

非線形拡散問題の線形近似

九州大学大学院数理学研究院 村川 秀樹 (Hideki Murakawa)
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

1 はじめに

集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ($N \in \mathbf{N}$) を境界 $\partial\Omega$ が滑らかな有界領域とし, T を正の定数, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M)$, $f = (f_1, \dots, f_M): \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^M$ は与えられた関数であるとする. 初期値 $z_0 = (z_{01}, \dots, z_{0M}): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^M$ が与えられたときに

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta \beta(z) + f(z) & \text{in } Q := \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \beta(z)}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ z(\cdot, 0) = z_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

を満たす $z = (z_1, \dots, z_M): \bar{\Omega} \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}^M$ ($M \in \mathbf{N}$) を求める初期値境界値問題を考える. 問題 (1) には, 拡散項に非線形関数 β が含まれている. この非線形性の違いにより, この問題は理工学分野における非常に多くの重要な問題を記述している. 例えば, 氷の融解・水の凝固過程を記述する Stefan 問題や地下水の流れを表す多孔質媒体流方程式などの退化放物型方程式, 更に, 2 種生物種の競合問題におけるお互いの動的な干渉作用を記述する重定-川崎-寺本モデルに代表される交差拡散系などである. この種の非線形拡散問題の解析, 特に, 数値解析において, 拡散の非線形性をどのように扱うかが問題となっている.

本研究は, 拡散の非線形性を取り除くことにより, これら非線形拡散問題の解の振る舞いを簡単に捉えようとする研究である. まず, 非線形拡散問題の解が拡散が線形である半線形反応拡散系の解により近似されることを示す. この解析は, 半線形反応拡散系に比べて格段に豊富な構造を内包していると思われる退化拡散や交差拡散を含む準線形反応拡散系のメカニズムが, 実は線形拡散と単純な反応の相互作用によって表現されることを示し

ている。反応拡散系を用いることで、拡散の非線形性を取り除くことができたため、その離散化を考えることにより非線形拡散問題に対する有用な数値解法が得られる可能性がある。本研究では、反応拡散系の半陰的離散化を考えることで、非線形問題 (1) に対する汎用的で、実装が簡単な線形解法を提出する。

本稿は次のように構成されている。次節では非線形拡散問題 (1) がどのような問題か、数値計算例を織り交ぜながら紹介する。第 3 節では、非線形拡散問題 (1) の反応拡散系近似について述べる。第 4 節に線形時間離散スキームを提出し、その解析結果について述べる。第 5 節では、全離散線形数値スキームを与え、数値実験を行うことで、その収束性について議論する。

2 非線形拡散問題

本稿で扱う問題は大きく退化放物型問題と交差拡散系の 2 つのタイプに分けられる。本節では、その問題の例をいくつか紹介する。

2.1 退化放物型方程式

ある領域が水と氷で満たされている場合に、水・氷が冷やされたり温められたりすることによりそれらの温度分布が変化する。それと共に氷の形状がどのように変化するであろうか。水と氷の界面 (自由境界) を定めると同時にそれぞれの領域での温度分布を求めるのが Stefan 問題である。この種の問題では界面上で満たされる方程式が特に重要である。最も典型的な問題である古典的 Stefan 問題では、界面上で 2 つの条件を課している。一つは界面上の温度は 0 であるという条件である。もう一つは Stefan 条件と呼ばれるものであり、界面が動く (法線方向の) 速さが界面上での熱流の収支に比例しているという条件である。ある初期条件と境界条件の下で、界面上の 2 つの方程式、及び、その界面によって分けられる 2 つの領域での支配方程式 (熱方程式) といった複数の方程式を同時に満たす解を求めなければならない複雑な問題である。特に、空間多次元問題において、氷がちぎれたり、ひっついたり、尖ったり、といったように位相の変化がある場合や特異な点が出現する場合には数学的な取り扱いは非常に困難である。温度と潜熱の和であるエンタルピーに着目することにより、その困難を回避することができる。エンタルピーを用いて再定式化を行うと、古典的 Stefan 問題は (1) の形で書き表される。ここで、 $M = 1$ であり、

$$\beta(r) = \beta(r) = d_1 \min(r, 0) + d_2 \max(r - \lambda, 0), \quad r \in \mathbb{R}$$

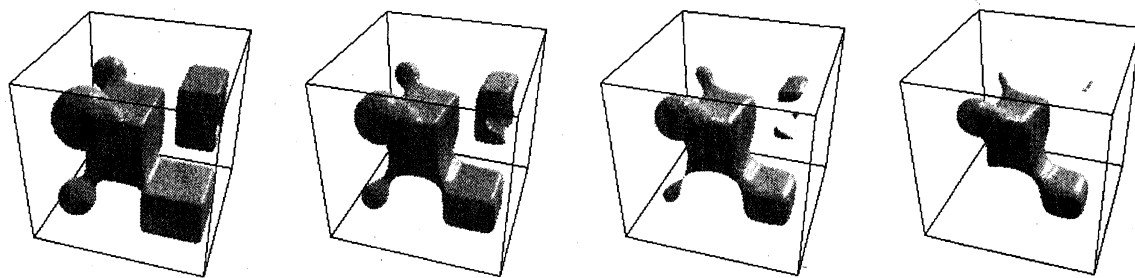


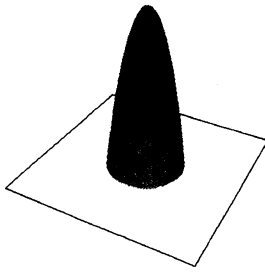
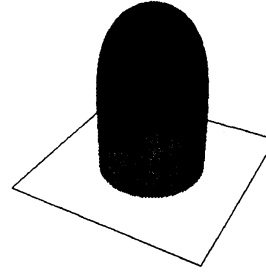
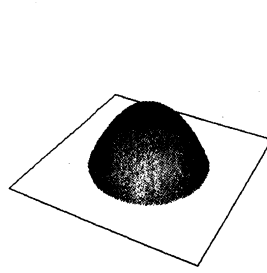
図1 ステファン問題の数値解.

である. また, d_1 と d_2 は非負定数であり, それぞれ氷と水の熱伝導係数である. 非負定数 λ は単位体積の氷を溶かすのに必要な熱量を表す. このとき, 解 z はエンタルピーを表し, 氷と水の温度はそれぞれ $\min(\beta(z), 0)/d_1$ と $\max(\beta(z), 0)/d_2$ により表される. この方程式では, 解 z が区間 $(0, \lambda)$ にあるときには拡散 $\beta'(z)$ の効果がなくなる. つまり拡散が退化するのである. 拡散の効果がなくなることにより, 解の滑らかさが失われる. 特に, Stefan 問題の場合は解は不連続となり, その不連続面が氷と水の境界である自由境界を表す. 自由境界の情報は陰的に含まれており, 自由境界上での条件は (特異な部分を除いて) 自動的に満たされる. この方程式を用いて空間 3 次元の数値計算を行った. 氷の形状の変化を図 1 に示す. 氷が融解する過程が見て取れる. 方程式 (1) を用いることにより, (方程式 (1) が数値的に解けさえすれば) 氷の形状が複雑な場合や位相が変化する場合なども気にすることなくシミュレーションすることができる. 問題は幾分取り扱いやすくなっているが, 拡散の退化性が問題の特徴づけ, 退化性とそれに起因する解の不連続性が解析や数値解析を困難なものにしている.

多孔質媒体中を流れる流体の流れ現象を記述する方程式である多孔質媒体流方程式を簡単に紹介する. 多孔質媒体流方程式は (1) において $M = 1$,

$$\beta(r) = \beta(r) = |r|^{m-1}r, \quad r \in \mathbb{R}$$

と定義したものである. ただし, $m > 1$ である. このとき, $z = 0$ なる点において拡散が退化する. この退化性が引き起こす顕著な特徴として, 次のものが挙げられる. 初期関数 z_0 の台がコンパクトであるならば, 解の台もコンパクトである. 図 2 と図 3 はそれぞれ $m = 2$ と $m = 6$ の場合の初期値と Barenblatt 解と呼ばれる解析解をプロットしたものである. 解の台もコンパクトであることが見られる. このように, $z > 0$ となる領域と $z = 0$ なる領域の間に自由境界が現れる. 解の台は物理的には流体の存在範囲を表すものである. この性質は線形拡散方程式 ($M = 1$) の性質とは明確に異なる.

図2 Barenblatt 解. $m = 2$.図3 Barenblatt 解. $m = 6$.

2.2 交差拡散系

問題 (1) において, β_i は z_i のみにではなく, $z_j (j \neq i)$ にも依存していることに注意されたい. この様な場合の拡散は交差拡散と呼ばれ, そのことが興味深い現象を引き起こす. 交差拡散系は個体群生態学における数理モデルの中にしばしば現れる. 非線形交差拡散系の典型的な例は重定, 川崎, 寺本 [14] により提案された 2 種個体群の分散的移動を記述する次のモデルである.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \Delta [(a_1 + b_1 z_1 + c_1 z_2) z_1] + (g_{10} - g_{11} z_1 - g_{12} z_2) z_1, \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = \Delta [(a_2 + b_2 z_2 + c_2 z_1) z_2] + (g_{20} - g_{21} z_1 - g_{22} z_2) z_2. \end{cases} \quad (2)$$

ここで, a_i, b_i, c_i, g_{ij} ($i = 1, 2, j = 0, 1, 2$) は非負定数である. i 番目の種の分散率 $a_i + b_i z_i + c_i z_j$ ($j \neq i$) は密度 z_i, z_j に比例して増加するという形式をとっている. 交差拡散の項は j 番目の種が高密度に棲む場所では個体間に働く干渉作用が強く, i 番目の種の各個体はその場から分散する傾向を強めることを示している. この効果により空間的な棲み分けが起こることが知られている. 数値計算例を図 4 に示す. 初期値は定数定常解に 1% のランダムなノイズを加えたものとした. 交差拡散の効果がない ($c_1 = c_2 = 0$) 場合は定数定常解 $(z_1, z_2) \equiv (8/21, 50/21)$ は安定であるが, この数値結果が示す通り, 交差拡散の効果がある場合には, この定数定常解は不安定になり空間的なパターンが現れる.

個体群生態学には他にも興味深い交差拡散系の例がある. 例えば, Kadota と Kuto [4] により研究されている次の捕食者-被食者系の問題である.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \Delta [(1 + b_1 z_2) z_1] + (g_{10} - g_{11} z_1 - g_{12} z_2) z_1, \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = \Delta \left[a_2 + \left(\frac{1}{1 + c_2 z_1} \right) z_2 \right] + (g_{20} + g_{21} z_1 - g_{22} z_2) z_2. \end{cases}$$

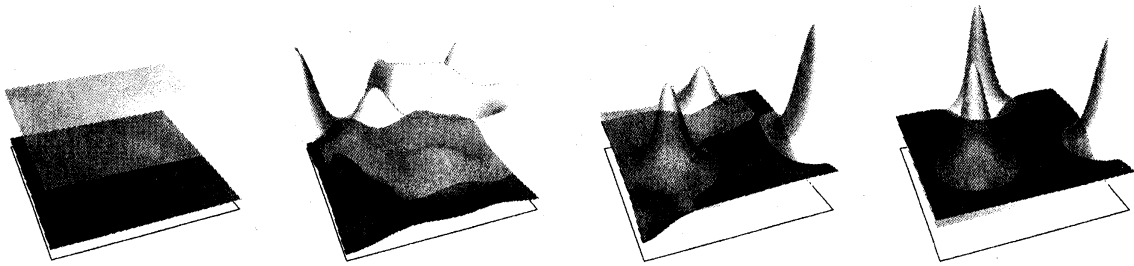


図4 重定-川崎-寺本モデル (2) の数値解. $\Omega = (0, 1)^2$, $a_1 = a_2 = c_1 = 0.04$, $b_1 = b_2 = 0$, $c_2 = 2$, $g_{10} = 2.8$, $g_{20} = 3$, $g_{11} = g_{22} = 1.1$, $g_{12} = g_{21} = 1$. 濃い灰色は z_1 を表し, 薄い灰色は z_2 を表している.

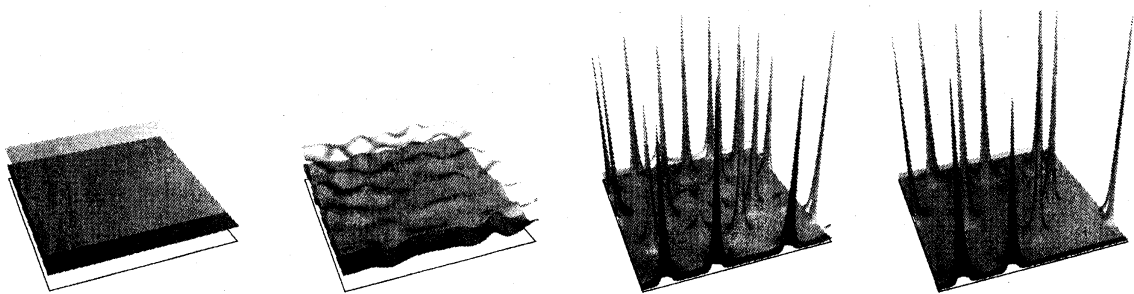


図5 交差拡散系 (3) の数値解. 濃い灰色は z_1 を表し, 薄い灰色は z_2 を表している.

この系では, 被食者の分散率は (2) と同様なタイプであるが, 捕食者の分散率は分数の形になっている. これは, 餌が多くなると捕食者の個体群圧が低くなることを示しており, 結果として, 餌が多く集まっている場所に捕食者が集まっていく効果を表している.

これに関連して, 次の協調系の数値計算例を見てみよう.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \Delta \left[\left(\frac{1}{0.2 + 0.02z_2^2} \right) z_1 \right] + (4 - z_1)z_1 & \text{in } Q = (0, 1)^2 \times (0, 50], \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = 0.005\Delta z_2 + (0.5 + z_1 - 0.5z_2)z_2 & \text{in } Q. \end{cases} \quad (3)$$

結果を図5に示す. 交差拡散の項がない場合, つまり第1式の z_2 の前の係数が0の場合には, 第1式は z_2 に独立であるため, 定数定常解 $(z_1, z_2) \equiv (4, 9)$ が安定であることが直ちに分かるであろう. しかしながら, この例では, 交差拡散の効果により, その定常解が不安定であり, 凝集が起こることが見られる.

一言に交差拡散系といっても, 様々な興味深い問題を含んでいる. この他にも, 線形 (半線形) の交差拡散系 [5] や3重結節点を含む自由境界問題に関連する交差拡散系 [13]

などが研究されている.

3 半線形近似

前節の例をみると, 拡散の退化性や非線形性が問題の解析及び数値解析を複雑なものにしていることが想像できる. この拡散の退化性や非線形性を取り除くことは問題の解析や数値解析に役立つと思われる. 我々は, 拡散の非線形性を取り除くという動機から, 一般的な問題 (1) の解を近似する次の反応拡散系を構成した.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{u} - \beta(\mu \mathbf{u} + \mathbf{v})) + \frac{1}{\mu} \mathbf{f}(\mu \mathbf{u} + \mathbf{v}) & \text{in } Q, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mu}{\varepsilon} (\mathbf{u} - \beta(\mu \mathbf{u} + \mathbf{v})) & \text{in } Q, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0^\varepsilon, \quad \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0^\varepsilon & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

ここで, μ と ε は正の定数である. 関係 $\mu \mathbf{u}_0^\varepsilon + \mathbf{v}_0^\varepsilon \approx \mathbf{z}_0$ を満たす初期値 $(\mathbf{u}_0^\varepsilon, \mathbf{v}_0^\varepsilon)$ に対する反応拡散系 (4) の弱解を $(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)$ とする. パラメータ ε が 0 に近づくとき, 関数 $\mathbf{z}^\varepsilon := \mu \mathbf{u}^\varepsilon + \mathbf{v}^\varepsilon$ が方程式 (1) の弱解 $\mathbf{z}$ に収束するということが主張である. 詳しい動機や導出, 意味などは [7, 8, 10] やその参考文献を参照されたい.

反応拡散系 (4) の拡散は線形であり, 拡散の非線形性 β がそのままの形で反応拡散系 (4) の反応項の部分に含まれていることに注目されたい. 一般に, 非線形問題を扱うよりも半線形問題を取り扱う方が容易である. 従って, 反応拡散系近似に関する理論は非線形問題の解析や数値解析に応用できることが期待される. 実際に, 数値解析への応用が有効であることを示した. その応用の 1 つが, 本稿の主題である非線形拡散問題の線形近似である. Stefan 問題等の問題における自由境界を効率良く求めるための数値解法も, 反応拡散系近似 (4) を用いて開発されている ([9] を参照).

3.1 収束性

反応拡散系 (4) の収束性に関する我々の結果について述べる. 我々の結果は退化放物型問題及び非線形交差拡散系を含む問題についてのものであるが, 退化性と交差性を同時に含む問題の解析は困難である. ここでは, 拡散が交差していない退化放物型問題と拡散が退化しない交差拡散系を別々に取り扱う. 退化放物型方程式については収束することのみでなく, 収束の速さについても結果が得られた.

3.1.1 退化放物型問題

退化放物型問題に対する結果を述べる. 以下に, 与えられた関数に対する条件を与える.

(H1)_D 各 $i = 1, 2, \dots, M$ に対して, β_i は第 i 番目の変数にのみ依存しているとする (非交差拡散). さらに, β_i は非減少 Lipschitz 連続関数であり, $\beta_i(0) = 0$ を満たすものとする. Lipschitz 定数を L_β と書く. また, 次を満たす正定数 C_1 と C_2 が存在するとする.

$$|\beta_i(s)| \geq C_1|s| - C_2 \quad \text{for all } s \in \mathbf{R}.$$

(H2)_D f は Lipschitz 連続関数である.

(H3)_D μ は $0 < \mu < L_\beta^{-1}$ を満たす.

(H4)_D $z_0 \in L^2(\Omega)^M$. $u_0^\varepsilon \in H^1(\Omega)^M$ と $v_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)^M$ は $\mu u_0^\varepsilon + v_0^\varepsilon \rightarrow z_0$ in $L^2(Q)^M$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ を満たす.

注意 1 固定パラメータ μ の意味について考えよう. $M = 1$ のとき, 非線形拡散は $\Delta\beta(z) = \operatorname{div}(\beta'(z)\nabla z)$ と書き直すことができる. 従って, $\beta'(z)$ が拡散係数に相当する. 仮定 (H1)_D ではその拡散係数が $0 \leq \beta'(z) \leq L_\beta$ を満たしていることを示している. 一方, 仮定 (H3)_D は $L_\beta < 1/\mu$ ということであり, u の拡散係数が z の拡散係数の上限よりも大きいことを表している. また, v の拡散係数 0 は拡散の最小値を表していると捉えることができる. 反応拡散系 (4) では, (1) の解 z が拡散するもの u と拡散しないもの v に分けられており, 全体の量 $\mu u + v$ と非線形性 β に応じてその 2 つの状態の量が素早く転換することによってその比率を変え, その比率によって非線形拡散を実現していると考えることができる. このように, μ は拡散の上限をコントロールするパラメータであると考えられる.

本研究では, 弱解を考えるが, 弱解の定義や一意存在性については [7, 11] 及び, そこに書かれている参考文献を参照していただきたい.

上記の仮定の下で, 以下の定理が成り立つ.

定理 1 ([7]+ α) 仮定 (H1)_D–(H4)_D が成り立つとする. 関数 z を (1) の弱解であるとし, $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ を (4) の弱解とする. このとき, 次を満たす ε に依存しない正の定数 C が存

在する.

$$E^\varepsilon := \|\beta(z) - u^\varepsilon\|_{L^2(Q)^M} + \left\| \int_0^t (\beta(z) - u^\varepsilon) \right\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))^M} \\ + \|z - (\mu u^\varepsilon + v^\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;(H^1(\Omega))^*)^M} \leq C\varepsilon^{1/4}.$$

もし, $\beta(z_0) \in (L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega) \cap W^{2,1}(\Omega))^M$ であれば, 初期値 $(u_0^\varepsilon, v_0^\varepsilon)$ を十分滑らかな近似ととれば, 次を満たす ε に依存しない正の定数 C が存在する.

$$E^\varepsilon \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

もし, $z_0 \in L^2(\Omega)^M$ であり,

$$\beta'_i(s) \geq l_\beta \quad \text{a.e. } s \in \mathbf{R},$$

を満たす正の数 l_β が存在するとすると, すなわち, 拡散が退化しない問題については, 次を満たす ε に依存しない正の定数 C が存在する.

$$\|z - (\mu u^\varepsilon + v^\varepsilon)\|_{L^2(Q)^M} + E^\varepsilon \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

3.1.2 交差拡散系

交差拡散系に対する結果を述べる. 次の条件を仮定する.

(H1)_C $\beta : \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^M$ はリプシッツ定数 L_β のリプシッツ連続関数であり, $\beta(0) = 0$ を満たす.

(H2)_C ある正の定数 a が存在して, ほとんど全ての $\eta, \xi \in \mathbf{R}^M$ に対して次を満たす.

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M (\beta_i)_j(\eta) \xi_i \xi_j \geq a|\xi|^2.$$

ここで, $(\beta_i)_j$ は β_i の第 j 番目の変数に関する微分を表す.

(H3)_C f はリプシッツ連続関数である.

(H4)_C $z_0 \in L^2(\Omega)^M$. $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)^M$ and $v_0^\varepsilon \in H^1(\Omega)^M$ はある ε に依存しない正定数 C に対して次を満たす.

$$\|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^M} + \sqrt{\varepsilon} \|v_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)^M} \leq C,$$

$$\mu u_0^\varepsilon + v_0^\varepsilon \rightharpoonup z_0 \quad \text{weakly in } L^2(\Omega)^M.$$

(H5)_C μ は次を満たす.

$$0 < \mu < \frac{a}{a^2 + M^2 L_\beta^2}.$$

条件 (H1)_C と (H2)_C は問題が一様放物型であることを意味している. 係数が

$$a_i > 0, 8b_1c_2 > c_1^2, 8b_2c_1 > c_2^2.$$

を満たし, 解が非負で有界であるとき, 交差拡散系 (2) は一様放物型である. 一様放物型でなくても, 係数が

$$a_i > 0, b_i, c_2 \geq 0, c_1 = 0$$

を満たしている場合, つまり弱結合系の場合にも, 同様に (2) を取り扱うことができる. どちらの場合も含むさらに一般的な問題を考えることができる. 詳細は [12, 11] を見よ.

本研究では, このような弱い仮定をおいているため, 古典解ではなく, 弱解を取り扱う. 弱解の定義については [11] を参照せよ. 仮定 (H1)_C, (H3)_C, (H4)_C と $\mu > 0$ が成り立つとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 反応拡散系 (4) の弱解は一意に存在する. 交差拡散系 (1) の弱解の存在は反応拡散系 (4) を用いて証明することができる.

以下に収束に関する我々の結果を述べる.

定理 2 ([11]) 仮定 (H1)_C–(H5)_C が成り立つとする. 反応拡散系 (4) の弱解を $(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)$ とする. このとき, 交差拡散系 (1) の弱解 $\mathbf{z} \in (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)^*))^M$ と $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}, \{\mathbf{v}^\varepsilon\}$ の部分列 $\{\mathbf{u}^{\varepsilon_k}\}, \{\mathbf{v}^{\varepsilon_k}\}$ が存在して, ε_k が 0 に収束するとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{u}^{\varepsilon_k} + \mathbf{v}^{\varepsilon_k} &\rightarrow \mathbf{z} \quad \text{strongly in } L^2(Q)^M, \text{ a.e. in } Q, \\ &\quad \text{and weakly in } L^2(0, T; H^1(\Omega))^M \text{ and } H^1(0, T; H^1(\Omega)^*)^M, \\ \mathbf{u}^{\varepsilon_k} &\rightharpoonup \beta(\mathbf{z}) \quad \text{weakly in } L^2(0, T; H^1(\Omega))^M. \end{aligned}$$

このように, 拡散が交差していない退化放物型問題と拡散が退化しない交差拡散系のいずれの問題についても, その弱解が反応拡散系 (4) の弱解により近似されることが示めされた. 退化交差拡散系についても一部結果を得ているが, 応用に役立つような十分に広い枠組みでの結果は得られていない [8].

4 線形近似

本節では, 非線形拡散問題 (1) に対する線形時間離散スキームを提出する. 時間離散スキームを考えることは全離散スキームである数値解法を考えることに比べて単純なものであるが, 数値解法の開発において重要な役割を果たす.

4.1 非線形拡散問題の数値解法について

退化放物型方程式 ($M = 1$ の場合) については数多くの数値解法が提出され解析されている。しかしながら、交差拡散系 ($M \geq 2$ の場合) に対する数値解析の歴史は浅く、筆者が知る限りでは重定-川崎-寺本モデルを対象としたものしかなく、文献も数えきれないほどしかない。Andreianov 等の最新の研究 [1] にて大方の文献が参照されている。交差拡散系に対する既存の研究はどれも、重定-川崎-寺本モデルに対する $(Z^n - Z^{n-1})/\tau = \Delta\beta(Z^n)$ のタイプの陰解法についての研究である。ここで、 $\tau = T/N_T$ ($N_T \in \mathbb{N}$) は時間刻み幅であり、 Z^n は解 $z(\cdot, \tau n)$ の近似を表している。空間離散化を行ったこのタイプの数値解法は安定であり、経験的に精度も良い。しかしながら、連立非線形方程式を解く必要があり、多成分系や空間 2, 3 次元の計算をするには実装が煩雑になる。また、既存の研究は重定-川崎-寺本モデルを対象としたものであり、その理論やコードは他の交差拡散を含む問題にそのままでは利用できない。上記のタイプの陰解法は個別の問題の解の振る舞いを詳細に見たいときに有効な方法であろう。問題の解析のきっかけとして解の振る舞いを調べたい場合や、問題が現象を記述していることを確かめたい場合等、様々な問題の解の振る舞いを気軽に見たいときには既存の数値解法は有用ではない。そのような場合には、汎用的で実装が容易な数値解法が便利である。本研究では、退化放物型方程式や交差拡散系を含む一般的な問題 (1) に対する汎用的で、簡便な数値解法を提案する。

4.2 線形スキーム

我々は半線形反応拡散系 (4) を用いることにより、拡散の非線形性を反応項に移動することに成功した。この反応拡散系の半陰的時間離散を考えることにより、汎用的で実装が容易であり、ある程度効率の良い数値解法を得ることができる。

次の半陰的時間離散スキームを考える。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{D}_\tau U^n = \frac{1}{\mu} \Delta U^n - \frac{1}{\varepsilon} (U^{n-1} - \beta(\mu U^{n-1} + V^{n-1})) \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{\mu} f(\mu U^{n-1} + V^{n-1}) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U^n}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \bar{D}_\tau V^n = \frac{\mu}{\varepsilon} (U^{n-1} - \beta(\mu U^{n-1} + V^{n-1})) & \text{in } \Omega. \end{array} \right. \quad (5)$$

このスキームにおいて、 $\varepsilon = \tau$ と定め、 $Z^n = \mu U^n + V^n$ とおくと、次のよりシンプルな

スキームを得る.

$$\begin{cases} U^n - \frac{\tau}{\mu} \Delta U^n = \beta(Z^{n-1}) + \frac{\tau}{\mu} f(Z^{n-1}) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U^n}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ Z^n := Z^{n-1} + \mu(U^n - \beta(Z^{n-1})) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

主張は Z^n が $z(\cdot, \tau n)$ の近似であるということである. このスキームは各時間ステップ毎に M 個の線形楕円型方程式を解き, 陽的に Z を更新するという単純なものである. 空間離散化を行った数値解法は, M 個の線形熱方程式を解く場合とほぼ同じ形であり, その実装は非常に容易である. 更に, β の形が異なる問題を扱う場合にも, コードの中のその関数だけ書き換えればよく, 汎用的である.

実は, $M = 1$ の場合には, このスキームは Berger, Brezis, Rogers [2] により提案された退化放物型方程式に対する時間離散スキームと一致している. その有効性からこのスキームについて ($M = 1$ の場合に) これまでに多くの研究が行われてきた ([11] の参考文献を参照). スキーム (6) はその拡張になっているわけだが, その解析は今までに行われていない. スキームの方程式から系への拡張は容易に想像がつき, 自然であるが, その理論は系には応用できないからである. 我々は, 反応拡散系近似 (4) という鍵を持っている. 反応拡散系 (4) を介することにより, 時間離散スキーム (5) の, 従って (6) の, 安定性及び収束性を論ずることができる. 実際に, ある条件の下, $\tau \leq \varepsilon$ が成り立つときにスキーム (5) が安定であること, $\varepsilon, \tau \rightarrow 0$ のとき (5) の解 $\mu U + V$ が (1) の解 z に収束することを示した. 近似 (4) においては, パラメータ ε が小さければ小さいほど近似精度が高いと考えられるため, (5) においてもなるべく ε を小さく取りたい. しかしながら, 安定性のためには $\tau \leq \varepsilon$ が成り立っている必要がある. 従って, スキーム (5) を考える限りでは $\varepsilon = \tau$ と選ぶのが, つまり (6) が最適である.

4.3 収束性

本小節では, スキーム (6) に関する収束性について述べる. 第3節と同様に, 退化放物型問題と交差拡散系を分けて考える.

関数列 $\{U^n, Z^n\}_{n=0}^{N_T}$ をスキーム (6) の弱解であるとするとき, 関数の列 $\{U^n\}$ と $\{Z^n\}$ を時間について区分的定関数で補完した関数をそれぞれ $U^{(\tau)}$ と $Z^{(\tau)}$ と書く.

4.3.1 退化放物型問題

退化放物型方程式については空間離散化も含めスキーム (6) の解析結果は豊富にある. 時間離散パラメータ τ に関する収束の速さの最適な評価が Magenes, Nochetto, Verdi [6] により与えられている. その結果を退化放物型方程式系に拡張したものが以下のものである.

定理 3 仮定 (H1)_D–(H4)_D が成り立つとする. 関数 z を (1) の弱解であるとし, $\{U^n, Z^n\}_{n=0}^{N_T}$ を初期値 $Z^0 = z_0$ とするスキーム (6) の弱解であるとする. このとき, 次を満たす τ に依存しない正の定数 C が存在する.

$$E^\tau := \|\beta(z) - U^{(\tau)}\|_{L^2(Q)^M} + \left\| \int_0^t (\beta(z) - U^{(\tau)}) \right\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))^M} \\ + \|z - Z^{(\tau)}\|_{L^\infty(0,T;(H^1(\Omega))^*)^M} \leq C\tau^{1/4}.$$

もし, $\beta(z_0) \in L^\infty(\Omega)^M$ かつ $\Delta\beta(z_0)$ であれば, 次を満たす τ に依存しない正の定数 C が存在する.

$$E^\tau \leq C\tau^{1/2}.$$

もし, $z_0 \in L^2(\Omega)^M$ であり,

$$\beta'_i(s) \geq l_\beta \quad \text{a.e. } s \in \mathbf{R},$$

を満たす正の数 l_β が存在するとすると, すなわち, 拡散が退化しない問題については, 次を満たす τ に依存しない正の定数 C が存在する.

$$\|z - Z^{(\tau)}\|_{L^2(Q)^M} + E^\tau \leq C\tau^{1/2}.$$

これに加えて, $\beta(z_0) \in H^1(\Omega)^M$ が成り立つなら, 次を満たす τ に依存しない正の定数 C が存在する.

$$\|z - Z^{(\tau)}\|_{L^2(Q)^M} + E^\tau \leq C\tau, \quad \|z - Z^{(\tau)}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))^M} \leq C\tau^{1/2}.$$

4.3.2 交差拡散系

交差拡散系に対するスキーム (6) についての解析結果を述べる. 初期値に対する仮定 (H4)_C の代わりに次を仮定する.

(H4)'_C $z_0 \in L^2(\Omega)^M$. $z_0^\tau \in H^1(\Omega)^M$ はある τ に依存しない正定数 C に対して次を満たす.

$$\|z_0^\tau\|_{L^2(\Omega)^M} + \sqrt{\tau} \|z_0^\tau\|_{H^1(\Omega)^M} \leq C,$$

$$\mu z_0^\tau \rightharpoonup z_0 \quad \text{weakly in } L^2(\Omega)^M.$$

我々は, スキーム (6) の収束性について次の結果を得た.

定理 4 ([11]) 仮定 (H1)_C–(H3)_C, (H4)'_C, (H5)_C が成り立つとする. $\{U^n, Z^n\}_{n=0}^{N_T}$ を初期値 $Z^0 = z_0^\tau$ とするスキーム (6) の弱解であるとする. このとき, $\{U^{(\tau)}\}, \{Z^{(\tau)}\}$ の部分列 $\{U^{(\tau_k)}\}, \{Z^{(\tau_k)}\}$ と (1) の弱解 z が存在して次を満たす. $\tau_k \rightarrow 0$ のとき,

$$\begin{aligned} Z^{(\tau_k)} &\rightarrow z, \\ U^{(\tau_k)} &\rightarrow \beta(z) \end{aligned} \quad \text{strongly in } L^2(Q)^M, \text{ and weakly in } L^2(0, T; H^1(\Omega))^M.$$

5 数値実験

本節では, スキーム (6) の実際の収束性を調べるために, 次の $M = 2$, 空間 1 次元の問題について数値実験を行う.

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \Delta [(10 \exp(-z_2^2/16) + 1) z_1] + (5 - z_1) z_1 & \text{in } (0, 2) \times (0, 10), \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} = 0.001 \Delta [(1 + z_1 + z_2) z_2] + (1 + z_1 - z_2) z_2 & \text{in } (0, 2) \times (0, 10), \\ \frac{\partial z_1}{\partial \nu} = \frac{\partial z_2}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \{0, 2\} \times (0, 10), \\ z_1(x, 0) = 5(1 + 0.01 \cos(2\pi x)) & \text{for } x \in (0, 2), \\ z_2(x, 0) = 6(1 - 0.01 \sin(2\pi x)) & \text{for } x \in (0, 2). \end{cases}$$

スキーム (6) を空間離散化するために, 差分法を用いた. $N_X + 1$ を空間分割数としたとき, 空間の刻み幅は $h = 2/N_X$ と表される. 格子点上の値 $z_i(jh, n\tau)$ の近似を $Z_i^{j,n}$ と書く. 全離散数値スキームは次のものである.

スキーム 1

- 初期値を $Z_i^{j,0} = z_i(jh, 0)$ $i = 1, \dots, M$, $j = 0, \dots, N_X$ とする.
- 与えられた (得られた) $\{Z_i^{j,n-1}\}_{i=1, \dots, M, j=0, \dots, N_X}$ ($n = 1, \dots, N_T$) に対して, 次

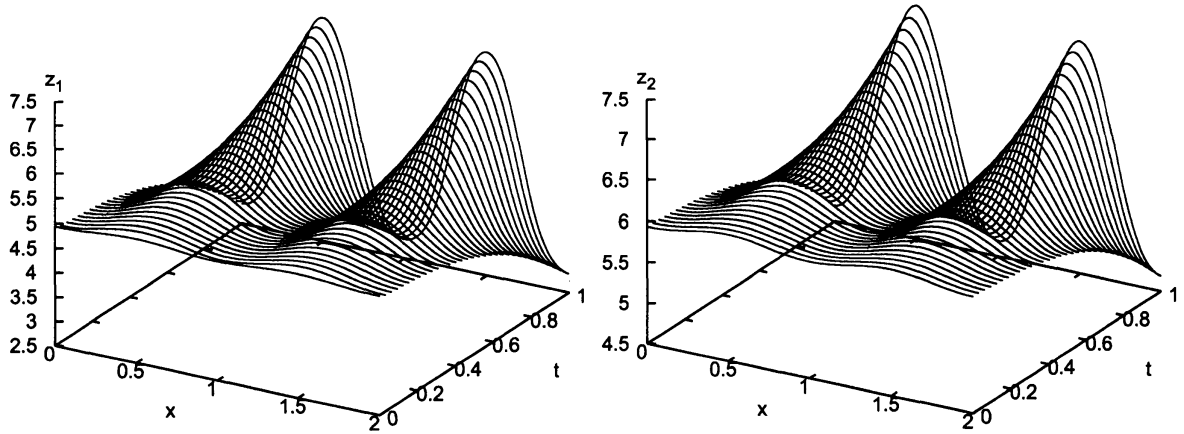


図 6 The 'exact' solution until $t = 1$.

の連立方程式を解き, $\{U_i^{j,n}\}_{i=1,\dots,M, j=0,\dots,N_X}$ を求める.

$$U_i^{j,n} - \frac{\tau}{\mu h^2} (U_i^{j+1,n} - 2U_i^{j,n} + U_i^{j-1,n}) = \beta_i(\mathbf{Z}^{j,n-1}) + \frac{\tau}{\mu} f_i(\mathbf{Z}^{j,n-1}),$$

$$U_i^{-1,n} = U_i^{1,n}, \quad U_i^{N_X+1,n} = U_i^{N_X-1,n}.$$

・ 近似値 $\{Z_i^{j,n}\}_{i=1,\dots,M, j=0,\dots,N_X}$ を次の通り更新する.

$$Z_i^{j,n} = Z_i^{j,n-1} + \mu(U_i^{j,n} - \beta_i(\mathbf{Z}^{j,n-1})).$$

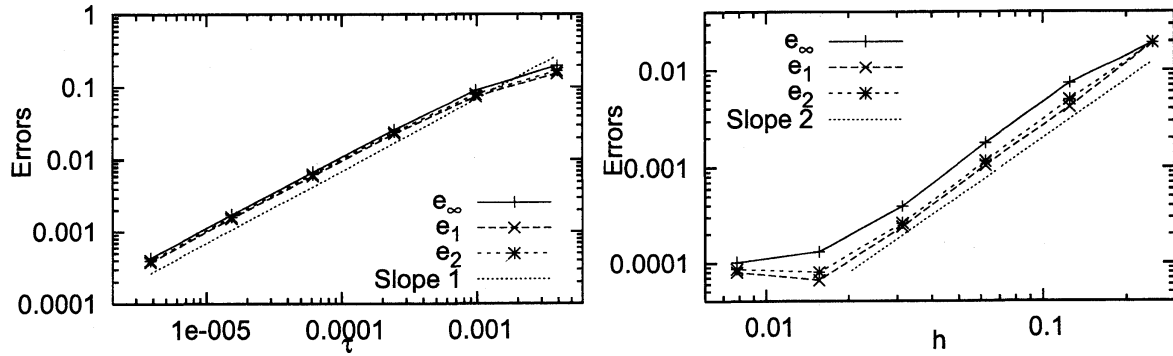
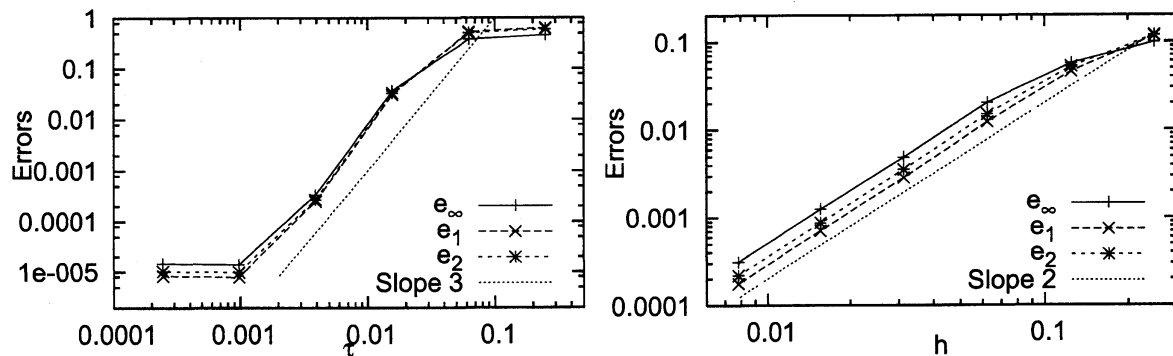
収束の速さを調べるために, 分割数を大きくとった ($N_X = 2^{11}$, $\tau = 2^{-20}$) 数値解を '真の' 解として, その '真の' 解と数値解を比較する ('真の' 解を求めるために後に述べるスキーム 2 を用いた). その '真の' 解の形は図 6 に示されている.

時刻 $t = n\tau$ における相対離散 $L^p(\Omega)$ 誤差を e_p^n ($p = 1, 2, \infty$) と書く.

$$e_p^n = \left(\sum_{\substack{i=1,2 \\ 0 \leq j \leq N_X}} |Z_i^{j,n} - z_i(jh, n\tau)|^p / \sum_{\substack{i=1,2 \\ 0 \leq j \leq N_X}} |z_i(jh, n\tau)|^p \right)^{1/p}, \quad p = 1, 2,$$

$$e_\infty^n = \max_{\substack{i=1,2 \\ 0 \leq j \leq N_X}} |Z_i^{j,n} - z_i(jh, n\tau)| / \max_{\substack{i=1,2 \\ 0 \leq j \leq N_X}} |z_i(jh, n\tau)|.$$

まず, 時刻 $t = 1$ における, 時間刻み幅 τ に対する収束の速さについて調べる. このために, $\mu = 0.2$, $N_X = 2^{10}$ を固定して数値計算を行なった. 図 7 の左の図が $\tau = 2^{-8}, 2^{-10}, \dots, 2^{-18}$ に対する結果である. 誤差は傾き 1 の直線に沿っているのが見られる. つまり, どのノルムに対しても, 時間刻み幅 τ についての収束のオーダーは τ であ

図 7 Numerical results at $t = 1$.図 8 Numerical results at $t = 10$.

ることが観測される。次に、時刻 $t = 1$ における、空間刻み幅 h に対する収束の速さについて調べる。図 7 の右図に計算結果が示されている。この実験では、 $\mu = 0.2$, $\tau = 2^{-20}$ を固定して、 $N_X = 2^3, 2^4, \dots, 2^8$ として計算を行なった。数値計算の結果は収束のオーダーが h^2 であることを示している。このオーダーは、Andreianov 等 [1] により研究された非線形陰解法のオーダーと同じである。図 8 は時刻 $t = 10$ における計算結果である。この時刻では‘真の’解は定常状態に落ち着いているように見える。計算では、 $\mu = 0.2$ とし、左図では $N_X = 2^{10}$ を固定し、右図では $\tau = 2^{-20}$ を固定した。空間に関する数値的な収束のオーダーは h^2 とみられ、時間刻み幅に対する収束はかなり速いようにみられる。

パラメータ μ と誤差との関係調べてみよう。図 9 に $N_X = 2^{10}$ を固定し、 τ と μ を変えたときの誤差 e_∞ を記した。どの μ に対しても、収束のオーダーは τ であるように伺える。しかしながら、誤差は μ に依存していることが分かる。パラメータ μ の値が大きければ大きいほど、誤差は小さくなっているようにみられる。従って、 μ の値をより大きくとれば精度の高い数値解が得られると思われるが、 μ の値を 0.3 以上にとると、数値解が不安定になる。Jäger と Kačur [3] は、非線形拡散方程式 (1) (つまり $M = 1$ の場合) に

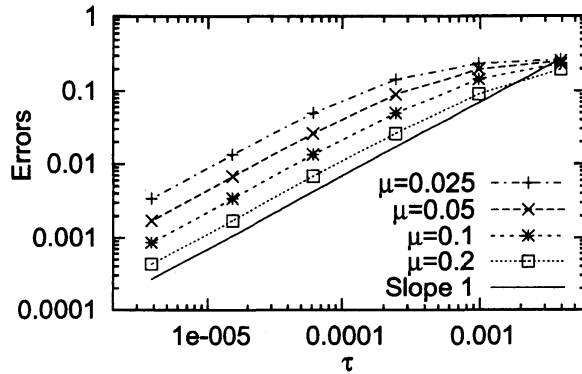


図9 Results for various choices of the parameter μ .

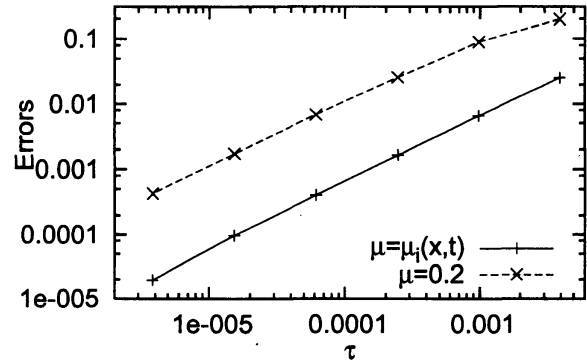


図10 Results for Scheme 1 with $\mu = 0.2$ and for Scheme 2.

対する線形スキーム (6) を研究した。彼らは μ をある関数に置き換えることにより、スキームの改良を行なった。従って、交差拡散系に対しても、 μ を適切な関数に置き換えることにより、精度の高い数値解法が得られるかもしれない。深い考察をせずに、次のスキームを用いて数値実験を行なってみた。

スキーム 2

- ・ 初期値を $Z_i^{j,0} = z_i(jh, 0)$ $i = 1, \dots, M$, $j = 0, \dots, N_X$ とする。
- ・ 与えられた (得られた) $\{Z_i^{j,n-1}\}_{i=1, \dots, M, j=0, \dots, N_X}$ ($n = 1, \dots, N_T$) に対して、

$$\mu_i^{j,n-1} = 1/(\beta_i)_i(Z^{j,n-1})$$

と置き、次の連立方程式より、 $\{U_i^{j,n}\}_{i=1, \dots, M, j=0, \dots, N_X}$ を求める。

$$\begin{aligned} \mu_i^{j,n-1} U_i^{j,n} - \frac{\tau}{h^2} (U_i^{j+1,n} - 2U_i^{j,n} + U_i^{j-1,n}) &= \mu_i^{j,n-1} \beta_i(Z^{j,n-1}) + \tau f_i(Z^{j,n-1}), \\ U_i^{-1,n} &= U_i^{1,n}, \quad U_i^{N_X+1,n} = U_i^{N_X-1,n}. \end{aligned}$$

- ・ 近似値 $\{Z_i^{j,n}\}_{i=1, \dots, M, j=0, \dots, N_X}$ を次の通り更新する。

$$Z_i^{j,n} = Z_i^{j,n-1} + \mu_i^{j,n-1} (U_i^{j,n} - \beta_i(Z^{j,n-1})).$$

実装の容易さや計算コストはスキーム 1 のものとほとんど変わらない。実験結果を $\mu = 0.2$ の場合と比較したものを図 10 に記した。パラメータ μ が定数の場合と比べて、同じ時間刻み幅では誤差が 1/10 程に小さくなっているのが分かる。ここでは、深く考えずに $\mu_i^{j,n}$ を適当に選んだが、それでも精度の改善が見られた。パラメータ μ に関する詳しい解析を行い、最適な評価を与えることは、今後の課題である。

謝辞

本研究は科学研究費補助金 (課題番号 22740058, 23340023) の援助を受けている。

参考文献

- [1] B. Andreianov, M. Bendahmane and R. Ruiz-Baier, *Analysis of a finite volume method for a cross-diffusion model in population dynamics*, Math. Models Methods Appl. Sci., **21** (2011), 307–344.
- [2] A. E. Berger, H. Brezis and J. C. W. Rogers, *A numerical method for solving the problem $u_t - \Delta f(u) = 0$* , R.A.I.R.O. Anal. Numér. **13** (1979), 297–312.
- [3] W. Jäger and J. Kačur, *Solution of porous medium type systems by linear approximation schemes*. Numer. Math. **60** (1991) 407–427.
- [4] T. Kadota and K. Kuto, *Positive steady states for a prey-predator model with some nonlinear diffusion terms*, J. Math. Anal. Appl., **323** (2006), 1387–1401.
- [5] E. H. Kerner, *Further considerations on the statistical mechanics of biological associations*, Bull. Math. Biophys., **21** (1959), 217–255.
- [6] E. Magenes, R. H. Nochetto and C. Verdi, *Energy error estimates for a linear scheme to approximate nonlinear parabolic problems*, Math. Mod. Numer. Anal., **21** (1987), 655–678.
- [7] H. Murakawa, *Reaction-diffusion system approximation to degenerate parabolic systems*, Nonlinearity, **20** (2007), 2319–2332.
- [8] H. Murakawa, *A solution of nonlinear diffusion problems by semilinear reaction-diffusion systems*, Kybernetika, **45** (2009), 580–590.
- [9] 村川秀樹, 放物型自由境界問題における界面の近似, 数理解析研究所講究録, **1633** (2009), 62–79.
- [10] 村川秀樹, 反応-拡散の相互作用と非線形拡散, 数理解析研究所講究録, **1704** (2010), 187–194.
- [11] H. Murakawa, *A linear scheme to approximate nonlinear cross-diffusion systems*, Math. Mod. Numer. Anal., **45** (2011), 1141–1161.
- [12] H. Murakawa, *A relation between cross-diffusion and reaction-diffusion*, Discrete Contin. Dyn. Syst. S, **5** (2012), 147–158.

- [13] H. Murakawa and H. Ninomiya, *Fast reaction limit of a three-component reaction-diffusion system*, J. Math. Anal. Appl., **379** (2011), 150–170.
- [14] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, *Spatial segregation of interacting species*, J. Theor. Biol., **79** (1979), 83–99.