwarz ; Über diejenigen Fälle , in welchen die
Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische
Function ihres vierten Elementes darstellt , J. für die
reine und angew. Math. , 75 (1872) , 292-335 ,