

Moser type の非線型発展方程式

千葉大学工学部 河原田 秀夫 (Hideo kawarada)

千葉大学工学部 腰越 秀之 (Hideyuki koshigoe)

初期値問題

$$(1) \quad dx/dt + F(t, x) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0$$

の(時間的)局所解の存在を, Newton 法によって考える。

そのために, (1) を線型化した z についての線型方程式

$$(2) \quad \begin{aligned} dz/dt + F'(t, x)z + F(t, x) - F'(t, x)x &= 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ z(0) &= x_0 \end{aligned}$$

の解についての評価が必要である。ここで, $F'(\cdot, x)$ は $F(\cdot, x)$ の x における Fréchet 微分である。

以下, 次の順序で報告する。

1. 線型方程式 (2) の近似解の概念と M. Altman の結果
2. Banach scale の注意
3. 線型方程式 (2) の近似解の構成

1. 線型方程式 (2) の近似解の概念と M. Altman の結果

(J. Moser [2] の意味での) 近似解の定義を述べる前に、若干の記号を説明する。

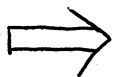
- Banach scale $X_0 \supset X_s \supset X_p$, $0 < s < p$
- $V_0 \equiv \{ x \in X_p ; \|x - x_0\|_s < r \}$
ここで、正数 r は固定する。 $x_0 \in X_p$ とする。
- $x \in G$ とは、 $x \in C^1(0, T; X_0) \cap C(0, T; V_0(\|\cdot\|_p))$
かつ、 $x(0) = x_0$ である。

定義 線型方程式 (2) が (Moser の意味で) degree

μ の近似解をもつとは、次が成り立つことである；

$\forall K \gg 1$, $\forall Q > 1$ をとる。このとき、

$$x \in G, \quad \|x\|_{\infty, p} \leq K$$



$$\exists y \in C(0, T; X_0) \quad \text{with} \quad \|y\|_{\infty, 0} \leq K Q^{-\mu}$$

$$\exists z \in C^1(0, T; X_0) \cap C(0, T; X_p) \quad \text{with} \quad \|z\|_{\infty, p} \leq K Q$$

かつ

$$dz/dt + F'(t, x)z + F(t, x) - F'(t, x)x + y = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$z(0) = x_0$$

を満たす。ここで、 μ は $K, Q, x \in G$ に依らない定数である。

(注1) 線型方程式(2)を解くとき, $x \in G$ を与えても, (2)の解 z は regularity loss のために, 一般には, $C(0, T; X_p)$ に属さない。しかし, 上の近似解の定義では, $z \in C(0, T; X_p)$ であることに注意すれば, Newton 法によって, 近似解列 $\{z_n\}$ を作ることもできる。

(M. Altman [1] の結果)

線型方程式(2)の degree μ の近似解の存在を仮定したもとで, $F(t, x)$, $F'(t, x)$ に関するいくつかの条件及び Moser's condition

(3) $0 < \lambda + 1 < (\mu + 1)/2$, $s/p < \lambda/(\lambda + 2)$ がある。

$\Rightarrow$ 非線型方程式(1)の(時間的)局所解は存在する。

(注2) (3)における λ は, 非線型方程式(1)の近似の order に用いられる定数である。

2. Banach scale の注意

1. より, 非線型方程式(1)の局所解の存在を示すには, 線型方程式(2)の degree μ の近似解が構成できれば

良い。M. Altman は, Banach scale

$$(4) \quad X_0 \supset X_{m_1} \supset X_{m_2} \supset X_s \supset X_p, \quad 0 < m_1 < m_2 < s < p$$

および, linear smoothing operator $\mathcal{J}_\theta$ を用いて, 近似解を作ろうとした。しかしながら, その構成には成功していない。その理由は, 次の命題である。

命題 Moser's condition (3) および 近似解を構成する時に用いる関係式

$$(5) \quad \mu = m / (p - m_2), \quad m = \min(m_1, m_2 - m_1)$$

を満たす Banach scale (4) は, 存在しない。

証明. (3), (5) を満たす Banach scale (4) が存在すると仮定する。 $\delta = m / m_2$ とおく。 m のとり方から,

$$(6) \quad 0 < \delta \leq 1/2$$

がわかる。 (5) より, $p / m_2 = 1 + \delta / \mu$.

これと (3), (4) とから,

$$1 + \delta / \mu = p / m_2 > p / s > (\lambda + 2) / \lambda = 1 + 2 / \lambda$$

を得る。したがって, $\delta / \mu > 2 / \lambda$.

これに (3) を用いると

$$\delta > (2\mu) / \lambda > 2(2\lambda + 1) / \lambda = 2(2 + 1/\lambda) > 4$$

となり, (6) と矛盾することかわかる。 ■

上の命題より, 近似解の構成に必要な条件 (5) と非線型発展方程式 (1) の解の存在証明に必要な Moser's condition (3) を前提とする限り, $X_{m_2} \subset X_S$ と 逆 になる。

それ故に, 我々は (3), (5) と整合する Banach scale

(7) $X_0 \supset X_{m_1} \supset X_S \supset X_{m_2} \supset X_{m_3} \supset X_P$, $0 < m_1 < S < m_2 < m_3 < P$ を inverted Banach scale と呼び, (4) のような Banach scale を normal Banach scale と呼ぶことにする。

< 例 > inverted Banach scale の例

$$\lambda = 53/10, \quad \mu = 12, \quad m_1 = 2, \quad S = 3, \quad m_2 = 4, \\ p = 25/6, \quad 4 < m_3 < 25/6.$$

最後に, 上の命題に注意して, 線型方程式 (2) の近似解を構成する方法として, 次の二つの方法を提案する;

(A) 条件 (3), (5) と整合する inverted Banach scale (7) を作り, このもとで, 線型方程式 (2) の解 z に, 次の

$$\|z\|_{\infty, m_2} \leq C (1 + \|x\|_{\infty, m_3}) \quad \text{for } x \in G$$

という評価を要請する方法。

(B) normal Banach scale (4) のもとで, 線型方程式 (2) に singular perturbation を導入し, 次の方程式

$$dz_\eta/dt + H_\eta z_\eta + F'(t, x) z_\eta + F(t, x) - F'(t, x)x = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$z_\eta(0) = 0$$

の解 x_n に smoothing operator を作用させる方法。

次の章では、特に、inverted Banach scale の場合 (A) に対して、線型方程式 (2) の近似解が構成できることを報告する。

3. 線型方程式 (2) の近似解の構成

まず、定義と仮定を述べる。

定義 inverted Banach scale (7) は、次の意味での linear operator $\mathcal{J}_\theta$ ($\theta \geq 1$) をもつとする；

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\theta : X_0 &\longrightarrow X_P, \\ (8) \quad &\| (I - \mathcal{J}_\theta)x \|_0 \leq C \theta^{-m_1} \|x\|_{m_1} \quad \text{for } x \in X_{m_1}, \\ &\| (I - \mathcal{J}_\theta)x \|_{m_1} \leq C \theta^{-(m_2 - m_1)} \|x\|_{m_2} \quad \text{for } x \in X_{m_2}, \\ &\| \mathcal{J}_\theta x \|_P \leq C \theta^{P - m_j} \|x\|_{m_j} \quad \text{for } x \in X_{m_j} (j=1, 2, 3). \end{aligned}$$

ただし、 C は θ, x によらない定数である。

このとき、上のような $\mathcal{J}_\theta$ を smoothing operator と呼び、smoothing operator をもつ Banach scale を tame な Banach scale という。

(注3) tame な Banach scale は norm に関して logarithm convex property をもつ。特に、

$$(9) \quad \| \cdot \|_{m_3} \leq C \| \cdot \|_S^{\frac{(P-m_3)/(P-S)}{(m_3-S)/(P-S)}} \| \cdot \|_P^{\frac{(m_3-S)/(P-S)}{(P-m_3)/(P-S)}}$$

が成り立つ。ここで, C は正定数である。

次に, 線型作用素 $F'(t, x)$ についての仮定および線型方程式 (2) の解に対する仮定を述べる。

<仮定 1>

$$(10) \quad \begin{aligned} \| F'(t, x) h \|_0 &\leq L_1 \| h \|_{m_1} \quad \text{for } (t, x) \in [0, T] \times V_0, h \in X_{m_1}, \\ \| F'(t, x) h \|_{m_1} &\leq L_1 \| h \|_{m_2} \quad \text{for } (t, x) \in [0, T] \times V_0, h \in X_{m_2}, \\ \| F(t, x) - F'(t, x)x \|_{\infty, m_1} &\leq L_2 (1 + \| x \|_{\infty, m_3}) \\ &\quad \text{for } x \in G \end{aligned}$$

<仮定 2> $x \in G$ に対して, 線型方程式 (2) は, 解 $z \in C^1(0, T; X_{m_1}) \cap C(0, T; X_{m_2})$ をもち, 次の評価

$$(11) \quad \| z \|_{\infty, m_2} \leq L_3 (1 + \| x \|_{\infty, m_3})$$

が成り立つ。

ただし, 上の定数 L_1, L_2, L_3 は x, h に依らない定数である。

上の <仮定 2> は, 我々の方法において重要である。

(注 4) (9), (10), (11) から, 次のことが容易に導ける; $x \in G$, $\| x \|_{\infty, p} \leq K$ のとき,

ある α ($0 < \alpha < 1$) に対し,

$$(10)' \quad \|F(t, x) - F'(t, x)x\|_{\infty, m_1} \leq d K^\alpha,$$

$$(11)' \quad \|z\|_{\infty, m_2} \leq D K^\alpha$$

が成り立つ。ここで, d, D は x, K に依らない定数である。また, $\alpha = (m_3 - s) / (p - s)$.

定理 same な inverted Banach scale (7) のもとで, 仮定 1, 仮定 2 が成り立つとする。このとき,

$$\mu = m / (p - m_2), \quad m = \min(m_1, m_2 - m_1)$$

とあくと, 線型方程式 (2) は, degree μ の近似解をもつ。

証明. 線型方程式なので, $x_0 = 0$ と仮定しても一般性を失わない。今, $x \in G$, $\|x\|_{\infty, p} \leq K$ をとる。仮定 2 より, 線型方程式 (2) は解 $\bar{z}$ をもつ。 $z = J_0 \bar{z}$ とおくとき, これが (2) の degree μ の近似解であることを以下に示そう。

$$(12) \quad -y = dz/dt + F'(t, x)z + F(t, x) - F'(t, x)x$$

とおく。このとき, $\bar{z}$ が (2) の解であることと J_0 の性質を用いると,

$$\begin{aligned} \|y\|_{\infty, 0} &= \|dz/dt + F'(t, x)z + F(t, x) - F'(t, x)x\|_{\infty, 0} \\ &\leq \|d\bar{z}/dt + F'(t, x)\bar{z} + F(t, x) - F'(t, x)x\|_{\infty, 0} \\ &\quad + \|(I - J_0)(d\bar{z}/dt)\|_{\infty, 0} + \|F'(t, x)(I - J_0)\bar{z}\|_{\infty, 0} \end{aligned}$$

$$= \| (I - \mathcal{J}_\theta) (d\bar{z}/dt) \|_{\infty,0} + \| F'(t,x) (I - \mathcal{J}_\theta) \bar{z} \|_{\infty,0}$$

($\equiv I_1 + I_2$ とおく)。

仮定1, 仮定2, (10)', (11)' を用いると

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \| (I - \mathcal{J}_\theta) [F'(t,x) \bar{z} + F(t,x) - F'(t,x)x] \|_{\infty,0} \\ &\equiv C \theta^{-m_1} \{ \| F'(t,x) \bar{z} \|_{\infty,m_1} + \| F(t,x) - F'(t,x)x \|_{\infty,m_1} \} \\ &\equiv C \theta^{-m_1} (L_1 \| \bar{z} \|_{\infty,m_2} + d K^\alpha) \\ &\equiv C \theta^{-m_1} (L_1 D + d) K^\alpha \\ &\equiv \theta^{-m_1} K \quad (\text{十分大きな } K \text{ をとる}). \end{aligned}$$

また, 仮定1, 仮定2, (11)' を用いると

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv L_1 \| (I - \mathcal{J}_\theta) \bar{z} \|_{\infty,m_1} \equiv L_1 C \theta^{-(m_2-m_1)} \| \bar{z} \|_{\infty,m_2} \\ &\equiv L_1 C D \theta^{-(m_2-m_1)} K^\alpha \\ &\equiv \theta^{-(m_2-m_1)} K \quad (\text{十分大きな } K \text{ をとる}). \end{aligned}$$

以上より,

$$(13) \quad \| y \|_{\infty,0} \equiv \theta^{-m} K, \quad m = \min(m_1, m_2 - m_1)$$

を得る。同様に, 仮定2, (11)' を用いると,

$$\begin{aligned} \| z \|_{\infty,p} &= \| \mathcal{J}_\theta \bar{z} \|_{\infty,p} \equiv C \theta^{p-m_2} \| \bar{z} \|_{\infty,m_2} \\ &\equiv C D \theta^{p-m_2} K^\alpha \\ &\equiv \theta^{p-m_2} K \quad (\text{十分大きな } K \text{ をとる}). \end{aligned}$$

故に,

$$(14) \quad \| z \|_{\infty,p} \equiv \theta^{p-m_2} K$$

を得る。

したがって,

$$Q = \theta^{p-m_2}$$

とおくと, $Q > 1$ かつ $\mu = m/(p-m_2)$ より,

$\theta^{-m} = Q^{-\mu}$ を得る。それ故に, これと (13), (14) より

$$\|y\|_{\infty,0} \leq K Q^{-\mu}, \quad \|z\|_{\infty,p} \leq K Q$$

となる。しかも, (12) より

$$dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x + y = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$z(0) = 0$$

が成り立つ。故に, 線型方程式 (2) の近似解が構成された。

(注5) 上の定理および Moser's condition (3) によって, 非線型発展方程式 (1) の (時間的) 局所解の存在がわかる (1. M. Altman の結果より)。

参考文献

- [1] M. Altman, Nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Nonlinear Analysis 8, 491-499 (1984)
- [2] J. Moser, A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations I, Annali Scu. norm. sup. Pisa 20, 265-315 (1966)

- [3] H. Kawanada and H. Koshigoe, On a construction of an approximate solution of the linearized equation of Moser's type, Tech. Rep. Math. Sci. Chiba Univ. No. 5 (1985)